



Efecto del coeficiente de fricción en la inestabilidad como mecanismo de generación de la corrugación ferroviaria

Marta Meléndez^{1,2}, Félix Martínez¹, Oscar Salgado¹, Nekane Correa², Joseba Murua³

¹ Departamento de Tecnologías Mecatrónicas, IKERLAN S.COOP, mmelendez@ikerlan.es

² Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería de Bilbao, Universidad del País Vasco (UPV/EHU), nekane.correa@ehu.eus

³ Área de Dinámica y Rodadura, CAF, joseba.murua@caf.net

La corrugación ferroviaria sigue siendo hoy en día un problema recurrente en muchos de los sistemas ferroviarios y, a pesar de los avances de los últimos años, continúa siendo un tema de interés en la investigación. En este trabajo se estudia el acoplamiento modal debido a la fricción como mecanismo de fijación de longitud de onda de la corrugación. Para ello, se propone un modelo de elementos finitos con el que analizar el efecto del coeficiente de rozamiento en la estabilidad del sistema de eje montado-vía. El modelo consta, por un lado, del eje montado con la suspensión primaria y por el otro, de la vía. El modelo de vía, formado por dos carriles sujeto por resorte-amortiguador lateral y vertical en cada traviesa, ha sido ajustado contra mediciones experimentales de receptancias. Los resultados del análisis modal muestran la importancia del coeficiente de fricción en la estabilidad modal del sistema. Cuanto mayor sea este coeficiente de fricción, mayor es la inestabilidad que sufre el sistema en unas condiciones concretas de circulación. Mantener el coeficiente de fricción limitado a un valor por debajo del límite podría prevenir la inestabilidad y en consecuencia la corrugación provocada por acoplamiento modal.

1. Introducción

La corrugación ferroviaria es un tipo de rugosidad con forma de onda que aparece en la superficie de rodadura de los carriles. Su aparición ocasiona la reducción de la vida útil de elementos de infraestructura, como por ejemplo sujeciones, y elementos del material rodante, como puede ser la suspensión primaria, al provocar vibraciones indeseadas. Además, puede llegar a causar ruidos a baja frecuencia que suponen una molestia para el entorno y los pasajeros. Según [1], se estima que los fenómenos de corrugación suponen un coste anual de más de 60 millones de euros en Europa, pues afecta al 40% de las explotaciones ferroviarias [1]. A pesar de ser un problema extendido, y haber sido recurrente en la investigación durante años, sigue presente y existen diversas teorías que explican las causas del fenómeno de la corrugación. Asimismo, gran parte de los estudios se centran en el análisis de la influencia de los parámetros de la vía y sólo algunos tienen en cuenta la influencia del diseño del eje montado y la suspensión primaria.

El fenómeno de la corrugación es descrito de manera sencilla mediante dos mecanismos diferenciados: el mecanismo de fijación de onda de la corrugación, y el mecanismo de daño, tal y como se describe en [2]. El primero, como su propio nombre indica, se refiere al comportamiento dinámico que define la longitud de onda generada en la interacción en el sistema rueda-carril. El mecanismo de daño más común es el desgaste, si bien existe otro mecanismo de daño debido a deformación plástica que se produce en casos de vehículos de grandes cargas. Actualmente la investigación sobre corrugación se centra en estudiar el mecanismo de fijación de longitud de onda en los que el mecanismo de daño es el desgaste. La incógnita es comprender cómo los modos del mecanismo de la fijación de longitud de onda son excitados, por qué aparece en ciertas áreas y no en otras, y cómo es posible pararlo o mitigarlo.

Es posible encontrar en la literatura dos corrientes para explicar la excitación del sistema y definir el mecanismo de la fijación de longitud de onda de la corrugación, tal y como se ejemplifica en la Figura 1. Por un lado, la denominada excitación paramétrica, quizás la teoría más extendida y estudiada, supone una corrugación iniciada por la existencia de un cambio en la fuerza de contacto, bien puntual como por ejemplo debido a una soldadura, continuada en una sección como por ejemplo la rugosidad o debido a los soportes discretos de la vía, el cual excita los distintos modos que afectan en la generación de la corrugación. Por el otro lado, la otra teoría se basa en la inestabilidad rueda-carril. Las inestabilidades más estudiadas en este ámbito son el fenómeno stick-slip y el acoplamiento modal entre el vehículo y la vía.

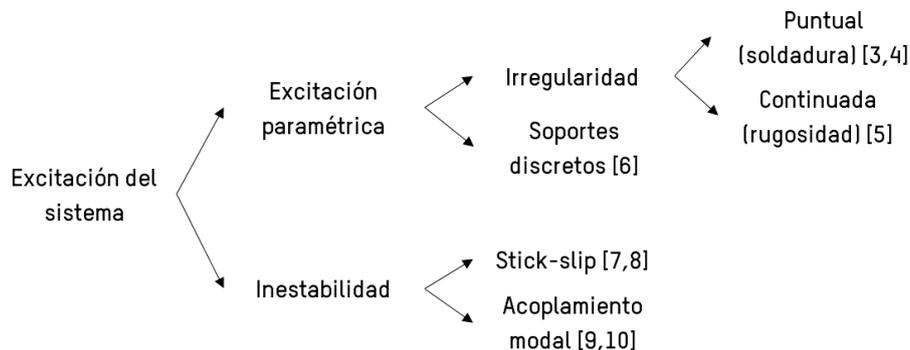


Figura 1: Esquema corrientes que explican la excitación del mecanismo de fijación de longitud de onda.

