



Metodología de modelado de eslabones flexibles mediante análisis numérico Cosserat y redes neuronales artificiales

M. Acevedo¹, A.E. Rodríguez-Sánchez¹, O. Altuzarra², V. Petuya²

¹ Universidad Panamericana. Facultad de Ingeniería. Álvaro del Portillo 49, Zapopan, Jalisco, 45010, México,

² Dpto. de Ingeniería Mecánica. Universidad del País Vasco UPV/EHU. Escuela de Ingeniería de Bilbao

mario.acevedo@up.edu.mx, aerodriguez@up.edu.mx, oscar.altuzarra@ehu.eus, victor.petuya@ehu.eus

Los mecanismos paralelos continuos son eslabonamientos de cadena cerrada cuyo movimiento es posible gracias a sus elementos flexibles y esbeltos. En comparación con los manipuladores paralelos basados en eslabones rígidos, su análisis cinemático requiere de un modelado más complejo debido a las grandes deformaciones y al equilibrio fuerza-par que requieren.

En el caso de los mecanismos paralelos continuos en el plano, la investigación sobre su comportamiento cinemático completo es escasa, principalmente debido a la dificultad de obtener las soluciones posibles al problema de posiciones. En este artículo se plantea un método alternativo, basado igualmente en el modelo de Cosserat para barras esbeltas, que permite la solución del problema directo, cuyos resultados son usados por un algoritmo de inteligencia artificial basado en redes neuronales para predecir la solución a este problema de forma eficiente. Se presenta como caso de análisis y estudio un ejemplo representativo que sirve como base para la discusión en la comparación y la aplicación práctica de los métodos empleados.

1. Introducción

Los mecanismos paralelos continuos son eslabonamientos de cadena cerrada cuyo movimiento es posible gracias a sus elementos flexibles y esbeltos. En comparación con los manipuladores paralelos basados en eslabones rígidos, su análisis cinemático requiere de un modelado más complejo debido a las grandes deformaciones y al equilibrio fuerza-par que requieren.

En el caso de los mecanismos paralelos continuos en el plano, la investigación sobre su comportamiento cinemático completo es escasa, principalmente debido a la dificultad de obtener las soluciones posibles al problema de posiciones. En este artículo se tienen como base los resultados obtenidos previamente con un método basado en integrales elípticas para resolver los problemas de posición cinemática tanto directa como inversa. De forma que se plantea un método alternativo, basado igualmente en el modelo de Cosserat para barras esbeltas, que permite la solución del problema directo, cuyos resultados son usados por un algoritmo de inteligencia artificial basado en redes neuronales para predecir la solución a este problema de forma eficiente. Se presenta como caso de análisis y estudio un ejemplo representativo que sirve como base para la discusión en la comparación y la aplicación práctica de los métodos empleados.

El artículo se inicia con la descripción de los métodos empleados para la solución de la dinámica de las barras esbeltas a través de un enfoque basado en el modelo de barra de Cosserat, así como de la teoría general de redes neuronales empleada para el cálculo del problema directo. Posteriormente se expone la metodología usada para el modelado y solución de eslabonamientos con barras Cosserat a partir de redes neuronales artificiales tipo feed-forward. A continuación, se ejemplifica el uso de la metodología a través de un mecanismo paralelo básico en el plano, que se usa como caso de estudio. Finalmente, se comentan algunos resultados y se exponen algunas conclusiones.

2. Materiales y Métodos

2.1. Cinemática

Los sistemas basados en elementos de Cosserat son una extensión de sistemas de barras de Kirchhoff, y permiten modelar, mediante ecuaciones de balance, la deformación angular debido a tensión cortante, lo que puede dar aproximación a sistemas reales como lo son filamentos o elementos delgados flexibles [1]. Estas barras Cosserat se idealizan como elementos delgados en los que su longitud es mucho mayor que su sección; para el caso de sección redonda esto es $L \gg r$, donde una barra está definida por un radio r .

El análisis de una barra Cosserat se describe a través de una línea central definida por el siguiente vector (véase Figura 1):

$$\mathbf{r}(s, t), \quad \text{para } s \in [0, L] \quad (1)$$

donde s representa la longitud del arco de la barra de una configuración deformada Ω_t para el instante t . En este tipo de modelado, un vector $\mathbf{x}$ puede expresarse a través de dos marcos:

- Marco Euleriano: $\bar{\mathbf{x}} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$
- Marco Lagrangiano: $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{d}_1 + x_2 \mathbf{d}_2 + x_3 \mathbf{d}_3$

donde $\{i, j, k\}$ corresponde al conjunto de la triada vectores unitarios ortonormales del marco Euleriano, y el conjunto $\mathbf{d}_i, i \in \{1, 2, 3\}$ se refiere a la triada de vectores ortonormales del marco Lagrangiano (configuración deformada). El marco de referencia en la configuración deformada puede describirse mediante el siguiente tensor de segundo orden:

$$\mathbf{Q}(s, t) = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\} \quad (2)$$

