



Modelo de elementos finitos 3D de una vía ferroviaria sobre balasto para el análisis de la función periódica ante una carga móvil

Rosario Chamorro¹, Álvaro Brazales², Javier F. Aceituno², José L. Escalona¹

¹ Departamento Ingeniería Mecánica y Fabricación, Universidad de Sevilla, rchamorro@us.es, escalona@us.es

² Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera, Universidad de Jaén, brazales@ujaen.es, jaceitun@ujaen.es

Este artículo estudia la función periódica que aparece en la deformación de una vía ferroviaria sobre balasto con soportes discretos debido a una carga móvil. La metodología de modelado de la vía se basa en el método de elementos finitos. Se realiza un análisis de convergencia para determinar el número de elementos por tramo necesario para obtener resultados precisos y fiables sin incrementar innecesariamente el coste computacional. También se efectúa un análisis de sensibilidad de los principales parámetros de la vía para estudiar su influencia en la función periódica. Adicionalmente, se analiza la influencia de la rigidez de los railpads y del balasto, respectivamente, en la deflexión máxima de la función. Se observa que la forma de la función periódica depende poco de las velocidades consideradas, pero la deflexión aumenta con la velocidad de avance de la carga. Como es lógico, la deflexión en la función incrementa a medida que aumenta la carga para una velocidad constante.

1. Introducción

El análisis dinámico de vehículos ferroviarios requiere una representación precisa tanto del vehículo como de la geometría y estructura de la vía, y su interacción mutua [1].

Para modelar la dinámica de las vías existen varias herramientas disponibles. Una de ellas es el método de elementos finitos (MEF), que permite obtener modelos de vía altamente realistas, aunque esto conlleva elevado coste computacional [2]. Muchos programas de elementos finitos están disponibles comercialmente y son aplicables al sector ferroviario para simular el vehículo, la estructura completa de la vía y el terreno [3]. El estado del arte de los modelos de vías puede encontrarse en [2,4,5].

La vía sobre balasto es la estructura tradicional utilizada mundialmente y sigue siendo la más común. En estas vías, los carriles, las traviesas y la cama de balasto contribuyen al comportamiento dinámico del sistema. Simular de manera precisa la dinámica de vías sobre balasto, especialmente considerando la naturaleza discreta de los apoyos en las traviesas, sigue siendo un desafío en la comunidad ferroviaria [2].

Aunque en aplicaciones prácticas los modelos con soporte continuo ofrecen una buena aproximación al comportamiento dinámico general, la naturaleza discreta de los apoyos creados por las traviesas tiene un impacto significativo. Este efecto se manifiesta de manera pronunciada en la frecuencia *pinned-pinned*, donde la distancia entre traviesas corresponde a media longitud de onda de flexión en el carril [6]. La formación de corrugación en las vías está relacionada con dicha frecuencia [6,7] lo que la hace de gran interés para comprender y mitigar este problema, que afecta la seguridad y la comodidad de la circulación de los trenes, además de aumentar los costes de mantenimiento.

Concretamente, los carriles, considerados sistemas continuos, pueden modelarse como vigas de Euler-Bernoulli o como vigas de Timoshenko [2,7]. Generalmente se considera que es más adecuado modelar como viga de Timoshenko cuando interesan las frecuencias altas y que es equivalente el modelado con ambos tipos de viga a frecuencias bajas. En [8] se muestra que sí hay diferencias incluso a bajas frecuencias cuando se consideran los apoyos discretos. Cuando se consideran los apoyos discretos de los carriles sobre traviesas, existen diferentes formas de modelar los apoyos y la propia vía [1,7,9,10].

Recientemente, ha crecido el interés por comprender el comportamiento de vías con apoyos discretos, particularmente en lo que respecta a las funciones periódicas: patrones repetitivos en el comportamiento de la vía que pueden simplificar los modelos [11-13]. En [14] se hace una revisión de los métodos que consideran la periodicidad de la vía con apoyos discretos.

Este artículo presenta un estudio novedoso sobre las funciones periódicas que aparecen en la deformación de una vía férrea sobre balasto con apoyos discretos bajo la acción de una carga móvil. La metodología de modelado se basa en el MEF, y se realiza un análisis de convergencia para determinar el número de elementos por tramo necesarios para obtener resultados precisos sin aumentar innecesariamente el coste computacional.