En la teoría debido a excitación paramétrica, un cambio brusco en el contacto actúa como desencadenante y excita las frecuencias del sistema. Los desencadenantes pueden ser cualquier modificación en el recorrido; por ejemplo, una soldadura, un cambio de rigidez, la rugosidad, los soportes discretos... En [3], se trata la irregularidad como una soldadura y se concluye que, dependiendo de la posición de la soldadura y la velocidad del vehículo, la corrugación podría llegar a generarse o no. Se demuestra, que la velocidad es un factor muy importante en la generación de la corrugación, aunque reducir la velocidad no es sinónimo de reducir el problema de la corrugación. De igual manera se demuestra la importancia de la posición con respecto a la traviesa en la que se encuentra la irregularidad, en este caso la soldadura. En [4], se inicia la corrugación con otro ejemplo de excitación puntual, un defecto de plano de rueda. En [5], se trata la influencia de la rugosidad y la rigidez de los soportes de la vía. Mediante un modelo numérico se comprueba la influencia de estos desencadenantes en la iniciación de la corrugación, afirmando su efecto en el desarrollo favoreciendo su aumento. Además, en [6], también evidencian la importancia y el efecto que tienen los soportes sobre traviesas como posibles desencadenante de la iniciación de la corrugación y su desarrollo.

En el caso de la teoría de la inestabilidad, son las condiciones en las que se encuentra el propio sistema el desencadenante para la aparición de modos inestables que definirán la longitud de onda de la corrugación. Las inestabilidades más estudiadas en este ámbito son el fenómeno de stick-slip y el acoplamiento modal entre el vehículo y la vía, en ambos el contacto con fricción es el factor causante de la inestabilidad. En [7] y [8], se estudia

el desarrollo de la corrugación como consecuencia del fenómeno de stick-slip. Si se llega a saturar la fricción, es decir, si se alcanza el valor umbral del deslizamiento en el que comienza la pendiente negativa del coeficiente de fricción, el sistema tiende a excitarse. Por otra parte, [9] estudia la corrugación como consecuencia de un acoplamiento modal, donde se produce una aproximación entre el modo de la flexión del eje y de un modo vertical del sistema rueda-carril. En [10], se estudia el efecto del ángulo de contacto, pudiendo observar modos inestables a diferentes ángulos de contacto; incluso sin haber contacto lateral en la pestaña.

El objetivo de este trabajo es analizar la influencia de la fricción en la inestabilidad modal del sistema rueda-carril. Para ello, se desarrolla un modelo de elementos finitos de vía en curva con un eje montado en las condiciones de contacto estimadas para la velocidad de circulación del vehículo. En el sistema se realiza un análisis modal precargado que, considerando los esfuerzos de fricción, permite estimar la inestabilidad en los modos propios del sistema. Los modos propios con mayor valor de inestabilidad serán los más propensos a excitarse y si llegaran a excitarse se considerarían como mecanismo de fijación de longitud de onda de la corrugación. El análisis que se presenta contempla un análisis de sensibilidad del coeficiente de fricción y la velocidad de operación del sistema que permiten establecer qué frecuencias del sistema son las más proclives a desarrollar corrugación.

2. Modelo

La predicción de modos inestables implica dos pasos de cálculo. Primeramente, se simula la dinámica del vehículo para analizar la inscripción en curva del tren. La simulación de la dinámica del vehículo se ha llevado a cabo mediante el software de simulación multicuerpo SIDIVE [11], con el que se han extraído las posiciones de los contactos y las fuerzas de contacto en los mismos. En el segundo paso, se realiza un análisis modal precargado mediante un modelo rueda-carril de elementos finitos en el software ANSYS.

El modelo adoptado en esta investigación se basa en el trabajo publicado en [12]. En este trabajo se propone el acoplamiento por fricción del sistema rueda-carril como mecanismo de formación de la corrugación. Estudian la estabilidad del sistema de eje montado sobre vía mediante el método complejo de análisis modal con un modelo de elementos finitos. El movimiento del eje montado se acopla con el de la vía mediante un contacto con fricción. La fuerza de pseudodeslizamiento se asume saturada y aproximadamente igual a la fuerza normal multiplicada por el coeficiente dinámico de fricción.

2.1. Modelo de vía

El modelo de vía representa una curva de radio 151,7 m y una longitud equivalente a 100 vanos. El espacio entre traviesas es de 0,65 m, y estas se han definido en el eje vertical y eje lateral como un conjunto de muelle-masa-muelle, representando la rigidez del balasto, la masa de la traviesa y la rigidez del pad. El carril es un perfil 54E1 y está representado mediante elementos sólidos en la parte central en la que habrá contacto y el resto se representa mediante elementos viga (Figura 2), para reducir el tiempo de cálculo; pues los resultados en frecuencia no cambian significativamente.

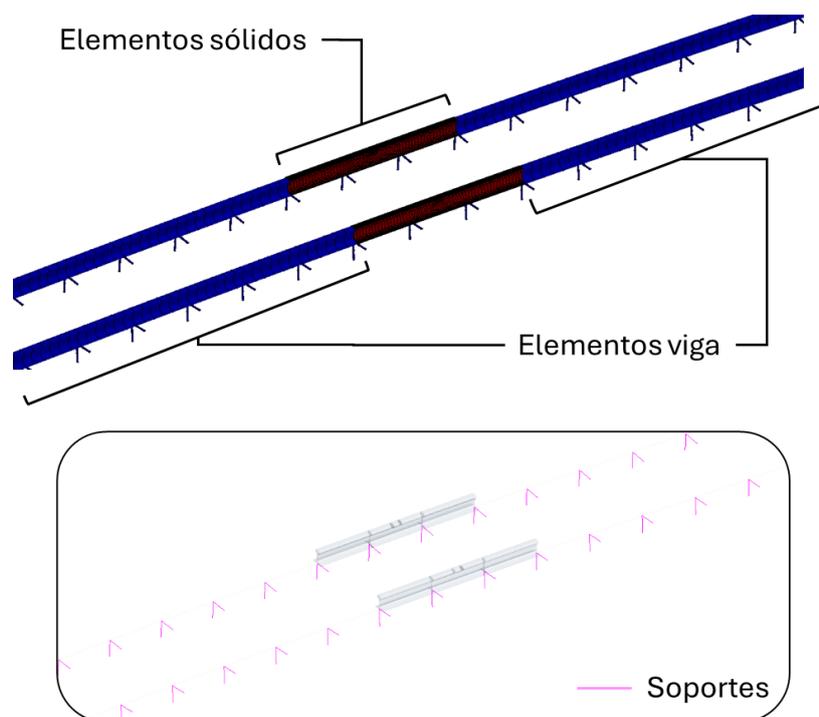


Figura 2: Modelo de vía.