Además, un vector $\bar{\mathbf{x}}$, puede transformarse entre dos configuraciones mediante el siguiente producto:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}} \quad (3)$$

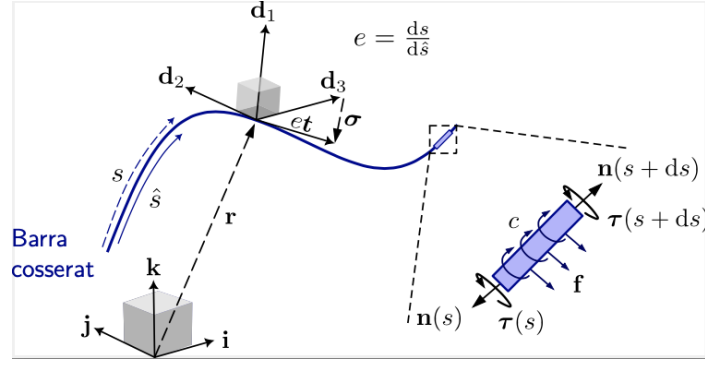


Figura 1: Diagrama esquemático de la formulación de una barra Cosserat.

El marco Euleriano describe la orientación de la barra en su estado no-deformado; y cuando es el caso, el vector base $\mathbf{d}_3$ apunta directamente a lo largo de la línea tangente del centro de s :

$$\partial_s \bar{\mathbf{r}} = e \bar{\mathbf{t}} \quad (4)$$

donde $e = ds/d\hat{s}$ es una relación de estiramiento que está definida por el arco de referencia $\hat{s}$ y el arco en estado deformado s ; además $\bar{\mathbf{t}}$ es un vector unitario tangente al arco s .

Por otra parte, cuando existe una deformación o cizallamiento, el vector base $\mathbf{d}_3$ se desvía de $\bar{\mathbf{t}}$, lo que provoca una deformación local:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q} \bar{\mathbf{r}}_s - \mathbf{d}_3 \quad (5)$$

Más aún, una orientación local puede definirse como:

$$\bar{\mathbf{r}}_s = e \bar{\mathbf{t}} \quad (6)$$

Además de un posible estado de cizallamiento, una barra también puede torcerse y girar. En el marco Lagrangiano, $\mathbf{Q}(s, t)$ cambia, lo que da lugar a la curvatura de la barra, que puede describirse a través de un vector de curvatura $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\partial_s \mathbf{d}_j = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{d}_j, \quad \text{para: } j \in \{1, 2, 3\} \quad (7)$$

Finalmente, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de una barra Cosserat se define por:

$$\partial_t \mathbf{d}_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_j, \quad \text{para: } j \in \{1, 2, 3\} \quad (8)$$

mientras que la velocidad tangencial se define como sigue:

$$\bar{\mathbf{v}} = \partial_t \bar{\mathbf{r}} \quad (9)$$

Las ecuaciones (1) a (9) definen los aspectos teóricos del modelado cinemático de una barra Cosserat. Para poder implementar un subsiguiente modelado numérico, es preciso definir las ecuaciones de balance.

2.2. Ecuaciones de balance

Las ecuaciones de balance en el modelado de una barra Cosserat se consideran para una sección dada de la misma en punto a lo largo de toda su configuración, y estas se limitan a la descripción de la conservación del *momentum*.

La primera ecuación que debe satisfacerse es el *momentum lineal*:

$$\rho A \cdot \partial_t^2 \bar{\mathbf{r}} = \partial_s \left(\frac{\mathbf{Q}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma}}{e} \right) + e \bar{\mathbf{f}} \quad (10)$$

donde ρ es la masa por unidad de longitud de la barra, A es el área transversal, $\mathbf{S}$ es una matriz de rigidez cortante, y $\bar{\mathbf{f}}$ es una fuerza externa aplicada. De la ecuación anterior, el primer término del lado derecho de la misma hace referencia las fuerzas internas (tensión y cizalla), mientras que el segundo término se refiere a las fuerzas aplicadas.

La siguiente ecuación es la del *momentum angular*:

$$\frac{\rho \mathbf{I}}{e} \cdot \partial_t \boldsymbol{\omega} = \partial_s \left(\frac{\mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}}{e^3} \right) + \frac{\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}}{e^3} + \left(\mathbf{Q} \frac{\bar{\mathbf{r}}_s}{e} \times \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} \right) + \left(\rho \mathbf{I} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}}{e} \right) \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\rho \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}}{e^2} \cdot \partial_t e + e \mathbf{c} \quad (11)$$

donde $\mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}}/e^2$ es el segundo momento de inercia de la sección, $\mathbf{B}$ es una matriz de rigidez de la flexión del material de la barra y $\mathbf{c}$ es un par aplicado que afecta a la sección. En esta ecuación, los términos del lado derecho se refieren a lo siguiente:

- el primer y segundo términos hacen referencia a las fuerzas internas debidas a flexión y giro de la barra respectivamente,

- el tercer término se refiere a las fuerzas internas de cizallamiento,
- el cuarto término es el transporte de una cantidad de momento angular representado por ω ,
- el quinto término describe la influencia de cambios temporales en el estiramiento de la barra, y
- el último término describe la aplicación de un par externo.