Los objetivos específicos de este estudio son:

- Determinar la influencia de la velocidad del tren en la forma y la amplitud de las funciones periódicas.
- Analizar el efecto de la carga vertical del tren en las características de dichas funciones periódicas.
- Evaluar la influencia de la rigidez de los *railpads* y del balasto en la deflexión máxima de la vía.

Para lograr estos objetivos, se implementa un modelo de elementos finitos que incorpora características específicas para el análisis de funciones periódicas, incluyendo un análisis de sensibilidad de los principales parámetros de la vía. Este enfoque permitirá profundizar en la comprensión del comportamiento dinámico de las vías con apoyos discretos y su relación con la formación de defectos como la corrugación. Además, el estudio de estas funciones periódicas podría permitir desarrollar métodos más eficientes computacionalmente. Por ejemplo, podrían desarrollarse modelos simplificados con parámetros variables que generen las mismas funciones periódicas o avanzar en el desarrollo de enfoques como el *Moving Modes Method* aplicado a vías con apoyos discretos [15,16].

2. Modelo de Elementos Finitos para la Vía 3D

Esta sección describe el modelo de una vía ferroviaria sobre balasto con soportes discretos que representan las traviesas, utilizando el método de elementos finitos. El modelo de la vía tiene una longitud finita, pero es lo suficientemente largo como para que se pueda obtener una buena aproximación a la función periódica sin efectos de borde.

2.1. Ecuaciones de Movimiento

El sistema tridimensional se modela mediante las ecuaciones:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_g + \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

donde \mathbf{q} tiene dimensión $n_q = 2n_n$; \mathbf{Q}_g es la fuerza generalizada debida al peso propio de la vía, y $\mathbf{F}(t)$ es la fuerza generalizada de la carga móvil. El desplazamiento se mide desde la posición indeformada de la vía. En la siguiente subsección se encuentra la descripción de los nodos y las coordenadas nodales.

2.2. Coordenadas generalizadas

La vía se discretiza con nodos a nivel de los carriles y de las traviesas. Las traviesas se modelan sobre una base elástica que representa el balasto. Cada nodo tiene 2 grados de libertad. En los nodos de los carriles se permite el desplazamiento vertical y giro en torno al eje y (dirección transversal a la vía), y en los nodos de las traviesas se permite el desplazamiento vertical y el giro en torno al eje x (dirección longitudinal de la vía). Los nodos y las coordenadas nodales se muestran en la Fig.1. Pueden considerarse más elementos en carriles y traviesas, aumentando el número de nodos del sistema.

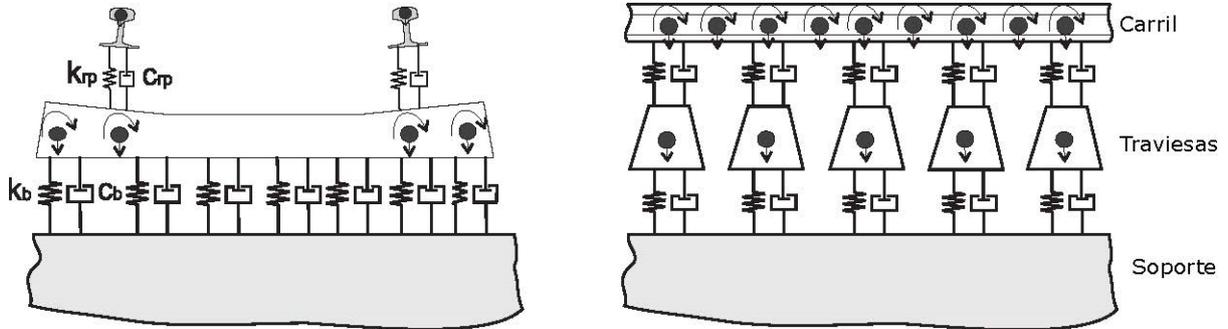


Figura 1: Modelo de vía ferroviaria. Vista frontal y lateral. Los círculos representan los nodos con las coordenadas nodales incluidas en el vector \mathbf{q} .