Los valores de rigidez y masas han sido ajustados para lograr una respuesta en frecuencia del modelo de elementos finitos similar a la receptancia experimental de [13]. La comparativa de las receptancias se presenta en la Figura 3. Como se puede observar el ajuste permite la representación de las principales frecuencias presentes por debajo de los 1200 Hz en vertical y 800 Hz en lateral, que corresponde con el rango de frecuencias de interés para este estudio. Los valores de los parámetros definidos en la vía se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de los parámetros de los soportes.

	Rigidez pad (N/m)	Masa traviesa (kg)	Rigidez balasto (N/m)
Vertical	68×10^7	90	68×10^6
Lateral	28×10^6	60	20×10^6

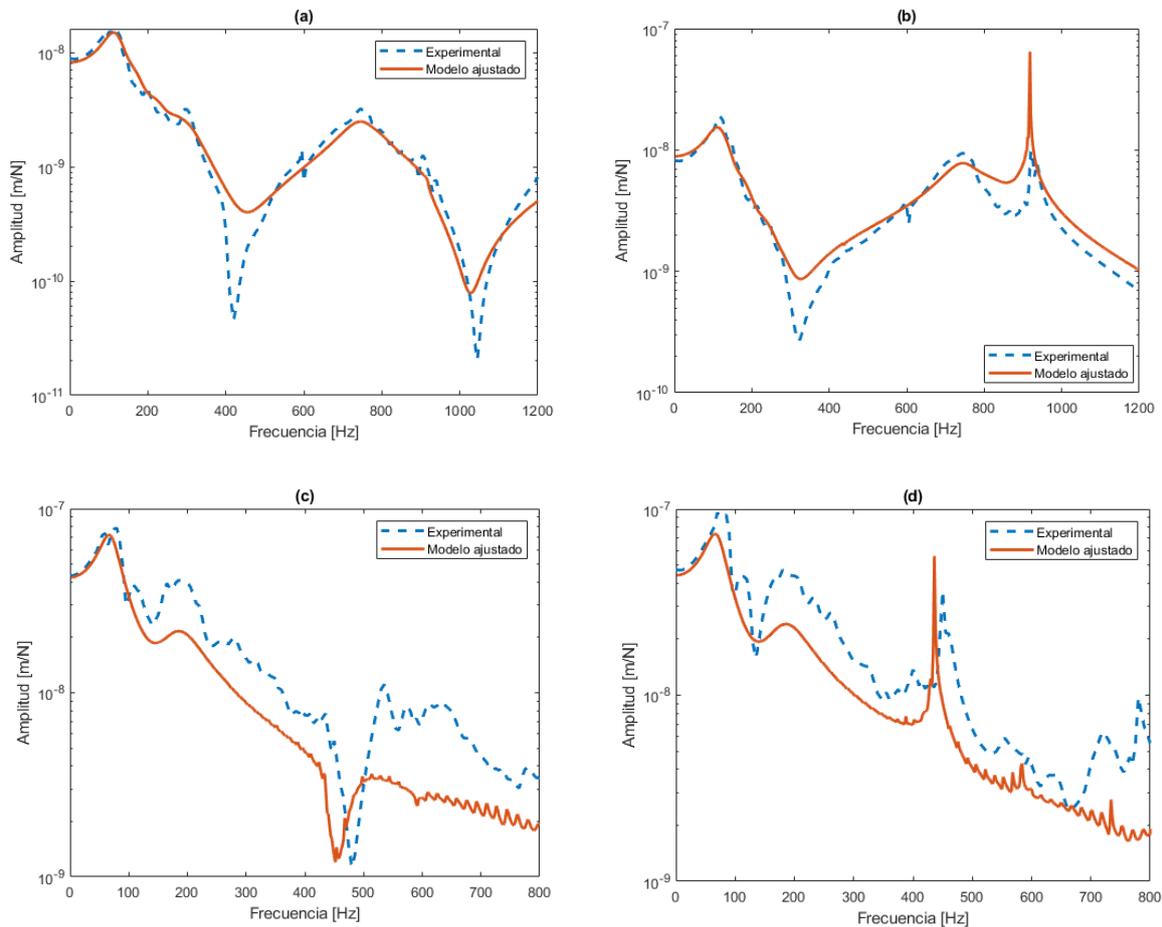


Figura 3: Receptancias de la vía. (a) vertical sobre traviesa, (b) vertical en mitad de vano, (c) lateral sobre traviesa, (d) lateral en mitad de vano.

En el ajuste se ha priorizado la representación de las frecuencias por debajo de 500 Hz y por eso es posible observar que las dos primeras resonancias y la primera antirresonancia coinciden en frecuencia, a pesar de obtener diferencias en alguna amplitud. En cuanto a la resonancia pinned-pinned, se ha ajustado el valor de la frecuencia y la amplitud en la dirección lateral, por ser frecuencias más bajas, y en consecuencia en vertical difieren algo más. No se considera importante estas diferencias al tratarse de frecuencias altas y no ser de interés en este caso de estudio.

