



Comparación de métodos de fatiga multiaxial de ciclos altos

P. Apodaka¹, M. Abasolo², E. Tabares³, X. Orue¹, L. Pallares⁴

¹ Unidad de Ingeniería Mecánica, Fundación Tekniker, pedro.apodaka@tekniker.es, xabat.orue@tekniker.es

² Departamento de Ingeniería Mecánica (EIB/BIE), Universidad del País Vasco (UPV/EHU), mikel.abasolo@ehu.eus

³ Unidad de Tribología y Materiales, Fundación Tekniker, eduardo.tabares@tekniker.es

⁴ Departamento de Tecnología, I.E.S. María Telo (educantabria), luispallares.bilbao@gmail.com

La mayoría de componentes de máquina están sometidos a cargas variables y con ello son susceptibles de fallo a fatiga, siendo el caso más general el de fatiga multiaxial. La mayoría de estos elementos trabajan en régimen predominantemente elástico, y por tanto en ciclos altos. Actualmente no existe ningún método de fatiga multiaxial para ciclos altos que prevalezca claramente sobre los demás, así es que existen numerosos métodos y cada año surgen nuevos, que proporcionan mejores o peores resultados según el material o caso de carga estudiado. En este sentido, recientemente se ha publicado el método de plano crítico de Abasolo, una evolución del reconocido método de Findley que considera el efecto no lineal de la tensión normal media elevando dicho termino a un exponente dependiente del material. En dicho trabajo previo se llevó a cabo una comparación de los métodos de plano crítico de Abasolo, Findley, Robert y Papuga frente a una extensa database experimental recopilada de literatura, con un total de 518 resultados para una amplia variedad de metales y combinaciones de carga. En esa comparativa el método de Abasolo daba buenos resultados generales, destacando especialmente en los casos uniaxial y de torsión puros, dos casos particulares de fatiga multiaxial ampliamente presentes en los componentes y sistemas estructurales mecánicos. Sin embargo, dada la gran cantidad de métodos que, como se ha comentado, existen en la actualidad, el presente trabajo extiende dicha comparativa a una selección más amplia de métodos, contrastando así su desempeño con respecto al resto de métodos de vanguardia.

1. Introducción

Tal y como se indica en la mayoría de libros que estudian el fallo por fatiga, se estima que este mecanismo de fallo es responsable de alrededor del 90 % de fallos estructurales en servicio [1]. Si bien existen multitud de sistemas estructurales y componentes de máquina que están sometidos a estados tensionales uniaxiales, y por tanto se estudian como fatiga uniaxial, en el caso más general el estado tensional será multiaxial, y por tanto habrá que analizarlo mediante métodos de fatiga multiaxial.

Si bien se ha invertido un esfuerzo ingente en las últimas décadas, no existe aún un método de fatiga multiaxial que sea indiscutiblemente superior al resto para cualquier material y/o estado tensional. Más allá del estudio simplista y poco riguroso de tratar el estado tensional multiaxial como si se tratase de uno uniaxial mediante la tensión equivalente de Von Mises (para material dúctil), ya en la década de 1930 se desarrollaron métodos de fatiga específicos para estados multiaxiales muy particulares, como pueden ser los métodos de Hohenemser y Prager (1933) [2] para el estado de tensión normal constante y torsión alterna, o Gaugh y Pollard (1935) [3] para el caso de flexión y torsión alterna. Entre los métodos generalistas destacan los denominados métodos de enfoque global (también llamados métodos de invariantes de tensiones) y los más avanzados métodos de plano crítico. Los métodos de enfoque global cuantifican el daño a través de invariantes del tensor de tensiones, y por tanto estudian la fatiga a nivel de punto. Los primeros métodos de enfoque global que se desarrollaron son Marin (1956) [4], Crossland (1956) [5] y Sines (1959) [6], siendo estos dos últimos los más conocidos. Por último, los métodos de plano crítico estudian las tensiones a nivel de plano, definiendo la función de daño como combinación de las tensiones normales y tangenciales a dicho plano, lo cual permite considerar el efecto de la variación de las direcciones principales a costa de un mayor coste computacional. El concepto de plano crítico para el análisis a fatiga fue planteado inicialmente por Stulen y Cummings (1954) [7] y, en base a ello, posteriormente, otros autores como Findley (1956) [8] desarrollaron sus métodos. Como se ha comentado, cada año surgen nuevos métodos de ambos tipos, sin que actualmente se haya encontrado uno que sea indiscutiblemente superior al resto independientemente del material o estado tensional analizado. En esta línea, recientemente se ha publicado el método de Abasolo [9], una evolución del método de Findley [8], en la que se considera el efecto no lineal de la tensión normal media elevando dicho término a un exponente dependiente del material, concretamente, ajustado a partir de su tensión de rotura (σ_{ur}). De la comparativa que se ofrece con respecto los criterios de Findley, Robert y Papuga PCr, se demuestra un comportamiento general apropiado, destacando en los casos uniaxial y de torsión puros, así como en la tendencia conservadora del método [9].

Esta gran variedad de métodos de fatiga multiaxial disponibles en la literatura provoca que el diseñador no sabe a priori qué método es el más idóneo para su caso (material y estado tensional) específico, a no ser que se lleve a cabo una extensa, larga y costosa campaña de ensayos experimentales que raramente estará justificada excepto en aplicaciones de responsabilidad. Es por ello que estudios como el que se desarrolla en este trabajo, donde se contrasta y compara el desempeño de cada método frente a una extensa database experimental que abarca una gran variedad de metales y estados tensionales, resultan de gran interés al arrojar luz sobre el rendimiento general, fortalezas y debilidades de cada método. Así, en este trabajo se aumenta la comparativa hecha en [9] a un total de 20 métodos de fatiga multiaxial (8 de enfoque global y 12 de plano crítico, incluido el método de Abasolo) comparando su aplicabilidad para una versión extendida de la base de datos de Papuga [10]. En ella, además de comparar la capacidad de ajuste de cada método al cómputo total de ensayos recogidos en la base de datos, se estudian seis casos particulares adicionales (uniaxial puro, uniaxial puro con tensión media elevada, tensión media nula, tensión media no nula, tensión media elevada y torsión pura) con el fin de identificar el mejor método de ajuste para cada caso. De esta forma, en base a estos resultados el diseñador sabrá, atendiendo al tipo de material y estado tensional de su componente, cuál o cuáles serán a priori los métodos más idóneos para su caso particular.

2. Datos experimentales

Según se ha comentado previamente, los métodos objeto de evaluación se aplican a una versión extendida de la base de datos presentada por Papuga [10]. Así pues, los 432 ensayos recopilados por Papuga se complementan con 86 nuevos ensayos, dando lugar a la base de datos extendida descrita en [9] y que cuenta con un total de 518 ensayos. Entre ellos se pueden distinguir 48 materiales, tales como aceros de diferente composición, fundiciones, la aleación de titanio de grado 5 o aleaciones de aluminio ensayados en diferentes casos de carga biaxial, incluyendo ensayos en donde la componente media de la tensión normal y/o tangencial es no nula.

La base de datos incluye, además de los propios resultados de los ensayos, datos característicos del material para su uso en el ajuste de los parámetros de los métodos, como son las tensiones últimas o los límites alternos o pulsantes axial o torsionales. Sin embargo, hay referencias como GPA [3] o Ber [11] en los que no se declaran los valores de σ_0 , τ_0 o τ_{ur} ; en estos casos, sus valores han sido aproximados mediante las expresiones propuestas por SWT [12] (ec. (1)), Zenner [13] (ec. (2)) y Deutschman *et al.* [14] (ec. (3)), respectivamente, siendo:

$$\sigma_0 = \sigma_{-1} \cdot \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\tau_0 = \frac{4 \cdot \tau_{-1}}{2 \cdot \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_0} + 1} \quad (2)$$

$$\text{Aceros: } \tau_{ut} = 0.75 \cdot \sigma_{ut}$$

$$\text{Fundiciones: } \tau_{ut} = 1.30 \cdot \sigma_{ut} \quad (3)$$

$$\text{Aleaciones de aluminio: } \tau_{ut} = 0.65 \cdot \sigma_{ut}$$

3. Métodos de fatiga multiaxial evaluados

En la Tabla 1 se recogen los métodos de fatiga multiaxial que se han comparado, indicándose para cada uno de ellos la función de daño y el grupo de métodos al que pertenecen. Nótese que, además de los Métodos de Enfoque Global (MEG), en el caso de los métodos de plano crítico se distingue entre MPC-MD y MPC-MTTA en función de si se define el plano crítico como aquel en el que es máxima la propia función de daño (Máximo Daño, MD) o si éste viene dado por aquel en el que se tiene la máxima tensión tangencial alterna (Máxima Tensión Tangencial Alterna, MTTA), respectivamente. Junto con esto, cabe mencionar que la tensión tangencial alterna $\tau_{nt,a}$ se ha obtenido según [15], mediante el método de la mínima circunferencia circunscrita. Adicionalmente, tal y como se muestra en la Tabla 1, el método de Stulen-Cummings es el único MPC que no pertenece a ninguno de los subgrupos previamente mencionados y cuyo plano crítico se define según la expresión mostrada junto a la función de daño. En la Tabla 2 se muestran los parámetros de ajuste correspondientes.

Tabla 1: Métodos de fatiga multiaxial evaluados.