El vector \mathbf{q} incluye las siguientes coordenadas:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{\text{carriles}} \mathbf{q}^{\text{traviesas}}]^T \quad (2)$$

Siendo

$$\mathbf{q}^{\text{carriles}} = [u_z^1 \theta_y^1 \ u_z^2 \theta_y^2 \ \dots \ u_z^{2n} \theta_y^{2n}]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{q}^{\text{traviesas}} = [u_z^{t11} \theta_x^{t11} \ u_z^{t12} \theta_x^{t12} \ u_z^{t13} \theta_x^{t13} \ u_z^{t14} \theta_x^{t14} \ \dots \ u_z^{tn4} \theta_x^{tn4}]^T \quad (4)$$

donde las coordenadas nodales mostradas en la ecuación (3) corresponden a las de los nodos que describen los carriles izquierdo y derecho (cada carril tiene n nodos), y las mostradas en la ecuación (4) corresponden a las de los 4 nodos que describen cada traviesa (mostrados en la Fig. 1).

2.3. Matrices del Sistema

Los elementos en el carril y las traviesas se modelan como vigas de Euler-Bernouilli con deformadas cúbicas. Las almohadillas elásticas se modelan como muelles lineales sin masa. Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento de cada elemento, \mathbf{M}_e , \mathbf{C}_e y \mathbf{K}_e , se calculan de forma independiente y se ensamblan como sigue:

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{C}_{ei}^T \mathbf{M}_e \mathbf{C}_{ei} \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \sum_i \mathbf{C}_{ei}^T \mathbf{C}_e \mathbf{C}_{ei} \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{C}_{ei}^T \mathbf{K}_e \mathbf{C}_{ei} \quad (7)$$

donde \mathbf{C}_{ei} es la matriz booleana de conectividad, con dimensión $[4 \times n_q]$, tal que:

$$\mathbf{q}_{ei} = \mathbf{C}_{ei} \mathbf{q} \quad (8)$$

2.4. Fuerza generalizada

La fuerza generalizada asociada al peso de cada elemento, \mathbf{Q}_g^{ei} , se obtiene con el método habitual de los elementos finitos:

$$\mathbf{Q}_g^{ei} = \int_0^{l_{ei}} \mathbf{N}^T(s) \begin{bmatrix} 0 \\ -m_{ei}g \end{bmatrix} ds \quad (9)$$

Este vector se incluye en el vector de fuerza generalizada total, \mathbf{Q}_g , como sigue:

$$\mathbf{Q}_g = \sum_i \mathbf{C}_{ei}^T \mathbf{Q}_g^{ei} \quad (10)$$

La fuerza generalizada asociada a la carga móvil, $\mathbf{F}(t)$, se calcula como $\mathbf{F} = (\mathbf{N}(s)\mathbf{C}_{ei})^T \mathbf{P}$, donde $\mathbf{N}(s)$ es la función de forma que es función de la longitud de arco 's' y que para el caso de la carga móvil se evalúa en el punto de aplicación de la carga P .

3. Resultados

La Tabla (1) muestran los parámetros utilizados [17] para el estudio de convergencia y el análisis de sensibilidad. En los análisis de sensibilidad se varía un parámetro mientras el resto se mantiene con el valor mostrado en la tabla.

Tabla 1: Parámetros utilizados.

Parámetros	Valor
Railpads	
Rigidez, k_{rp} (N/m)	1.5e9
Amortiguamiento, c_{rp} (Ns/m)	65.5e3
Balasto	
Rigidez, k_b (N/m ²)	0.18e9
Amortiguamiento, c_b (Ns/m ²)	120e3
Traviesas	
Masa, m_t (kg)	277.4
Longitud, l_t (m)	2.58
Span, l_s (m)	0.6
Carriles	
Masa por unidad de longitud, ρA (kg/m)	60
EI (MNm ²)	6.4
Carga	
P (N)	7840