2.2. Modelo de eje montado

El modelo de eje montado pertenece a un eje remolque de la serie 900 de Euskotren. Este eje consta de ruedas de radio 0,42 m y una separación entre ellas de 0,929 m entre caras internas. La caja de grasa y el disco de freno se definen como masas puntuales distribuidas de forma homogénea en la superficie, de 37 kg y 129,5 kg respectivamente, tal y como se observan en la Figura 4.

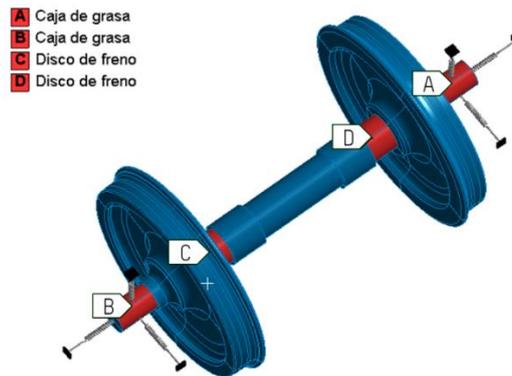


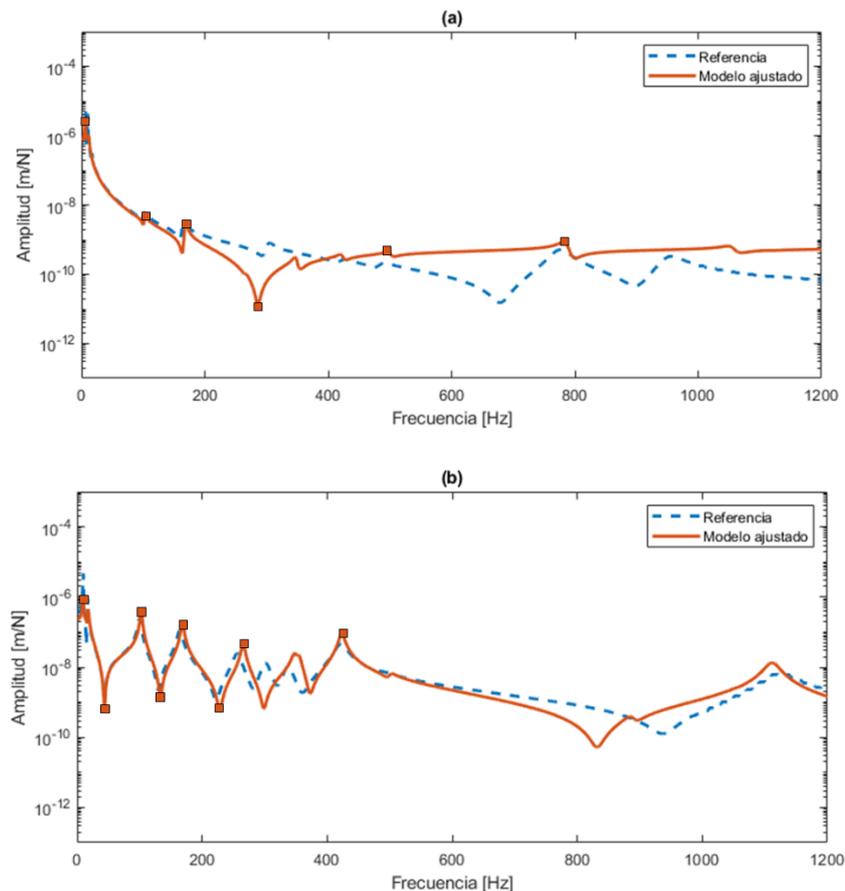
Figura 4: Modelo de eje montado.

La suspensión primaria se modela mediante elementos tipo resorte; definiendo la rigidez en las tres direcciones. Las rigideces de la suspensión primaria se definen con los valores correspondientes a 4 viajeros por metro cuadrado, ver Tabla 2.

Tabla 2: Rigideces de la suspensión primaria.

	Rigidez (N/m)
Vertical	$1,063 \times 10^6$
Lateral	$6,13 \times 10^6$
Longitudinal	$6,13 \times 10^6$

El modelo se ha ajustado mediante la comparación de un análisis modal y la respuesta en frecuencia con resultados numéricos de un eje real. El análisis modal muestra que los primeros modos hasta 1500 Hz coinciden y el error en sus frecuencias no supera el 12%. Para el cálculo de las receptancias se define la fuerza en una sola rueda y en la banda de rodadura. La fuerza de las tres direcciones ha sido aplicada en este mismo punto. Se realiza el barrido de frecuencias hasta los 1500 Hz. El cálculo incluye un amortiguamiento estructural de 0,02 para ajustar las receptancias del eje montado. El ajuste de receptancias se muestra en la Figura 5.



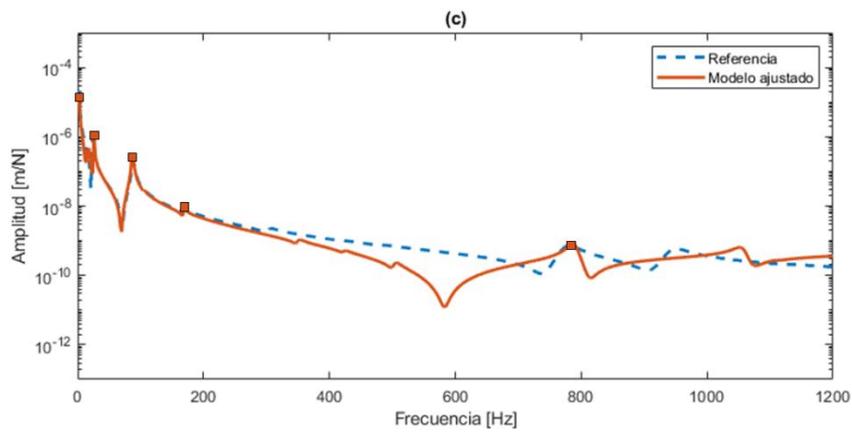


Figura 5: Receptancias del eje montado. (a) Dirección vertical, (b) Dirección lateral, (c) Dirección longitudinal.