Método	Función de daño	Grupo
SIN [6]	$a\sqrt{J_{2,a}} + b\sigma_{H,m} < \sigma_{-1}$	MEG
CRO [5]	$a\sqrt{J_{2,a}} + b\sigma_{H,max} < \sigma_{-1}$	MEG
KK [16]	$a\sqrt{J_{2,a}} + b\sigma_{H,m} + c\sigma_{H,a} < \sigma_{-1}$	MEG
AZ [17]	$a\sqrt{J_{2,a}} + b\sqrt{J_{2,m}} + c\sigma_{H,m} + d\sigma_{H,a} < \sigma_{-1}$	MEG
VHN [18]	$k\sqrt{aJ_{2,max} + bJ_{2,mean} + c(I_{1,a} + dI_{1,m})} < \sigma_{-1}$	MEG
YAN [19]	$\sqrt{(a\sqrt{J_{2,a}})^2 + (d\sqrt{J_{2,m}})^2} + bI_{1,a} + cI_{1,m} < \sigma_{-1}$	MEG
PAL [20]	$\sqrt{(\sqrt{J_{2,a}}/a)^2 + (\sqrt{J_{2,m}}/b)^2} + \sigma_{H,max}/c < \sigma_{-1}$	MEG
KIN [21]	$\sqrt{J_{2,a}/a} + \sqrt{J_{2,m}/b} < \sigma_{-1}$	MEG
FIN [8]	$a\tau_{nt,a} + b\sigma_{max} < \sigma_{-1}$	MPC-MD
ROB [22]	$a\tau_{nt,a} + b\sigma_{nn,a} + c\sigma_{nn,m} < \sigma_{-1}$	MPC-MD
PAP [23]	$\sqrt{a\tau_{nt,a}^2 + b(\sigma_{nn,a} + c\sigma_{nn,m})} < \sigma_{-1}$	MPC-MD
ABA [9]	$(a\tau_{nt,a} + b\sigma_{nn,a} + \text{sign}(\sigma_{nn,m}) \sigma_{nn,m} ^c d) < \sigma_{-1}$	MPC-MD
MD (MD/MTTA) [24]	$a\tau_{nt,a} + b\sigma_{max} < \sigma_{-1}$	MPC-MD/MTTA
QCP [25]	$\sqrt{a\tau_{nt,a}(\tau_{nt,a} + b\tau_{nt,m}) + c\sigma_{nn,a}(\sigma_{nn,a} + d\sigma_{nn,m})} < \sigma_{-1}$	MPC-MD
SC [7]	$a\tau_{nt,a} + b\sigma_{max} < \sigma_{-1}$, $P.C. = \max(\tau_{nt,a}/(\tau_{-1} - (2/k-1)\sigma_{max}))$	MPC
DV [26]	$\max(a\tau_{nt,a}(t) + b\sigma_H(t)) < \sigma_{-1}$	MPC-MD
YOK [27]	$a\tau_{nt,a} + b\sigma_{max} < \sigma_{-1}$	MPC-MTTA
ZY [28]	$k\sqrt{\tau_{nt,a}^2 - \tau_{nt,a}\sigma_{nn,a}/(1 - \sigma_{nn,m}/\sigma_{ut}) + a(\sigma_{-1} + 2\tau_{nt,a})\sigma_{nn,a}/(1 - \sigma_{nn,m}/\sigma_{ut})} < \sigma_{-1}$	MPC-MTTA
SUS [29]	$a\tau_{nt,a} + b(\min((\sigma_{nn,a} + c\sigma_{nn,m})/\tau_{nt,a}; d)) < \sigma_{-1}$	MPC-MTTA

Tabla 2: Parámetros de ajuste de los métodos de fatiga multiaxial evaluados.

Método	Parámetros				Notas
	a	b	c	d	
SIN	k	$k(6\tau_{-1}/\sigma_0 - \sqrt{3})$	-	-	-
CRO	k	$k(3\tau_{-1}/\sigma_{-1} - \sqrt{3})$	-	-	-
KK	k	$6\sigma_{-1}/\sigma_0 - 3$	$3 - k\sqrt{3}$	-	-
AZ	k	$2\sigma_{-1}/\tau_0 - k$	$6\sigma_{-1}/\sigma_0 - 6\sigma_{-1}/(\sqrt{3}\tau_0) - 3 + k\sqrt{3}$	$3 - k\sqrt{3}$	-
VHN	0.65 0.3	0.8636 1.7272	$(\tau_{-1}^2 - \sigma_{-1}^2/3)/\sigma_{-1}$	1 k	$\sigma_{ut} < 750$ $\sigma_{ut} \geq 750$
YAN	k	$1 - k/\sqrt{3}$	$\sigma_{-1}/\sigma_{ut} - \sigma_{-1}/(\sqrt{3}\tau_{ut})$	σ_{-1}/τ_{ut}	-
PAL	τ_{-1}	$\tau_0/(2\sqrt{1-(\tau_0/2\tau_{-1})^2})$	$\sigma_{-1}/(3 - k\sqrt{3})$	-	-
KIN	$1/\sqrt{3}$	$\sigma_0/(\sqrt{3}(2\sigma_{-1} - \sigma_0))$	-	-	-
FIN	$2\sqrt{k-1}$	$2-k$	-	-	-
ROB	$2\sqrt{k-1}$	$2-k$	$2\sigma_{-1}/\sigma_0 - \sigma_0(k-1)/(2\sigma_{-1}) - 2 + k$	-	-
PAP	$0.5(k^2 + \sqrt{k^4 - k^2})$	σ_{-1}	$\tau_{-1}/(2\sigma_0)$	-	$k < \sqrt{4/3}$
	$(4k^2/(4+k^2))^2$	$8\sigma_{-1}k^2(4-k^2)/(4+k^2)^2$		-	$k \geq \sqrt{4/3}$
ABA	$2\sqrt{k-1}$	$2-k$	$\max\left(\frac{\log\left(1 - \frac{\sigma_0}{4\sigma_{-1}}(a \sin 2\theta + b(1 + \cos 2\theta))\right)}{\log\left(\frac{\sigma_0}{4\sigma_{ut}}(1 + \cos 2\theta)\right)}\right)$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ut}^c}$	$0 \leq \theta \leq \pi/2$
MD (MD/MTTA)	k	$\frac{\sigma_{-1}}{2\sigma_{ut}}$	-	-	-
QCP	k^2	τ_{-1}/σ_0	1	τ_{-1}/σ_0	-
SC	$2\sqrt{k-1}$	$2-k$	-	-	$a > 0$
DV	k	$3 - 1.5k$	-	-	-
YOK	$2\sqrt{k-1}$	$2-k$	-	-	-
ZY	k^2	-	-	-	-
SUS	k	$\sigma_{-1}(1 - 0.5k)$	$\frac{2\tau_{-1} - \sigma_0/2}{2\tau_{-1} - \sigma_{-1}}$	$\frac{\tau_{-1}}{2\tau_{-1} - \sigma_{-1}}$	

4. Resultados y discusión

Con el fin de evaluar la precisión de los métodos presentados en la sección anterior, se define la función de error relativo mostrada en (4). Se trata de una expresión análoga a la empleada por Abasolo en [9], que permite determinar la capacidad de ajuste del método con relación a σ_{-1} .

$$Error\ relativo\ (\%) = \frac{\sigma_{a,eq} - \sigma_{-1}}{\sigma_{-1}} \cdot 100 \quad (4)$$

Esta sección se divide en tres subapartados principales, correspondientes a comparativas de diferentes conjuntos de datos. En el primer caso se realiza un análisis general de la base de datos completa, de donde se obtiene una visión general de los métodos y se seleccionan aquellos cuyo error relativo se encuentra en el intervalo [-50%, 50%] y cuyo error relativo medio está contenido en [-5%, 5%]. Esta selección constituye un primer filtrado con el que, de los 20 métodos originales, se extraen los 6 que muestran unos mejores resultados globales. Tras esto, se analizan los 6 métodos seleccionados tanto para casos de carga particulares como para diferentes tipos de materiales. En el análisis según el tipo de carga se recogen los 6 casos particulares que se citan a continuación: uniaxial puro, uniaxial puro con tensión media elevada, tensión media nula, tensión media no nula, tensión media elevada y torsión pura con tensión tangencial media no nula. Por su parte, para el análisis por tipo de material, si bien los 48 materiales que se recogen en la base de datos se pueden subdividir en 4 grupos principales (aceros, fundiciones, aleaciones de aluminio y Ti-6Al-4V), el último grupo se excluirá dada la escasez de ensayos disponible (2 ensayos) [30].

4.1. Comparativa de la base de datos completa

En la Tabla 3 y Figura 1 se representan los resultados obtenidos de evaluar el conjunto de métodos, ordenados según su media, de menos conservador (McDiarmid MTTA) a más conservador (Kinasoshvili). Se puede apreciar como los únicos métodos que cumplen con los intervalos definidos al comienzo de la sección (rango de error relativo en [-50%, 50%] y error relativo medio en [-5%, 5%]) son: Abasolo, Papuga PCr, Yankin, Dang Van y QCP. Sin embargo, dada la popularidad del método de Susmel y su estrecha cercanía a los límites establecidos (sobrepasa el valor mínimo establecido por un 4.7%), se ha decidido incluirlo en las posteriores comparativas. Si bien los 6 métodos filtrados tienen un muy buen ajuste (entrando dentro de los rangos establecidos), el método que mejores resultados generales proporciona es Papuga Pcr. Esto se corrobora en las representaciones de la Figura 2, donde destaca por su distribución de error uniforme centrada en cero. Cabe destacar asimismo la baja capacidad de predicción de métodos clásicos ampliamente reconocidos como Sines, Findley y McDiarmid.

Tabla 3: Resultados de la base de datos completa.