3.1. Análisis de convergencia

Para conocer el número de elementos adecuados en la discretización del modelo de la vía se realiza un estudio de convergencia. La Fig.2 muestra un periodo de la función periódica obtenida con 1, 2, 4 y 6 elementos por vano de los carriles, respectivamente. El desplazamiento vertical mostrado en la figura corresponde al punto de aplicación de la carga móvil. Si únicamente interesa el desplazamiento del punto medio entre soportes, como podría ser si interesa conocer la deflexión máxima, 2 elementos serían suficientes para obtener resultados precisos y fiables sin aumentar innecesariamente el coste computacional. Sin embargo, para obtener el periodo completo de la función, 4 elementos son más apropiados. La razón puede observarse en la Fig.2: la parte de la función periódica representada no se obtiene de manera precisa con 2 elementos por vano. Tanto con 4 como con 6 elementos, se obtiene la misma función (la diferencia se considera insignificante), lo que lleva a la conclusión de que 4 es el número adecuado y suficiente de elementos para representar un periodo de la función. Se observa en la figura que la diferencia entre usar 4 y 6 elementos es despreciable.

La función que más difiere es la obtenida con 1 elemento por vano. En ella se observa que los soportes del carril se desplazan más que la zona central, que corresponde a la sección del carril entre soportes. Este comportamiento se debe a que las coordenadas nodales a nivel del carril están ubicadas en los soportes. Estas coordenadas nodales son mayores cuando la carga pasa directamente sobre el soporte en comparación con cuando la carga se encuentra en la zona central del vano. Si las coordenadas nodales son menores cuando la carga pasa por la zona central, al interpolar para obtener la flecha en el punto de aplicación de la carga, se obtiene una flecha mayor que la de los soportes en ese momento, como dicta la lógica, pero menor que la de los soportes cuando la carga se aplica directamente sobre ellos.

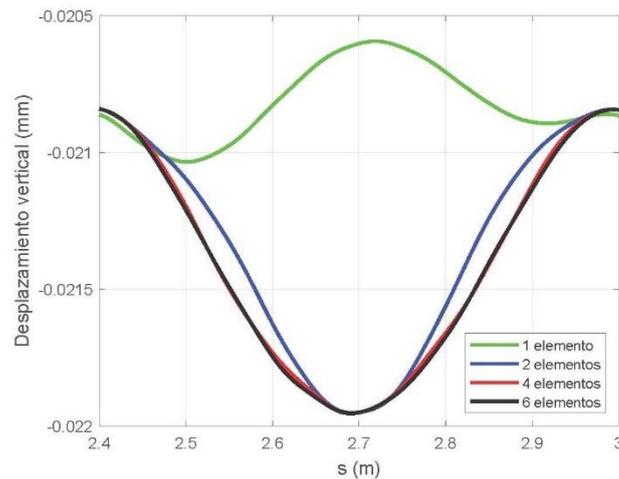


Figura 2: Un período de la función periódica con 1, 2, 4 y 6 elementos, respectivamente, cuando la velocidad es 100 m/s y la carga 7840 N.

3.2. Análisis de sensibilidad

Se realiza un análisis de sensibilidad para examinar la influencia de ciertos parámetros de la vía en la función periódica que aparece entre traviesas.

Un período de la función periódica para diferentes velocidades de la carga móvil, que varían entre 15 y 50 m/s, se muestran en la Fig.3. El desplazamiento vertical mostrado en la figura corresponde al punto de aplicación de la carga móvil. Se puede observar que el desplazamiento de la vía aumenta a medida que aumentan las velocidades.

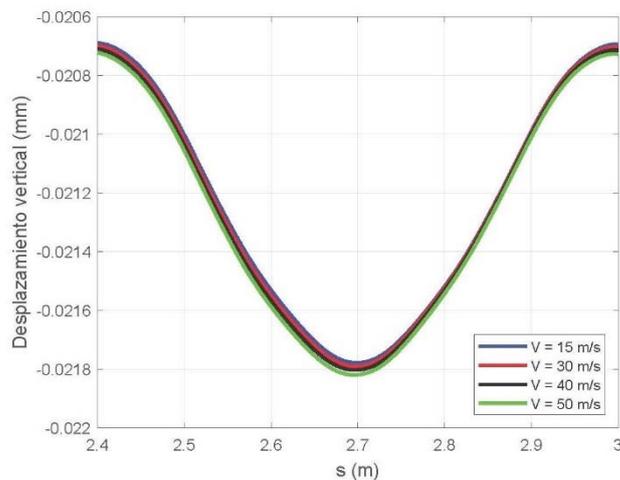


Figura 3: Un período de la función periódica para distintas velocidades de la carga móvil.