2.3. Método de cálculo

El esquema del proceso de cálculo llevado a cabo en este artículo se presenta en la Figura 6. Como se ha mencionado anteriormente la posición de los puntos de contacto y las fuerzas de contacto en los mismos son calculadas con anterioridad en SIDIVE. De este primer cálculo se obtiene la posición de inscripción en curva de los distintos ejes del tren. Los modelos de vía y eje montado descritos en los apartados anteriores se unen entre sí mediante contacto con fricción entre las ruedas y los carriles. El cálculo mediante elementos finitos en el software de ANSYS se divide en dos partes. Una primera parte de análisis estático, en la que se precarga el sistema. Para la precarga se posiciona el eje con respecto a la vía, teniendo en cuenta el ángulo de ataque y la posición de los puntos de contacto obtenidos en el programa SIDIVE, y se aplica un giro de avance en las ruedas, definiendo el contacto en deslizamiento. Una vez posicionado el contacto del eje y precargado mediante el giro, se lleva a cabo el cálculo modal.

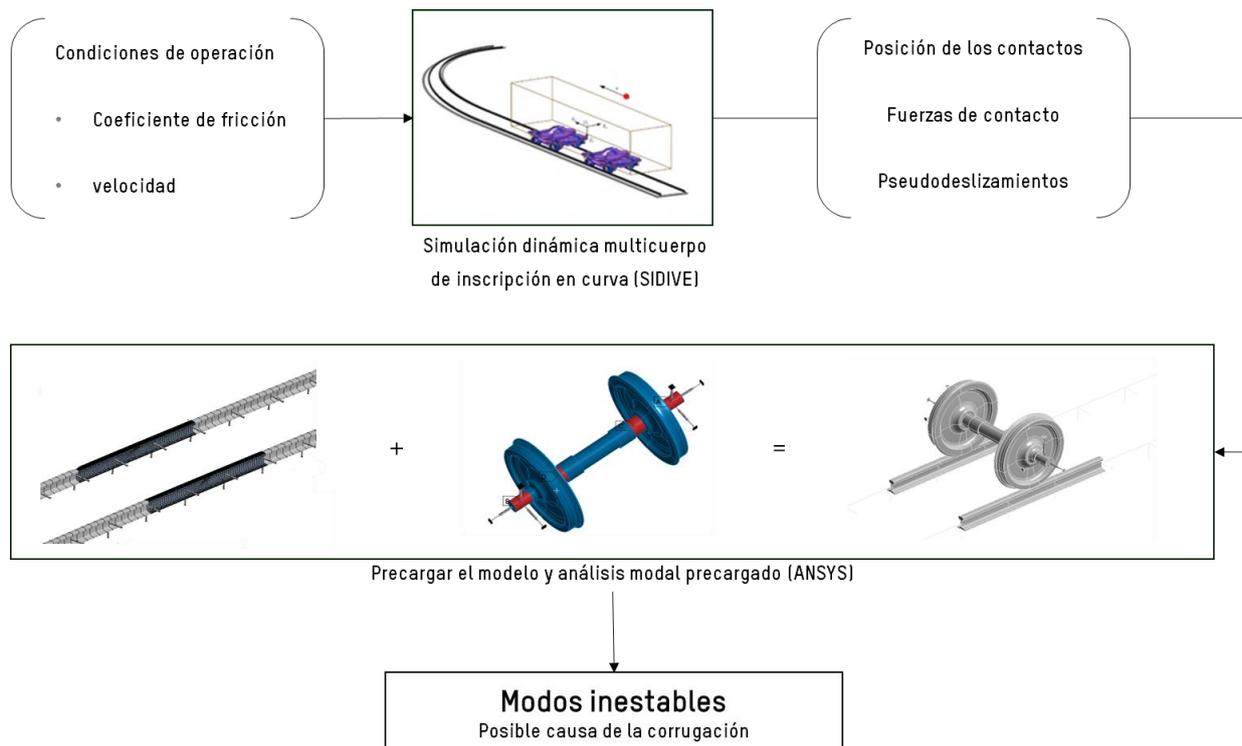


Figura 6: Esquema del proceso de cálculo.

El análisis modal permite realizar un análisis de estabilidad de los modos en condiciones de contacto. La matriz de rigideces es asimétrica debido al contacto con fricción. Para los casos con matrices de masa y/o rigideces asimétricas es necesario un tipo de método de resolución asimétrico.

El método utilizado para resolver el problema de los valores propios asimétricos es un enfoque basado en un método denominado método de la derivada en frecuencia. El método, utiliza un conjunto ortogonal de secuencias de vectores Krylov. En este trabajo, la matriz de amortiguamiento no ha sido tenida en cuenta. Sin

amortiguamiento, la inestabilidad debido a acoplamiento modal puede apreciarse con mayor claridad. La expresión general utilizada para la generación de secuencias de vectores es la siguiente:

$$([\mathbf{K}] - s[\mathbf{M}])\{q_{j+1}\} = \{\tilde{q}_j\} \quad (1)$$

Esta ecuación matricial se resuelve mediante un método de resolución de matrices dispersas. En esta expresión, s corresponde a un valor inicial de cambio, que permite obtener una solución con mayor precisión, robustez y eficiencia en los algoritmos. El subespacio formado por las derivadas en frecuencia permite al programa encontrar las soluciones de valores propios más cercanas a partir de este punto de cambio. Para un gran número de valores propios, el algoritmo de extracción asimétrico es capaz de pasar automáticamente a un nuevo cambio si la primera solución sólo encuentra un subconjunto de valores propios. Este proceso se repetirá hasta que se encuentren todos los valores propios necesarios.