Método	Error relativo						Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango	Media abs.		
FIN	7.6	17.1	146.9	-38.7	185.5	12.1	39.8	80.1
KIN	7.1	16.9	105.5	-39.6	145.1	11.3	43.8	82.6
SC	6.4	13.1	61.4	-35.1	96.5	10.3	40.3	85.1
ABA	3.3	9.6	43.8	-32.2	76.0	7.0	51.7	93.4
ROB	3.0	10.1	77.2	-36.4	113.6	6.9	52.3	94.6
PAL	2.0	14.4	147.9	-42.3	190.2	8.2	53.3	91.1
AZ	1.4	9.4	62.9	-36.0	98.9	5.8	61.6	95.8
KK	-0.9	11.1	62.9	-47.9	110.8	7.2	54.6	91.1
SUS	-1.0	11.0	48.8	-54.7	103.5	7.3	53.5	92.9
PAP	-1.2	7.5	42.6	-36.4	78.9	5.4	61.0	98.3
YAN	-1.3	9.5	35.4	-41.8	77.2	6.5	56.6	93.2
VHN	-2.2	11.0	33.7	-60.3	94.0	7.5	52.3	90.7
DV	-2.5	12.2	40.1	-47.9	88.1	8.9	44.4	86.8
QCP	-2.7	8.2	32.3	-38.4	70.7	6.3	54.6	96.9
SIN	-4.9	18.7	140.0	-98.3	238.2	12.7	35.9	78.8
YOK	-5.4	18.5	69.9	-95.6	165.5	13.3	33.0	76.6
ZY	-5.8	11.4	42.7	-47.9	90.6	9.1	43.4	88.4
CRO	-7.1	12.0	26.7	-71.5	98.2	9.4	46.3	85.9
MD (MD)	-8.5	14.0	27.9	-61.1	89.0	11.9	33.0	82.6
MD (MTTA)	-12.3	14.8	16.4	-66.2	82.6	14.3	26.4	76.1

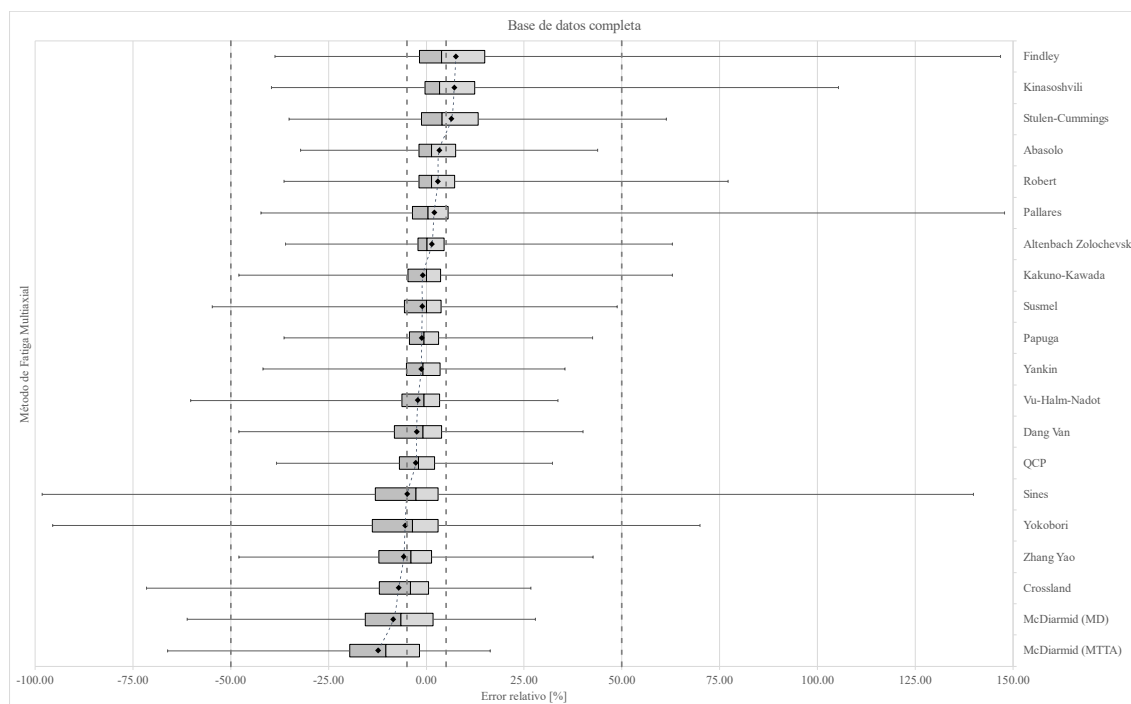


Figura 1: Representación de resultados de la base de datos completa.

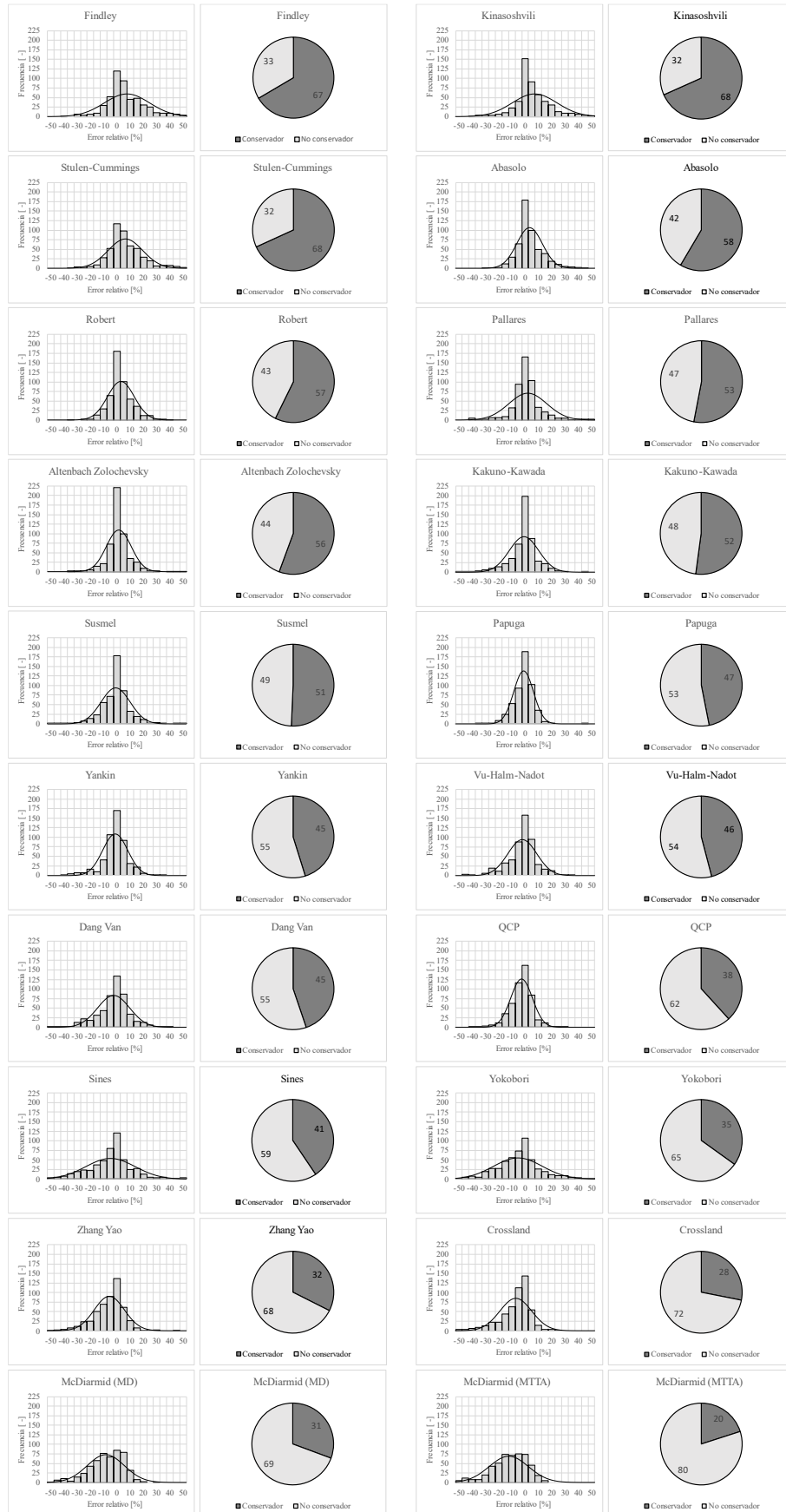


Figura 2: Distribución del error de la base de datos completa.

4.2. Comparativa en función de casos de carga particulares

Tras seleccionar los seis métodos más prometedores según su capacidad de ajuste a la base de datos completa, en este punto se analiza su aplicabilidad para seis casos de carga particulares.

4.2.1. Uniaxial puro

A la vista de los datos mostrados en la Tabla 4, Figura 3 y Figura 4, los métodos que menor error medio proporcionan para el caso uniaxial puro son Susmel y Abasolo, siendo este último el de menor rango de error. Si bien ambos métodos tienen un comportamiento conservador/no conservador equilibrado, a diferencia del resto de métodos que son no conservadores, Abasolo es el único que tiene un error medio positivo, manifestando su tendencia conservadora. Además, Abasolo es el método con menor dispersión, destacando así como el método que mejor ajusta los casos uniaxiales puros. Cabe destacar que el método de Papuga, que en el apartado anterior mostraba el mejor comportamiento global, no presenta resultados tan prometedores en este caso.

Tabla 4: Resultados del caso uniaxial puro.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	1.6	8.7	38.8	-25.9	64.7	4.6	70.3	95.5
SUS	-1.4	11.1	42.6	-33.3	75.9	6.2	66.7	91.0
PAP	-3.4	9.7	42.6	-36.4	78.9	7.5	43.2	96.4
YAN	-5.1	11.3	35.4	-33.0	68.4	9.0	44.1	85.6
DV	-2.4	11.4	40.1	-28.0	68.1	8.8	37.7	89.6
QCP	-6.1	9.5	18.1	-32.6	50.7	8.5	42.3	91.0

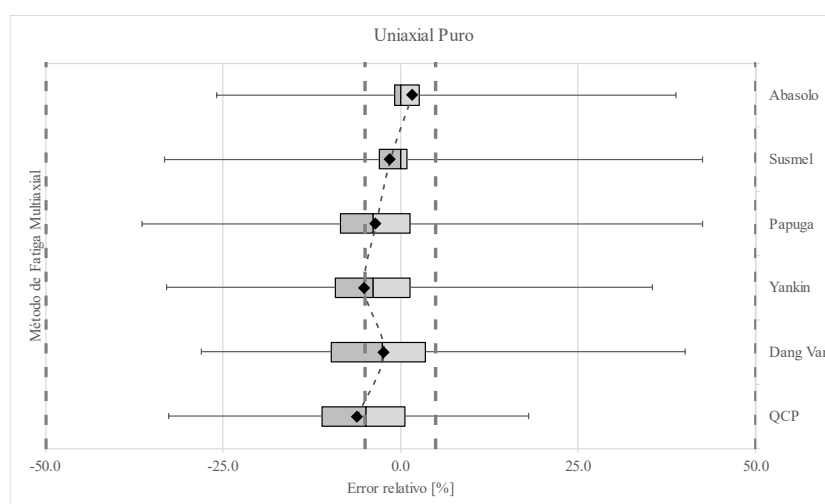


Figura 3: Representación de resultados del caso uniaxial puro.