La Fig.4 muestra un período de la función periódica resultante cuando una carga móvil de diferentes valores se desplaza a lo largo de la vía a una velocidad de 50 m/s. El desplazamiento vertical mostrado en la figura corresponde al punto de aplicación de la carga móvil. El desplazamiento del punto de aplicación de la carga para diferentes cargas se compara con la flecha estática de la vía cuando no se aplica ninguna carga.

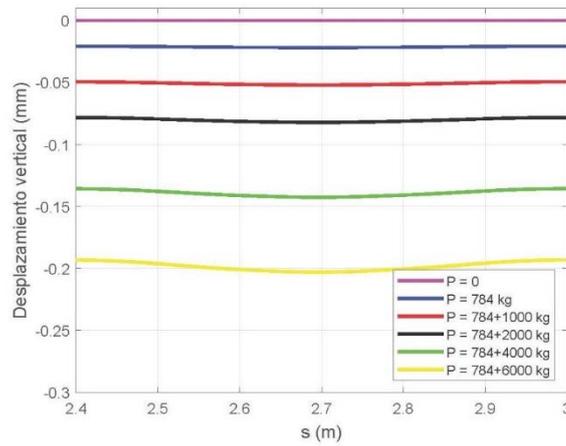


Figura 4: Un período de las funciones periódicas para diferentes cargas moviéndose a 50 m/s.

El desplazamiento vertical máximo de la función periódica al variar la rigidez de los *railpads* y del balasto, respectivamente, se muestra en las Fig.5 y 6. El desplazamiento vertical mostrado en las figuras corresponde al punto de aplicación de la carga móvil. Se puede observar en estas figuras que, para valores de rigidez más bajos, la variación en el desplazamiento máximo de la función es más abrupta, mientras que se suaviza a medida que la rigidez aumenta.

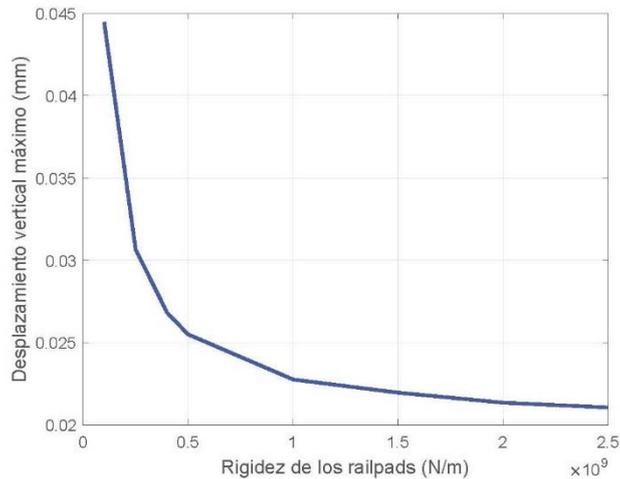


Figura 5: Máximo desplazamiento en la función periódica cuando varía la rigidez de los *railpads*.

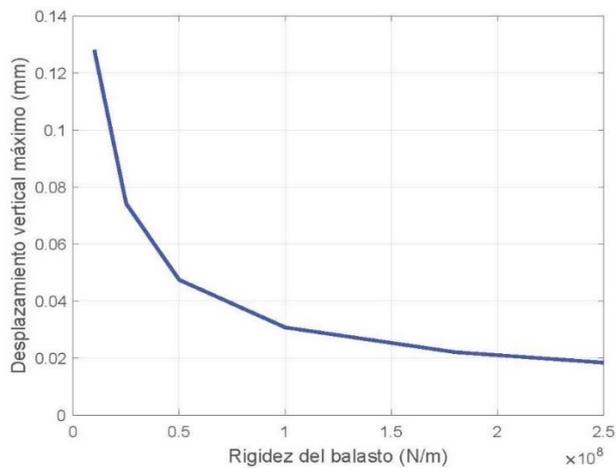


Figura 6: Máximo desplazamiento en la función periódica cuando varía la rigidez del balasto.