Con este método las soluciones pueden ser reales o complejas. En este caso, dadas las características del problema se espera obtener soluciones complejas. Los valores propios $\bar{\lambda}_i$ son definidos como:

$$\bar{\lambda}_i = \sigma_i \pm j\omega_i \quad (2)$$

Donde,

$\bar{\lambda}_i$ = autovalor complejo

σ_i = parte real del autovalor (valor de estabilidad)

ω_i = parte imaginaria del autovalor (frecuencia amortiguada)

$j = \sqrt{-1}$

Los valores propios con parte real positiva serán los que se determinan como modos inestables, pues es el parámetro que define la estabilidad y son autovalores con un amortiguamiento negativo. Los modos con mayor valor de parte real serán más propensos a excitarse y serán el mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación.

3. Resultados

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones definidas en el apartado anterior para distintos casos de inscripción en curva del eje montado delantero del tren de la serie 900 de Euskotren sobre una curva como la de [13].

3.1. Efecto del coeficiente de fricción

Se han llevado a cabo distintas simulaciones dinámicas multicuerpo variando el coeficiente de fricción, para distintas condiciones de contacto entre la rueda y el carril que puedan derivar en inestabilidad, y por tanto desarrollar corrugación. Las simulaciones se han realizado a una velocidad de 51 km/h y cuatro valores de coeficiente de fricción, desde un valor de 0,3 hasta un valor de 0,6. Los cálculos dinámicos muestran, que independientemente del coeficiente de fricción, la rueda exterior a la curva contacta en la pestaña, mientras que la rueda interior tiene el contacto en la banda de rodadura. Sin embargo, las fuerzas en el contacto se modifican en los distintos casos de coeficiente de fricción. En la Tabla 3 se muestra un resumen de las fuerzas del contacto en la rueda interior y en la rueda exterior en los distintos casos calculados.

Tabla 3: Fuerzas de contacto en rueda exterior e interior en los distintos casos analizados.

Coefficiente de fricción	Fuerza lateral exterior en la rueda (kN)	Fuerza vertical exterior en la rueda (kN)	Fuerza vertical interior en la rueda (kN)	Fuerza lateral interior en la rueda (kN)
0,3	17,0	49,2	26,6	8,2
0,4	17,0	42,2	26,0	9,8
0,5	17,3	41,4	26,1	11,3
0,6	18,4	41,2	26,2	12,9

Los resultados de inestabilidad se muestran en la Figura 7. Los puntos en la figura representan la parte real para cada frecuencia en cada caso de coeficiente de fricción. Con un valor del coeficiente de fricción del 0,3 en las condiciones de circulación definidas el sistema no presenta modos inestables en el eje montado delantero. Sin embargo, tal como se puede observar en la Figura 7, a medida que el valor de coeficiente de fricción aumenta empiezan a aparecer modos inestables, llegando a obtener hasta tres modos inestables en el caso de un valor del coeficiente de fricción de 0,6. El primer modo se caracteriza fundamentalmente por un desplazamiento transversal del carril, mientras que en el siguiente se aprecia el movimiento vertical del sistema rueda-carril en el interior de

la curva y la rotación de la rueda interior, tal y como se puede observar en la Figura 8. En el caso del coeficiente de fricción de 0,5 se observan dos modos inestables. Estos modos aumentan el valor de la parte real al aumentar el coeficiente de fricción. En el caso del coeficiente de fricción de 0,4, se presenta un solo modo inestable.

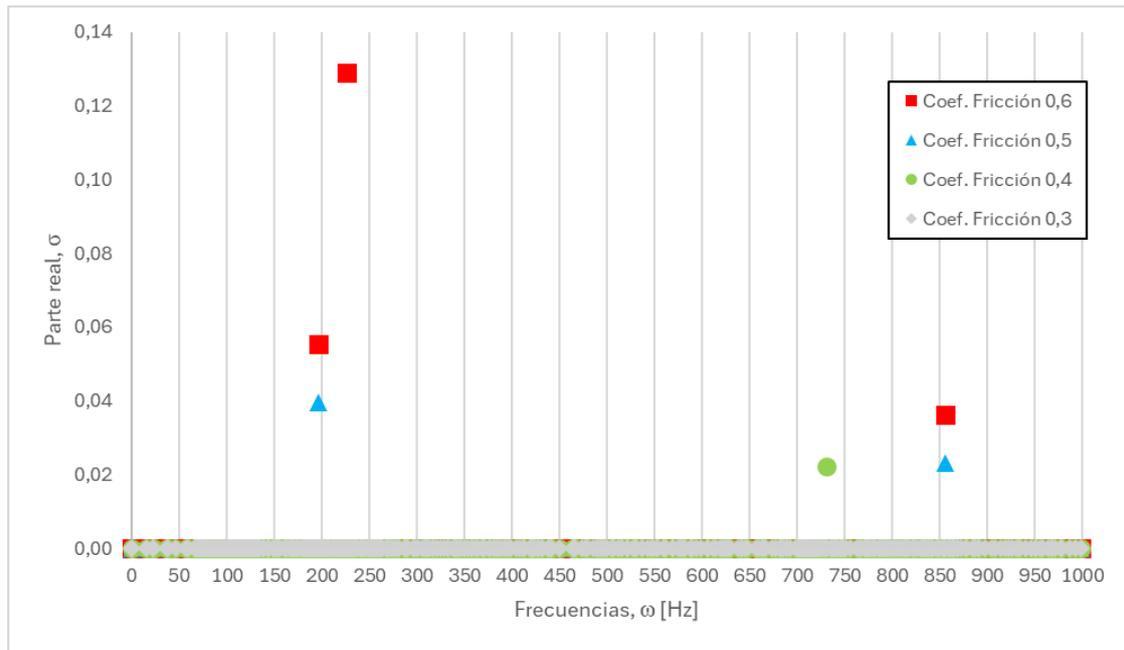


Figura 7: Inestabilidad de los modos en distintas condiciones de coeficiente de fricción.