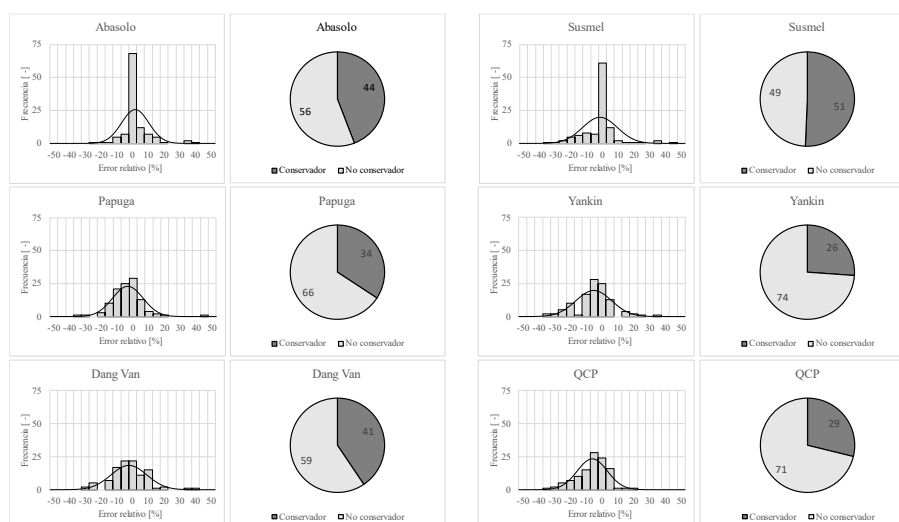


Figura 4: Distribución del error del caso uniaxial puro.

4.2.2. Uniaxial puro con tensión media elevada ($0.05 \leq R \leq 1$)

En este caso, los métodos con el error medio más cercano a cero son Susmel, Papuga PCr y Dang Van (ver Tabla 5 y Figura 5), todos ellos de carácter no conservador (valor medio negativo). Por su parte, el método de Abasolo a pesar de tener una media más alejada del valor central, es positiva, indicando así la tendencia conservadora del método, lo cual concuerda con lo reflejado en el gráfico circular de la Figura 6 (Abasolo y Susmel son los únicos métodos conservadores). Además, en la Figura 5 y Tabla 5 se aprecia que, junto con QCP, el método de Abasolo es el que menor rango de error y dispersión proporciona.

Tabla 5: Resultados del caso uniaxial puro con tensión media elevada.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	7.5	10.9	38.8	-9.7	48.5	9.0	43.2	91.9
SUS	-2.2	13.6	34.8	-33.3	68.1	9.2	54.1	81.1
PAP	-3.1	14.1	42.6	-36.4	78.9	10.9	24.3	89.2
YAN	-6.4	13.0	22.8	-33.0	55.8	10.9	37.8	78.4
DV	-1.7	16.0	40.1	-28.0	68.1	13.2	14.7	76.5
QCP	-10.9	11.4	15.1	-32.6	47.8	13.2	18.9	81.1

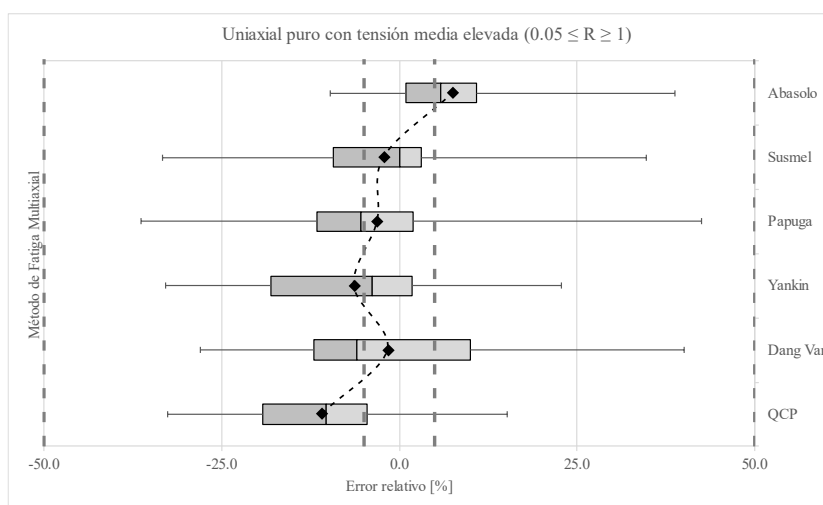


Figura 5: Representación de resultados del caso uniaxial puro con tensión media elevada.

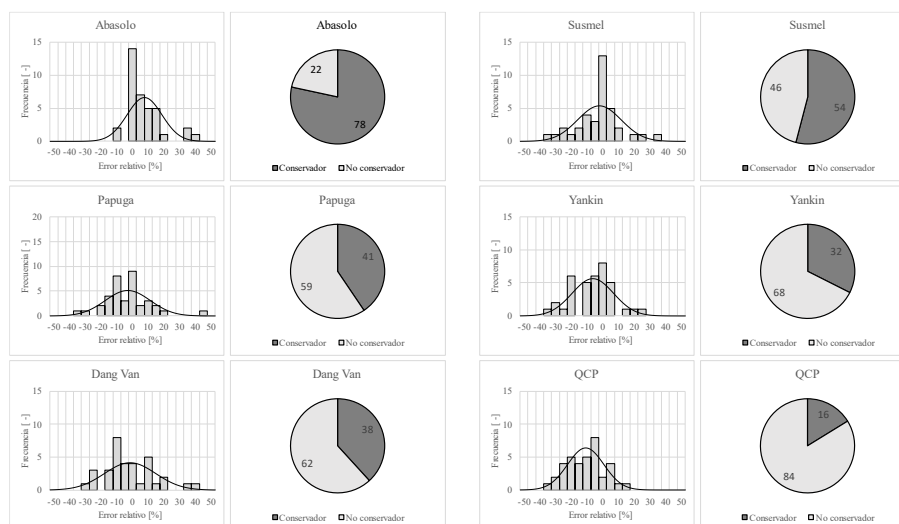


Figura 6: Distribución del error del caso uniaxial puro con tensión media elevada.

4.2.3. Tensión media nula

Para el caso en el que no hay cargas medias, el método más destacado es Papuga PCr. Si bien hay métodos como Susmel o Yankin cuyos valores medios del error se encuentran más centrados en cero (ver Tabla 6), el método de Papuga es el que menor variabilidad de datos presenta y además es conservador, tal y como se aprecia en la Figura 7 y Figura 8. En este caso Susmel es penalizado por un mayor rango de error que el resto de los métodos.

Tabla 6: Resultados del caso de tensión media nula.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	1.0	5.4	14.8	-17.8	32.6	4.2	67.6	100.0
SUS	-0.1	6.1	28.7	-20.4	49.0	4.4	69.4	98.8
PAP	0.7	3.9	10.9	-11.8	22.7	3.1	80.9	100.0
YAN	0.5	5.3	26.7	-11.2	37.9	3.8	75.1	98.8
DV	-2.1	8.7	12.5	-31.3	43.8	5.9	63.0	91.9
QCP	-1.5	4.7	15.9	-14.5	30.4	3.7	74.0	100.0

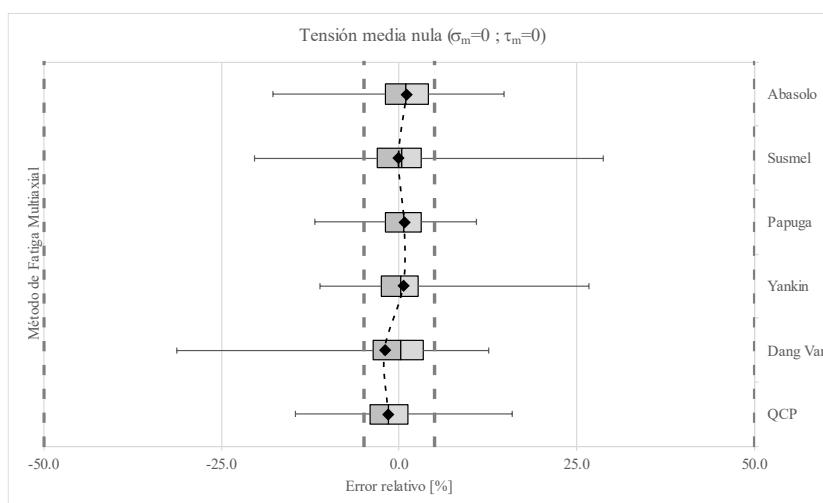


Figura 7: Representación de resultados del caso de tensión media nula.