4. Conclusiones

Se ha descrito un modelo de elementos finitos 3D para una vía ferroviaria sobre balasto con traviesas. La función periódica se analiza variando ciertos parámetros, como la carga, la velocidad, la rigidez del balasto y la rigidez de los *railpads*.

Este modelo se ampliará en trabajos futuros modelando los carriles y traviesas como vigas de Timoshenko, y sustituyendo la carga móvil por un modelo de vehículo más detallado e incluyendo el contacto rueda-carril. El estudio de funciones periódicas permitirá el desarrollo de métodos más eficientes computacionalmente para modelar vías ferroviarias balastadas con soportes discretos en el futuro.

5. Agradecimientos

Agradecemos el apoyo del proyecto PID2023-152786OB-I00 del Ministerio de Ciencia y Innovación y Universidades de España.

6. Referencias

- [1] Costa J.N., et al. "A finite element methodology to model flexible tracks with arbitrary geometry for railway dynamics applications", *Computers and Structures*, 254 (2021)
- [2] Zhai W. and Zhu S., "Track design, dynamics and modelling", in *Handbook of railway dynamics* (eds. Iwnicki, S. et al.), chapter 9, p. 307-344 (2020)
- [3] Sañudo R., et al. "Track transitions in railways: A review", *Construction and building materials*, 112, 140-157 (2016)
- [4] Esveld C., "Modern Railway Track", *MRT-Productions, Groenwal 25 - NL-5301 JJ Zaltbommel - The Netherlands* (2016)
- [5] Bhardawaj S. et al., "A Survey of Railway Track Modelling", *Int. J. Vehicle Structures and Systems*, 11(5), 508-518 (2019)
- [6] Zhang X., et al. "A model of a discretely supported railway track based on a 2.5D finite element approach", *Journal of Sound and Vibration*, 438, 153-174 (2019)
- [7] Blanco B., et al. "Distributed support modelling for vertical track dynamic analysis", *Vehicle System Dynamics*, 56 (4), 529-552 (2018)
- [8] Zhang X., et al. "Differences between Euler-Bernoulli and Timoshenko beam formulations for calculating the effects of moving loads on a periodically supported beam", *Journal of Sound and Vibration*, 481, 115432, (2020)
- [9] Blanco B., et al. "Implementation of Timoshenko element local deflection for vertical track modelling", *Vehicle System Dynamics*, 57 (10), 1421-1444 (2019)
- [10] Shen C. et al., "Comparisons between beam and continuum models for modelling wheel-rail impact at a singular rail surface defect", *International Journal of Mechanical Sciences*, 198, 106400 (2021)
- [11] García-Palacios J., Samartín A., and Melis M. "Analysis of the railway track as a spatially periodic structure", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F Journal of Rail and Rapid Transit*, 226 (2), 113-123, DOI:10.1177/0954409711411609 (2012)
- [12] de Oliveira J. et al., "Dynamic response of an infinite beam periodically supported by sleepers resting on a regular and infinite lattice: Semi-analytical solution", *Journal of Sound and Vibration*, 458 (13), 276-302 (2019)
- [13] Alzabeebee S., "Numerical assessment of the critical velocity of a ballasted railway track", *Innovative Infrastructure Solutions*, 7: 315, <https://doi.org/10.1007/s41062-022-00921-w> (2022)
- [14] Lamprea-Pineda A.C. et al., "Beams on elastic foundations- A review of railway applications and solutions", *Transportation Geotechnics*, 33, 100696, (2022)
- [15] Chamorro R. et al., "An approach for modelling long flexible bodies with application to railroad dynamics", *Multibody System Dynamics*, 26, 135-152 (2011)
- [16] Recuero A.M. et al., "Dynamics of the coupled railway vehicle-flexible track system with irregularities using a multibody approach with moving modes", *Vehicle System Dynamics*, 52(1), pp. 45-67 (2013)
- [17] Shen C., "Vibration-based railway track condition monitoring. A physics-based digital twin approach", PhD Thesis, Delft University of Technology, (2023)