En la Tabla 4 se presentan los modos inestables obtenidos en el caso de valor del coeficiente de fricción de 0,6. Tal y como se puede observar, el modo más propenso a la excitación, es decir, el modo con un valor de parte real mayor corresponde a una frecuencia de 225,89 Hz. A la velocidad de operación del caso de estudio, la excitación de este modo correspondería a una longitud de onda de corrugación de 60 mm. En la forma modal (Figura 8), es posible apreciar que el movimiento lateral relativo entre la rueda y el carril es en la parte interior de la curva, que es dónde suele aparecer la corrugación tal y como se puede observar en literatura.

Tabla 4: Modos inestables con coeficiente de fricción 0,6.

Modo	Frecuencia, ω (Hz)	Parte real, σ
432	196,5	$5,54 \times 10^{-2}$
483	225,8	0,129
931	855,4	$3,63 \times 10^{-2}$

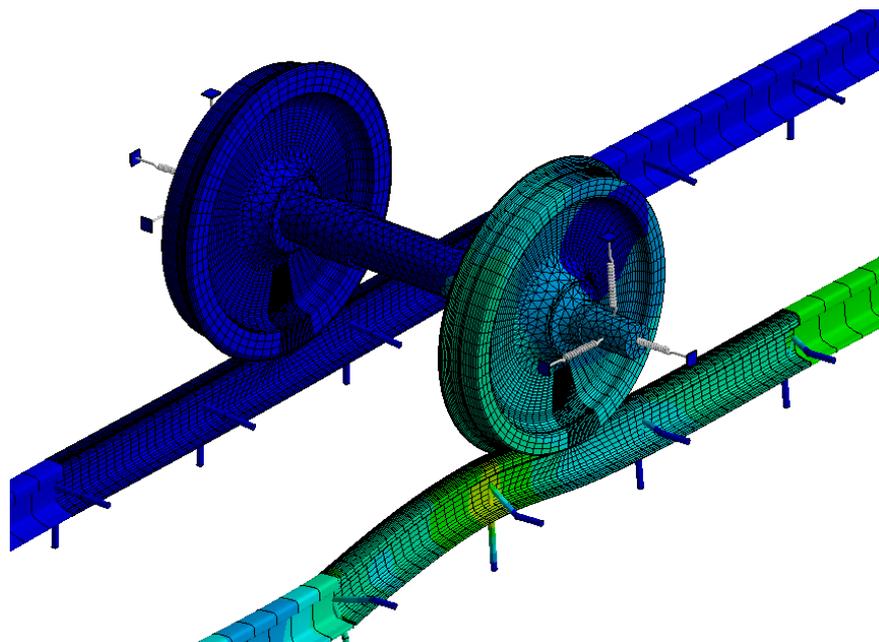


Figura 8: Modo inestable a 225,89 Hz en el caso con valor de un coeficiente de fricción de 0,6.

3.2. Efecto de la velocidad de operación

Una vez observado que el caso con coeficiente de fricción 0,6 presenta varios modos inestables, se han analizado distintos casos de velocidad de operación. Las simulaciones dinámicas muestran que la posición del contacto en la rueda exterior es en la pestaña y en la rueda interior es en la banda de rodadura a las tres velocidades de operación analizadas; 51 km/h, 53,6 km/h y 56 km/h. Estas son las velocidades a las que opera el vehículo de la serie 900 de Euskotren en la curva analizada. Sin embargo, los esfuerzos varían. En la Tabla 5 se presenta un resumen de las fuerzas de contacto en la rueda exterior e interior para las distintas velocidades de operación.

Tabla 5: Fuerzas de contacto en rueda exterior e interior a distintas velocidades de operación.

Velocidad de operación (km/h)	Fuerza lateral exterior en la rueda (kN)	Fuerza vertical exterior en la rueda (kN)	Fuerza vertical interior en la rueda (kN)	Fuerza lateral interior en la rueda (kN)
51	18,4	41,2	26,2	12,9
53,6	18,4	42,7	24,8	12
56	18,5	44,1	23,6	11,2

Los resultados del estudio de estabilidad se recogen en la Figura 9. Se puede observar que independientemente de la velocidad de operación aparecen modos inestables similares en las cuatro velocidades analizadas. En este caso, la variación en las fuerzas de contacto que supone la variación de velocidad no es suficiente para la eliminación de modos inestables. Se puede apreciar que, para todas las velocidades analizadas, los modos inestables más propensos a la excitación se producen alrededor de 200 Hz y el valor de la parte real aumenta con el aumento de la velocidad. En este caso, con la variación de velocidades analizada, la disminución de la velocidad podría favorecer la desaparición de este modo inestable.