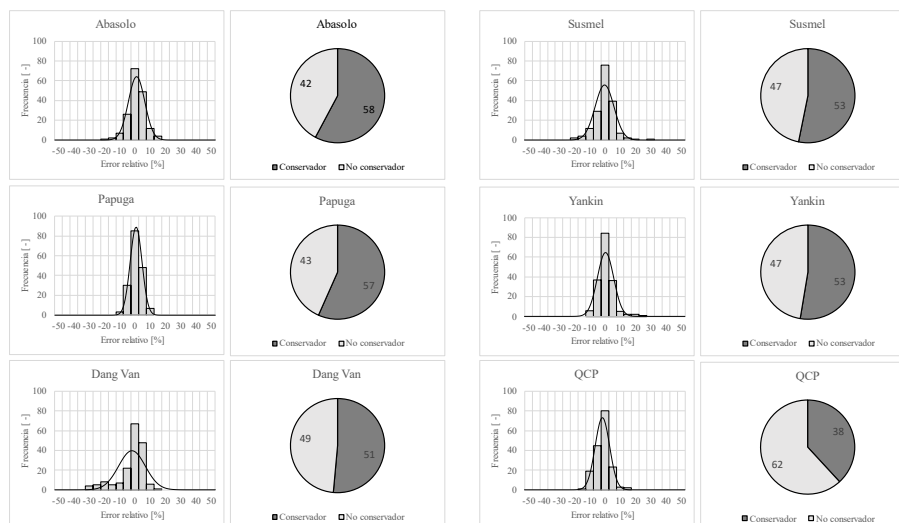


Figura 8: Distribución del error del caso de tensión media nula.

4.2.4. Tensión media no nula

Al igual que en el caso anterior, el método que mejor se ajusta al caso de tensión media no nula es Papuga PCr. Si bien el método de Susmel presenta un error medio ligeramente más cercano a cero (ver Tabla 7), en la Figura 10 se aprecia que la distribución de error del método de Papuga tiene menor dispersión y además, de acuerdo a la Figura 9, el rango de error es menor. En cuanto a la tendencia del método, a pesar de que Abasolo demuestre ser más conservador (ver Figura 10), los puntos fuertes mencionados previamente junto con su respuesta superior tanto en el intervalo ajustado como en el aceptable (según la Tabla 7), hacen de Papuga PCr el método más conveniente para una situación general con cargas de esta índole.

Tabla 7: Resultados del caso de tensión media no nula.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	4.5	11.0	43.8	-32.2	76.0	8.4	43.8	90.1
SUS	-1.5	12.8	48.8	-54.7	103.5	8.8	45.5	89.9
PAP	-2.1	8.6	42.6	-36.4	78.9	6.5	51.0	97.4
YAN	-2.2	10.9	35.4	-41.8	77.2	7.9	47.2	90.4
DV	-2.7	13.6	40.1	-47.9	88.1	10.4	34.8	84.2
QCP	-3.3	9.4	32.3	-38.4	70.7	7.5	44.9	95.4

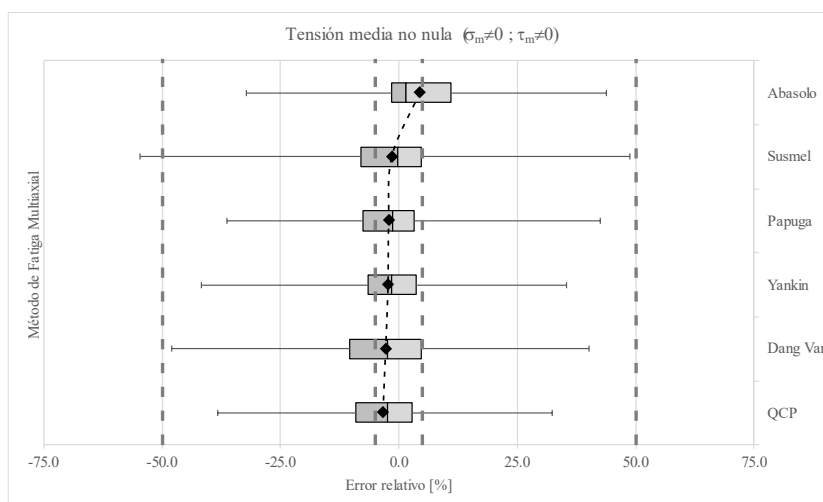


Figura 9: Representación de resultados del caso de tensión media no nula.

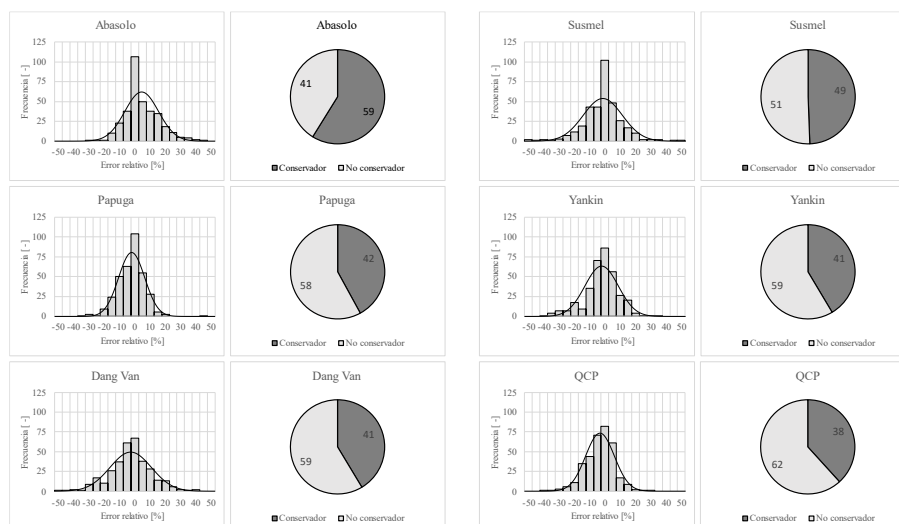


Figura 10: Distribución del error del caso de tensión media no nula.

4.2.5. Tensión media elevada ($0.05 \leq R_{VM} \leq 1$)

Se consideran ensayos de tensión media elevada aquellos que cumplen $0.05 \leq R_{VM} \leq 1$, definiéndose R_{VM} según lo establecido en el criterio de Manson y McKnight [31], donde se considera tanto el signo de la componente media del primer invariante del tensor de tensiones como los valores máximo y mínimo de la tensión de Von Mises.

$$R_{VM} = \text{signo}(\sigma_{xx,m} + \sigma_{yy,m} + \sigma_{zz,m}) \frac{\sigma_{VM,m} - \sigma_{VM,a}}{\sigma_{VM,m} + \sigma_{VM,a}} \quad (5)$$

Según se aprecia en la Figura 11 y en la Tabla 8, el método de Dang Van es el más próximo al error medio nulo, pero a su vez, el que mayor desviación muestra. Por su parte, los métodos de Yankin y Papuga PCr si bien están más alejados del error medio nulo, tienen menor dispersión, destacándose el segundo método tal y como se observa en la distribución de error de la Figura 12. A la vista de la Tabla 8, cabe mencionar también la superioridad de Papuga PCr al evaluar la cantidad de ensayos que es capaz de abarcar en los intervalos ajustado y aceptable.

Tabla 8: Resultados del caso de tensión media elevada.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	7.8	12.4	43.8	-15.7	59.5	11.1	31.8	82.7
SUS	-2.0	13.2	34.8	-54.7	89.5	9.6	38.2	89.1
PAP	-1.6	10.5	42.6	-36.4	78.9	7.9	42.7	94.5
YAN	-1.7	13.2	35.4	-35.4	70.9	10.1	38.2	84.5
DV	-0.8	13.8	40.1	-28.0	68.1	11.0	29.0	84.1
QCP	-4.7	11.3	32.3	-32.6	65.0	9.7	31.8	91.8

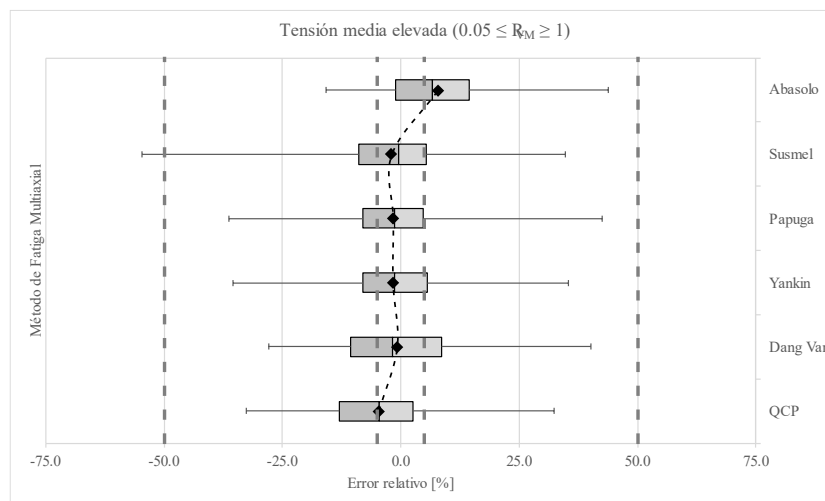


Figura 11: Representación de resultados del caso de tensión media elevada.

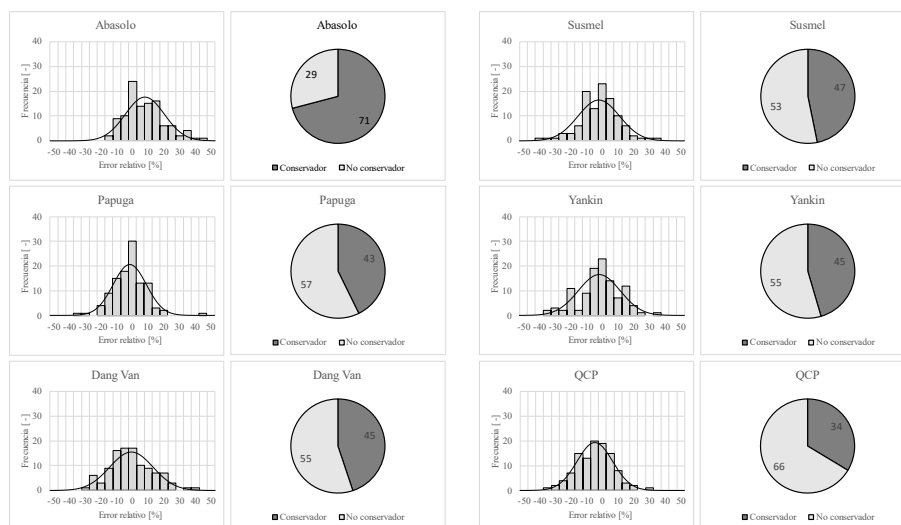


Figura 12: Distribución del error del caso de tensión media elevada.