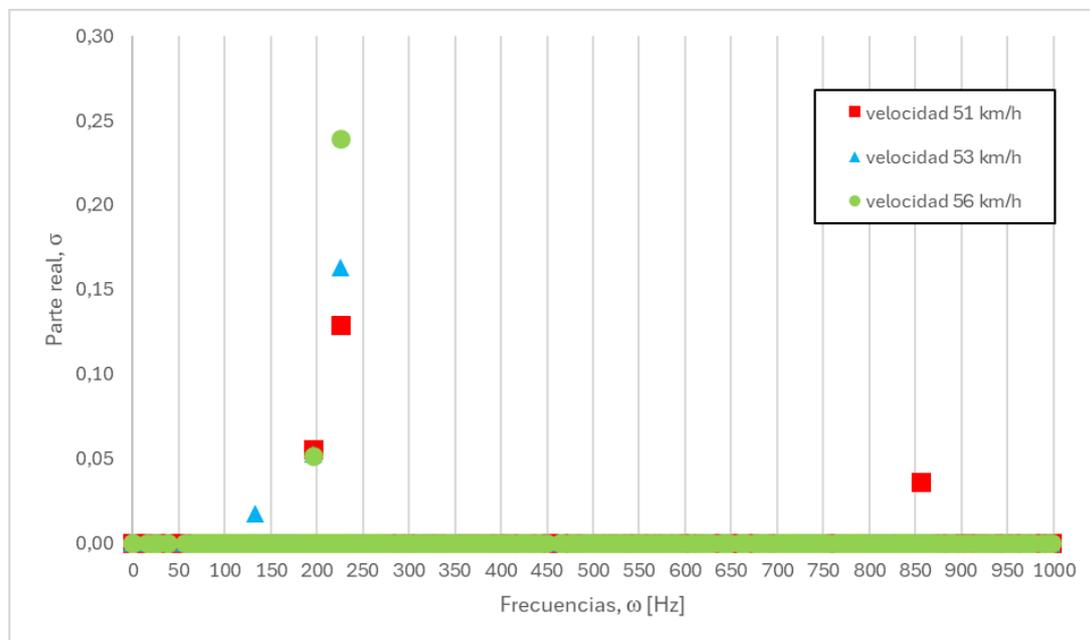


Figura 9: Inestabilidad de los modos en distintas condiciones de operación y coeficiente de fricción 0,6.

4. Conclusiones

En este artículo, se presenta un modelo del eje remolque de la serie 900 de Euskotren sobre la vía en curva en el que se estudia el acoplamiento modal a distintos coeficientes de fricción y distintas velocidades de operación. El análisis de estabilidad permite detectar los modos inestables del sistema para los distintos casos de contacto en el sistema rueda-carril. La excitación de estos modos inestables supone la generación de corrugación a las frecuencias de estos modos. Este análisis se realiza mediante un modelo de elementos finitos en ANSYS en el que se precarga el sistema en las condiciones de inscripción en curva que se obtienen mediante SIDIVE.

Los resultados de este estudio muestran que el coeficiente de fricción tiene un efecto importante en la aparición de modos inestables. Los modos inestables a frecuencias de interés aparecen a partir de valores del coeficiente de fricción de 0,5 y se observa que, en este caso, esta inestabilidad aumenta con el valor del coeficiente de fricción. Estos resultados muestran que el control de la fricción podría ser beneficioso para reducir la aparición de modos inestables. La forma modal del primer modo inestable corresponde con un movimiento lateral relativo entre la rueda y el carril interior a la curva, a una frecuencia cercana a los 200 Hz que, en caso de excitarse, definiría una longitud de onda de corrugación de 60 mm.

En cuanto a la velocidad de operación, los resultados de este estudio muestran que, a mayor velocidad, mayor es el valor de la inestabilidad de los modos inestables. Si el tren circula en el rango de velocidades estudiadas tiende a tener un modo inestable cercano a los 200 Hz cuando el coeficiente de fricción es de 0,6.

5. Referencias

- [1] CORRUGATION.EU - HOME. (n.d.).
- [2] Grassie, S. L. "Rail corrugation: Characteristics, causes, and treatments." "Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit", 223(6), 581–596. 2009. <https://doi.org/10.1243/09544097JRRT264>
- [3] Correa, N., Vadillo, E. G., Santamaria, J., & Herreros, J. "A versatile method in the space domain to study short-wave rail undulatory wear caused by rail surface defects." *Wear*, 352–353, 196–208. 2016. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2016.02.012>
- [4] Martínez-Casas, J., Giner-Navarro, J., Baeza, L., & Denia, F. D. (2017). Improved railway wheelset–track interaction model in the high-frequency domain. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 309, 642–653. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.034>
- [5] Jin, X. S., Wen, Z. F., & Wang, K. Y. (2005). Effect of track irregularities on initiation and evolution of rail corrugation. *Journal of Sound and Vibration*, 285(1–2), 121–148. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.042>
- [6] Jin, X. S., & Wen, Z. F. (2008). Effect of discrete track support by sleepers on rail corrugation at a curved track. *Journal of Sound and Vibration*, 315(1–2), 279–300. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.057>
- [7] Wang, Z., & Lei, Z. (2023). Trend analysis of rail corrugation on the metro based on wheel–rail stick-slip characteristics. *Vehicle System Dynamics*, 1–30. <https://doi.org/10.1080/00423114.2023.2169620>
- [8] Sun, Y. Q., & Simson, S. (2008). Wagon-track modelling and parametric study on rail corrugation initiation due to wheel stick-slip process on curved track. *Wear*, 265(9–10), 1193–1201. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2008.02.043>
- [9] Kurzeck, B. (2011). Combined friction induced oscillations of wheelset and track during the curving of metros and their influence on corrugation. *Wear*, 271(1–2), 299–310. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2010.10.049>
- [10] Cui, X. L., Chen, G. X., Yang, H. G., Zhang, Q., Ouyang, H., & Zhu, M. H. (2015). Effect of the wheel/rail contact angle and the direction of the saturated creep force on rail corrugation. *Wear*, 330–331, 554–562. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2014.12.046>
- [11] Giménez, J. G., Martín, L. M., & Sobejano, H. (1993). DYNAMIC VEHICLE SIMULATION "SIDIVE PROGRAM." *Vehicle System Dynamics*, 22(sup1), 116–121. <https://doi.org/10.1080/00423119308969482>
- [12] Chen, G. X., Zhou, Z. R., Ouyang, H., Jin, X. S., Zhu, M. H., & Liu, Q. Y. (2010). A finite element study on rail corrugation based on saturated creep force-induced self-excited vibration of a wheelset-track system. *Journal of Sound and Vibration*, 329(22), 4643–4655. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.05.011>
- [13] Robles, R., Correa, N., Vadillo, E. G., & Blanco-Lorenzo, J. (2023). Comprehensive efficient vertical and lateral track dynamic model to study the evolution of rail corrugation in sharp curves. *Journal of Sound and Vibration*, 545. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117448>