4.2.6. Torsión pura

De acuerdo con lo mostrado en la Figura 13, los métodos más destacados para el caso de torsión pura son Abasolo y QCP. A pesar de que el primero demuestra una menor dispersión en los resultados y aproximadamente la mitad de rango de variación (ver Tabla 9), tiende a concentrar los datos en el lado negativo del eje de abscisas (zona no conservadora). Por su parte, el método QCP, además de disponer de un valor promedio que se acerca más al valor central, es conservador, lo cual queda reflejado también en el gráfico circular de la Figura 14. Finalmente, cabe mencionar que, según la Tabla 9, el método QCP se impone en el intervalo denominado como ajustado, mientras que el método Abasolo consigue concentrar todos los ensayos en el rango aceptable.

Tabla 9: Resultados del caso de torsión pura.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	-5.2	5.8	5.3	-16.5	21.8	6.0	45.5	100.0
SUS	-9.1	19.6	48.8	-47.9	96.8	16.6	24.2	66.7
PAP	-7.5	8.2	7.7	-31.3	39.0	8.1	45.5	93.9
YAN	-3.4	9.9	12.6	-41.8	54.4	6.5	57.6	93.9
DV	-14.6	13.1	1.2	-47.9	49.2	14.6	27.6	72.4
QCP	2.2	6.9	13.5	-24.4	37.9	5.4	54.5	97.0

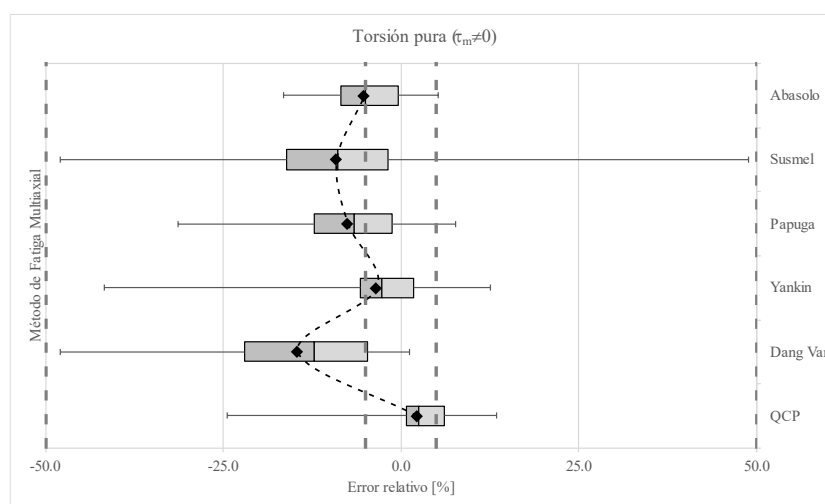


Figura 13: Representación de resultados del caso de torsión pura.

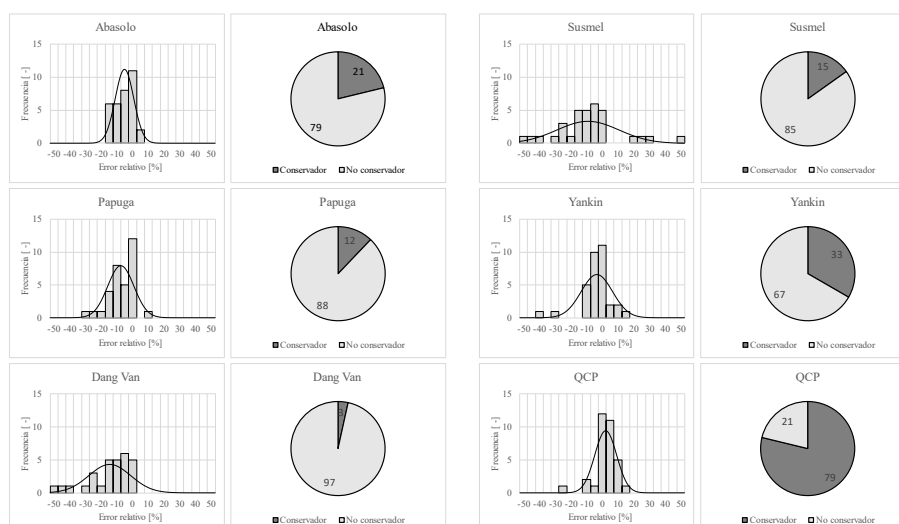


Figura 14: Distribución del error del caso de torsión pura.

4.3. Comparativa en función de tipos de materiales

Tal y como se ha comentado al comienzo de la sección, tras el análisis de los seis casos de carga particulares, se evalúa la capacidad de ajuste de los seis métodos seleccionados para las tres familias de metales principales.

4.3.1. Aceros

La familia de los aceros reúne la mayor parte de los ensayos recopilados en la base de datos, incluyendo un total de 395 ensayos realizados sobre materiales como el En25NiCrMo, 0.1C o SAE 52100. Según lo mostrado en la Tabla 10 y Figura 15, si bien los métodos de Yankin y Susmel disponen de un promedio ligeramente más cercano a cero, Papuga PCr es superior en el resto de aspectos ya que dispone de menor dispersión y rango de variación de resultados y, además, abarca mayor cantidad de ensayos en los intervalos ajustado y aceptable. En cuanto a la tendencia de los métodos, si bien en la Figura 16 destaca el carácter conservador de Abasolo, la superioridad general que demuestra Papuga lo convierte en el método más conveniente para el análisis de este tipo de materiales.

Tabla 10: Resultados en aceros.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	3.8	9.5	43.8	-25.9	69.7	7.1	50.6	93.2
SUS	-0.5	9.2	28.0	-54.7	82.7	6.4	55.4	95.7
PAP	-1.2	6.7	22.3	-20.4	42.8	5.2	60.7	99.5
YAN	-0.7	8.4	31.3	-35.4	66.7	5.8	59.2	95.7
DV	-2.5	12.0	39.0	-40.2	79.1	9.0	42.8	87.2
QCP	-2.4	8.0	32.3	-32.6	65.0	6.0	55.9	97.2

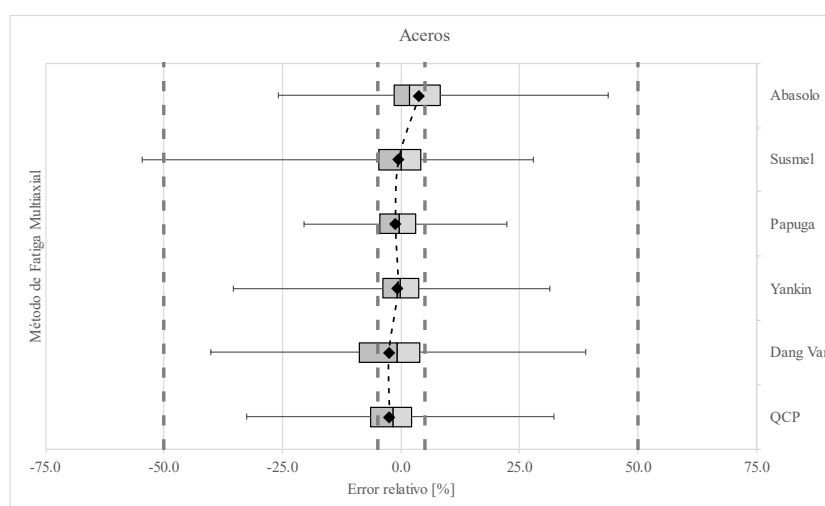


Figura 15: Representación de resultados en aceros.

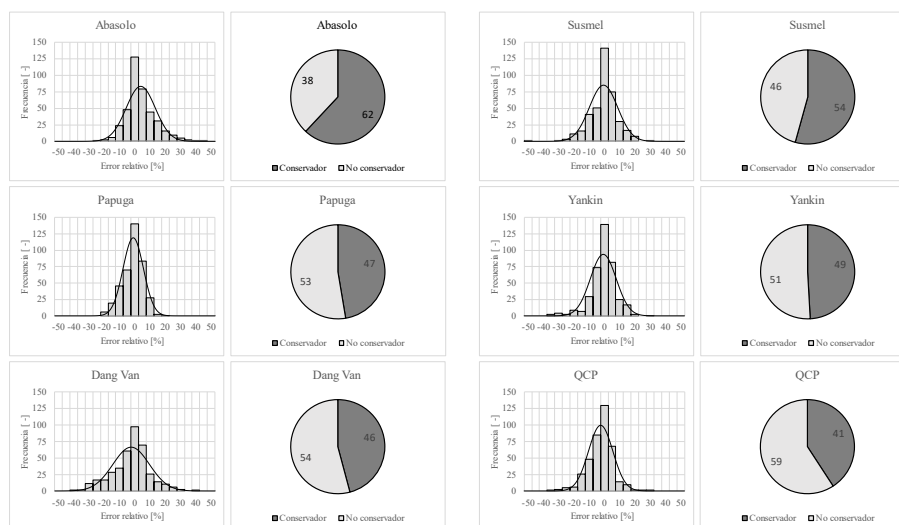


Figura 16: Distribución del error en aceros.

4.3.2. Fundiciones

En este caso, se ha evaluado la capacidad de ajuste de los métodos para un total de 66 ensayos realizados sobre fundiciones tales como EN-GJV-450, CuCr o Silal. De acuerdo con lo mostrado en la Tabla 11 y Figura 17, los métodos más destacados son Abasolo y Papuga PCr ya que son los que presentan mayor cercanía del valor promedio al valor central, menor dispersión de resultados y mayor capacidad de agrupación de ensayos en los intervalos analizados. En cuanto al carácter de los métodos, tal y como se aprecia en la Figura 18, Papuga PCr demuestra ser ligeramente más conservador que Abasolo, aunque este último sea el que menor dispersión presenta.

Tabla 11: Resultados en fundiciones.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	0.3	7.2	17.5	-32.2	49.7	4.8	60.6	98.5
SUS	-6.6	12.3	28.7	-44.0	72.6	9.7	40.9	87.9
PAP	1.5	7.9	42.6	-20.9	63.5	4.9	66.7	95.5
YAN	-5.8	14.4	35.4	-41.8	77.2	11.4	43.9	74.2
DV	-3.6	10.7	40.1	-44.0	84.1	6.9	54.5	90.9
QCP	-6.5	9.7	18.1	-38.4	56.5	8.8	39.4	92.4

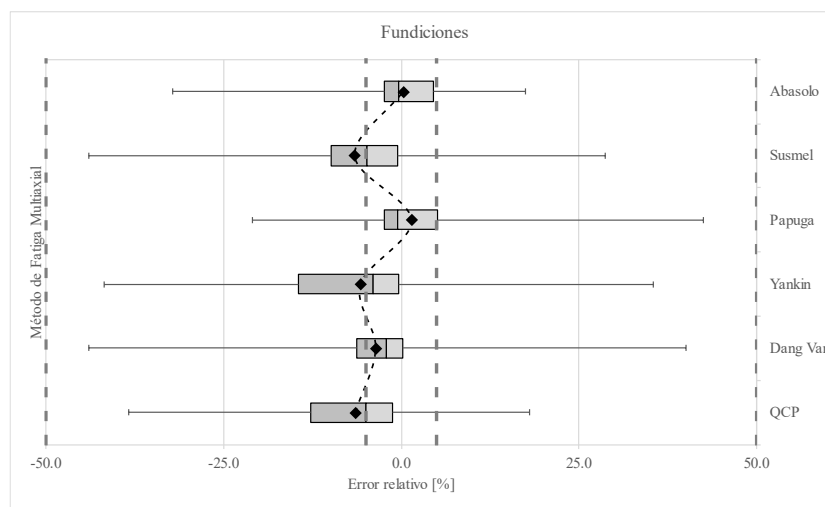


Figura 17: Representación de resultados en fundiciones.

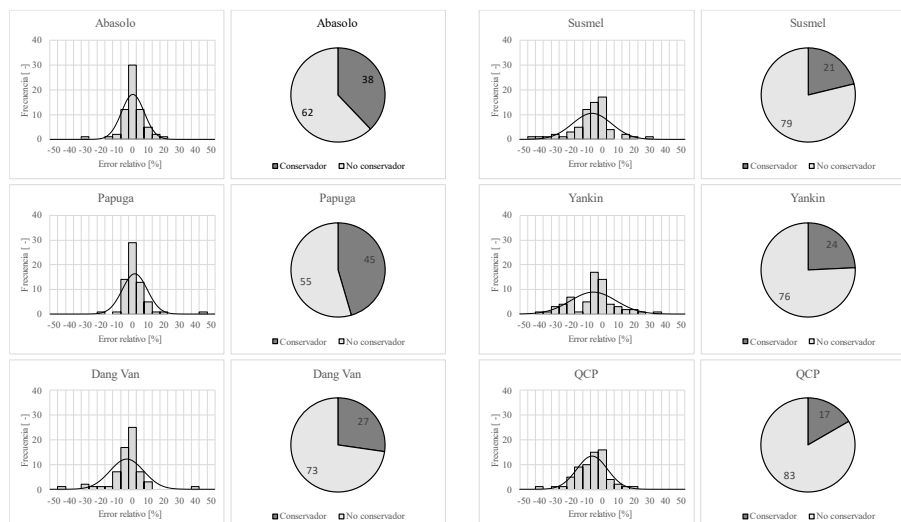


Figura 18: Distribución del error en fundiciones.

4.3.3. Aleaciones de aluminio

Para la evaluación de la familia de aleaciones de aluminio se han analizado 55 ensayos realizados sobre las aleaciones 14S-T, 76S-T61 y Duraluminio. Según se aprecia en la Tabla 12 y Figura 19, los métodos que mejores resultados proporcionan son Yankin y QCP. Si bien ambos presentan el mismo valor promedio, QCP demuestra ser el método con menor dispersión y rango de variación de resultados, además de concentrar un mayor número de ensayos en los intervalos ajustado y aceptable. De hecho, en este último intervalo abarca la totalidad de los ensayos. En cuanto a la tendencia de los métodos, según la Figura 20 las opciones más conservadoras son Abasolo, Susmel y Dang Van, siendo el primero el método de valor promedio más positivo (ver Figura 19).

Tabla 12: Resultados en aleaciones de aluminio.

Método	Error relativo					Media abs.	Ajustado [-5%, 5%]	Aceptable [-20%, 20%]
	Media	Desv. Est.	Máx.	Mín.	Rango			
ABA	3.7	12.1	38.8	-16.5	55.4	8.6	49.1	89.1
SUS	2.0	17.3	48.8	-47.9	96.8	11.0	54.5	78.2
PAP	-4.6	10.3	13.4	-36.4	49.8	7.6	56.4	92.7
YAN	-0.5	7.8	22.8	-19.1	41.8	6.0	52.7	98.2
DV	-0.8	15.3	35.8	-47.9	83.8	10.6	43.5	78.3
QCP	-0.5	6.0	15.1	-15.9	31.1	4.8	63.6	100.0

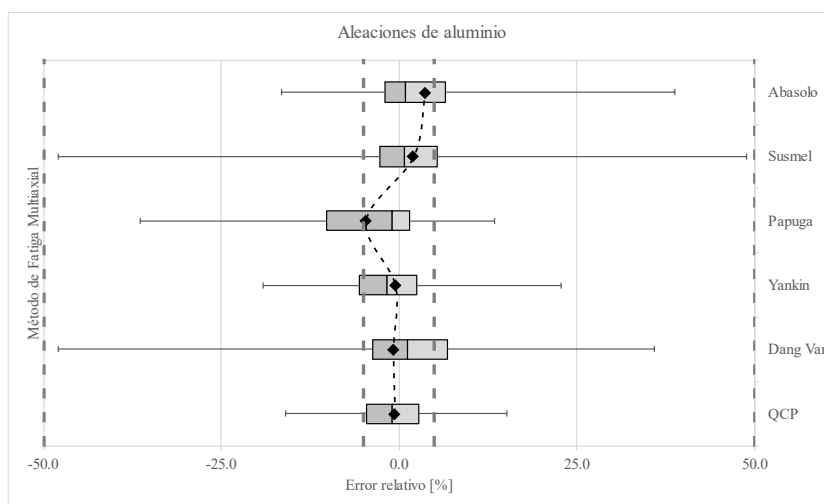


Figura 19: Representación de resultados en aleaciones de aluminio.

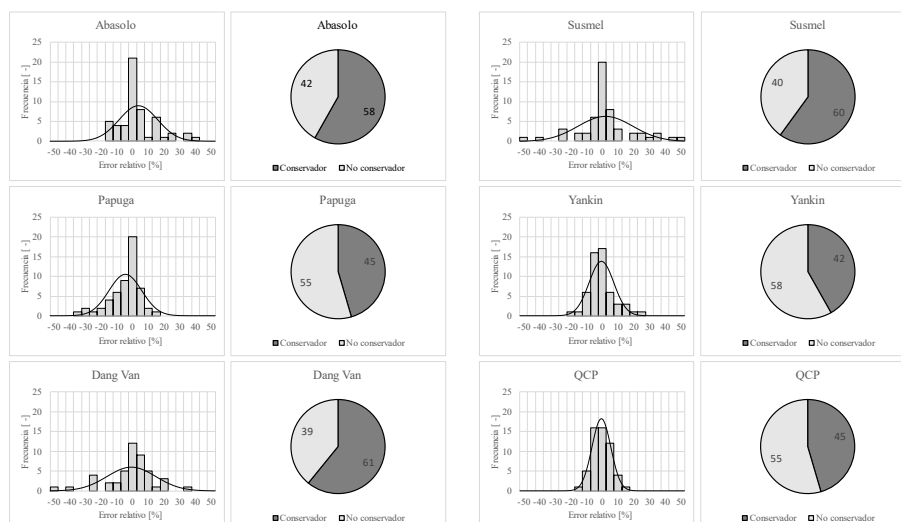


Figura 20: Distribución del error en aleaciones de aluminio.

5. Conclusiones

La ausencia de un método de fatiga multiaxial generalista que sea capaz de proporcionar indiscutiblemente los mejores resultados para cualquier material y estado tensional ha dado pie al desarrollo de nuevos métodos durante las últimas décadas. En esta línea, trabajos como el que aquí se presenta adquieren una especial relevancia para diseñadores y analistas mecánicos, ya que permite identificar qué método ajusta mejor según el material y caso de carga a estudio. Así pues, en la presente comparativa se analizan veinte métodos (tradicionales y más recientes) cuya capacidad de ajuste se evalúa frente a una base de datos compuesta por 518 ensayos experimentales de distinta naturaleza.

Los métodos más prometedores de la comparativa general resultan ser Abasolo, Yankin, Susmel, Dang Van, QCP y Papuga PCr, destacándose este último por su superior capacidad de ajuste global. En cuanto a los casos de carga particulares uniaxial puro y uniaxial puro con tensión media elevada, se confirma lo expuesto en [9], donde se indica que los mejores resultados se obtienen al aplicar el método de Abasolo, ya que demuestra ser el criterio más conservador y con menor variabilidad de resultados. En los casos de tensión alterna pura, tensión media no nula y tensión media elevada, si bien el método de Abasolo presenta un carácter más conservador, Papuga PCr se acerca más al valor central, dispone de menor dispersión de resultados y proporciona resultados superiores en los denominados intervalos ajustados y aceptables. Por último, en el caso de torsión pura, a pesar de la superior capacidad de agrupación de resultados que demuestra el método de Abasolo, también destaca el método QCP por su potencial en los intervalos ajustado y aceptable y su tendencia conservadora.

En el análisis de métodos por tipo de material, se aprecia que el método predominante varía para cada familia. En el caso de los aceros, a pesar de la tendencia conservadora del método de Abasolo, Papuga PCr presenta unos resultados generales superiores, destacando por su capacidad de concentrar los datos en torno al valor central. Para el caso de las fundiciones, se ha observado que, tanto el método de Abasolo como el de Papuga PCr proporcionan resultados prometedores. Sin embargo, la ligera superioridad general que demuestra el método de Abasolo hace que se postule como la opción más recomendable. Finalmente, del análisis del conjunto de aleaciones de aluminio se deduce que, si bien el método de Abasolo es más conservador, el método que mejores resultados globales proporciona es QCP, perfilándose así como la opción más conveniente para este tipo de materiales.

6. Nomenclatura

a, b, c, d	Parámetros de los métodos de fatiga multiaxial
k	Ratio del límite de fatiga, $k = \sigma_{-1} / \tau_{-1}$
σ_0	Límite de fatiga uniaxial pulsante
σ_{-1}	Límite de fatiga uniaxial alterna
$\sigma_{a,eq}$	Tensión alterna equivalente
σ_H	Tensión hidrostática
$\sigma_{nn,a}$	Tensión normal alterna en el plano crítico
$\sigma_{nn,m}$	Tensión normal media en el plano crítico
σ_{ut}	Límite de tracción estática
τ_0	Límite de torsión pulsante
τ_{-1}	Límite de torsión alterna
τ_{ut}	Tensión cortante última
$\tau_{nt,a}$	Tensión cortante alterna en el plano crítico
$\tau_{nt,m}$	Tensión cortante media en el plano crítico
ABA	Abasolo
AZ	Altenbach-Zolochovsky
CRO	Crossland
DV	Dang Van
FIN	Findley
I_1	Primer invariante del tensor de tensiones
J_2	Segundo invariante del tensor desviador de tensiones
KIN	Kinasoshvili
KK	Kakuno-Kawada
MD (MD)	McDiarmid (Máximo Daño)
MD (MTTA)	McDiarmid (Máxima Tensión Tangencial Alterna)
MEG	Método de Enfoque Global
PPC-MD	Método de Plano Crítico – Máximo Daño
MPC-MTTA	Método de Plano Crítico – Máxima Tensión Tangencial Alterna
PAL	Pallares

PAP	Papuga PCr
QCP	Quadratic Critical Plane
R	Ratio de carga, $R = \sigma_{min} / \sigma_{max}$
R_{VM}	Ratio de Von Mises
ROB	Robert
SC	Stulen – Cummings
SIN	Sines
SUS	Susmel
SWT	Smith, Watson and Topper
VHN	Vu-Halm-Nadot
YOK	Yokobori
YAN	Yankin
ZY	Zhang Yao

7. Referencias

- [1] R. Avilés, *Métodos de cálculo de fatiga para ingeniería*, Paraninfo, 2015.
- [2] K. Hohenemser and W. Prager, “The problem of fatigue strength under complex stresses,” *Metallwirtschaft XII*, vol. 24, 1933.
- [3] H. J. Gough and H. V. Pollard, “The strength of metals under combined alternating stresses,” *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 131, pp. 3–103, 1935.
- [4] J. Marin, “Interpretation of fatigue strengths for combined stresses,” in *Proceedings of International Conference on Fatigue of Metals*, 1956, pp. 184–195.
- [5] B. Crossland, “Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel,” in *International conference on fatigue of metals*, 1956, pp. 138–149.
- [6] G. Sines, “Failure of Materials Under Combined Repeated Stresses with Superimposed Static Stresses,” *NACA Technical Note 3495*, 1955.
- [7] F. B. Stulen and H. N. Cummings, “A Failure Criterion for Multi-Axial Fatigue Stresses,” *Proceedings - ASTM*, vol. 19428–2959, pp. 822–835, 1954.
- [8] W. N. Findley, “Fatigue of Metals Under Combinations of Stresses,” *J Fluids Eng*, vol. 79, no. 6, 1957, doi: 10.1115/1.4013320.
- [9] M. Abasolo, L. Pallares-Santasmartas, and M. Eizmendi, “A New Critical Plane Multiaxial Fatigue Criterion with an Exponent to Account for High Mean Stress Effect,” *Metals (Basel)*, vol. 14, no. 9, p. 964, 2024, doi: 10.3390/met14090964.
- [10] J. Papuga, “A survey on evaluating the fatigue limit under multiaxial loading,” *Int J Fatigue*, vol. 33, no. 2, 2011, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2010.08.001.
- [11] P. Davoli, A. Bernasconi, M. Filippini, S. Foletti, and I. V. Papadopoulos, “Independence of the torsional fatigue limit upon a mean shear stress,” *Int J Fatigue*, vol. 25, no. 6, 2003, doi: 10.1016/S0142-1123(02)00174-3.
- [12] Smith KN, Watson P, And Topper TH, “Stress- strain function for the fatigue of metals,” *J Mater*, vol. 5, no. 4, 1970.
- [13] H. Zenner, A. Simbürger, and J. Liu, “On the fatigue limit of ductile metals under complex multiaxial loading,” *Int J Fatigue*, vol. 22, no. 2, 2000, doi: 10.1016/S0142-1123(99)00107-3.
- [14] A. D. Deutschman, W. J. Michels, and C. E. Wilson, *Machine Design: Theory and Practice*, 1st ed. New York: Collier-Macmillan International, 1975.
- [15] I. V. Papadopoulos, P. Davoli, C. Gorla, M. Filippini, and A. Bernasconi, “A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals,” *Int J Fatigue*, vol. 19, no. 3, 1997, doi: 10.1016/S0142-1123(96)00064-3.
- [16] H. Kakuno and y. Kawada, “A new criterion of fatigue strength of a round bar subjected to combined static and repeated bending and torsion,” *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 2, no. 2, pp. 229–236, Sep. 1979, doi: 10.1111/j.1460-2695.1979.tb01358.x.

- [17] H. Altenbach and A. A. Zolochovsky, "Eine energetische Variante der Theorie des Kriechens und der Langzeitfestigkeit für isotrope Werkstoffe mit komplizierten Eigenschaften," *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 74, no. 3, 1994, doi: 10.1002/zamm.19940740311.
- [18] Q. H. Vu, D. Halm, and Y. Nadot, "Multiaxial fatigue criterion for complex loading based on stress invariants," *Int J Fatigue*, vol. 32, no. 7, 2010, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2009.11.006.
- [19] A. Yankin, A. I. Mugatarov, and V. E. Wildemann, "Influence of different loading paths on the multiaxial fatigue behavior of 2024 aluminum alloy under the same amplitude values of the second invariant of the stress deviator tensor," *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 15, no. 55, pp. 327–335, Dec. 2020, doi: 10.3221/IGF-ESIS.55.25.
- [20] L. Pallarés-Santasmartas, "Development of Two Multiaxial Fatigue Methods for Ductile Metals Based on Energy Considerations," University of the Basque Country, Leioa, Spain, 2021.
- [21] M. Fogue, "Critère de fatigue à longue durée de vie pour des états multiaxiaux de contraintes sinusoïdales en phase et hors phase.," Institut National des Sciences Appliquées (INSA) de Lyon, 1987.
- [22] J. L. Robert, "Contribution à L'étude de la Fatigue Multiaxiale sous Sollicitations Périodiques ou Aléatoires," Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, France, 1992.
- [23] J. Papuga and M. Růžicka, "Two new multiaxial criteria for high cycle fatigue computation," *Int J Fatigue*, vol. 30, no. 1, 2008, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2007.02.015.
- [24] D. L. McDiarmid, "A GENERAL CRITERION FOR HIGH CYCLE MULTIAXIAL FATIGUE FAILURE," *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 14, no. 4, 1991, doi: 10.1111/j.1460-2695.1991.tb00673.x.
- [25] J. Papuga, "Improvements of Two Criteria for Multiaxial Fatigue Limit Evaluation," *Bulletin Of Applied Mechanics*, vol. 5, 2009.
- [26] K. Dang Van, "Sur la résistance à la fatigue des métaux," *Sciences et Techniques de l'armement*, vol. 47, 1973.
- [27] Yokobori T., "Unified engineering theory of metal fatigue," *Technological Reports of Tohoku University*, vol. 27, no. 2, pp. 53–73, 1963.
- [28] C. C. Zhang and W. X. Yao, "An improved multiaxial high-cycle fatigue criterion based on critical plane approach," *Fatigue Fract Eng Mater Struct*, vol. 34, no. 5, 2011, doi: 10.1111/j.1460-2695.2010.01523.x.
- [29] L. Susmel and D. Taylor, "A critical distance/plane method to estimate finite life of notched components under variable amplitude uniaxial/multiaxial fatigue loading," *Int J Fatigue*, vol. 38, 2012, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2011.11.015.
- [30] T. Delahay, "Développement d'une méthode probabiliste de calcul en fatigue multiaxiale prenant en compte la répartition volumique des contraintes," ENSAM CER de Bordeaux, Bordeaux, France, 2004.
- [31] J. Z. Gyekenyesi, P. L. N. Murthy, and S. K. Mital, "NASALIFE—Component Fatigue and Creep Life Prediction Program," Hanover, USA, 2005.