La solución de estas ecuaciones de balance para el *momentum* define la dinámica de una barra de Cosserat; para casos generales, la solución puede aproximarse mediante el método numérico previamente reportado en [1], donde se hace una discretización numérica de una barra flexible a través de un conjunto de nodos que dan lugar a elementos de Cosserat, condiciones de frontera y algoritmos de discretización de pasos en el tiempo. Para este trabajo se usará el método numérico de [1] para cosechar datos que posteriormente se usarán para construir un modelo de un mecanismo flexible por medio de una red neuronal.

2.3. Redes neuronales “feed-forward”

Una red neuronal artificial de tipo *feed-forward* (RNA) es un modelo computacional inspirado el comportamiento observado en las neuronas de cerebros animales. Son usadas para tareas como la clasificación y la regresión [2]. El objetivo es aprender un mapeo funcional $f_{RNA}: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ que relacione entradas $\mathbf{x}_i$ con salidas $\mathbf{y}_i$ a partir del aprendizaje de un conjunto de datos estructurado:

$$\mathcal{S} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\}_{i=1}^N \quad (12)$$

Es decir, una RNA consiste en capas organizadas jerárquicamente:

- Capa de entrada: recibe las características $\mathbf{x}_i$.
- Capas ocultas: transforman las entradas mediante funciones de activación.
- Capa de salida: produce la predicción $\mathbf{y}_i$.

La activación en una capa l está dada de forma compacta por:

$$\mathbf{a}_l = g_l(\mathbf{W}_l \mathbf{a}_{l-1} + \mathbf{b}_l) \quad (13)$$

donde $\mathbf{W}_l$ y $\mathbf{b}_l$ son el tensor de pesos y el vector de sesgos, respectivamente, ajustados durante el entrenamiento. Este ajuste se realiza mediante algoritmos como el descenso de gradiente:

$$\mathbf{W}_l \leftarrow \mathbf{W}_l - \frac{l_r}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}_l} \quad (14)$$

$$\mathbf{b}_l \leftarrow \mathbf{b}_l - \frac{l_r}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{b}_l} \quad (15)$$

donde l_r es la tasa de aprendizaje y L es la función de pérdida.

En este trabajo se usarán RNA de la clase previamente definida para modelar el conjunto de datos de un mecanismo Cosserat descrito a continuación.

2.4. Metodología para el modelado de eslabonamientos por medio de RNA basado en datos numéricos Cosserat

La solución de eslabonamientos con barras flexibles a través del modelado y solución numérica de Cosserat, presentado en este trabajo, está basado en el enfoque de datos (en inglés, *data-driven*) [3], por lo que esta metodología no implica información física explícita del fenómeno de deformación de las barras definido en las secciones anteriores. Esta consiste en el desarrollo de un conjunto estructurado de datos, a partir del cual se definen las entradas y salidas de un modelo RNA:

$$\mathcal{S} = \{(\mathbf{c}_i, \bar{\mathbf{y}}_i)\}_{i=1}^N \quad (16)$$

donde $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^4$ es el vector de entrada definido como:

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} f \\ \beta \\ u(0)_1 \\ u(0)_2 \end{bmatrix}$$

en el que $f \in \mathbb{R}^+$ representa la magnitud de la fuerza aplicada al mecanismo en el extremo de una barra y perpendicular a esta, $\beta \in \{0,1\}$ es una variable categórica que indica si la fuerza se aplica a la barra 1(0) o barra

$2(1)$, $u(0)_1, u(0)_2 \in \{0,1\}$ son variables binarias que describen las condiciones de frontera de las barras. Aquí, (1) indica que la barra está fija, mientras que (0) indica que está libre. Por otro lado, $\bar{\mathbf{y}}_i \in R^k$ es el vector de salida, que contiene las posiciones deformadas de los nodos de ambas barras (coordenadas x e y).

Es importante destacar que una RNA se construye a partir de un *conjunto de datos de entrenamiento*, se valida durante su propio entrenamiento con un *conjunto de validación*, y se prueba finalmente con un *conjunto de prueba* (estos tres conjuntos se denominan en inglés como: *training*, *validation* y *test datasets* respectivamente). El conjunto de entrenamiento permite que una RNA ajuste sus parámetros internos aprendiendo patrones presentes en los datos; el conjunto de validación se emplea para supervisar el rendimiento del modelo durante el proceso de aprendizaje y prevenir el fenómeno de sobreajuste, ayudando también en la elección de hiperparámetros; finalmente, el conjunto de prueba se utiliza al concluir el entrenamiento para evaluar de manera objetiva la capacidad del modelo de generalizar su desempeño a datos no vistos.

De acuerdo con lo anterior, la propuesta metodológica consiste en definir un caso de estudio de un eslabonamiento con barras Cosserat, excitarlo con distintos casos de carga definidos por $\mathbf{c}_i$ inferiores a las cargas críticas para la barra en pandeo, y hacer trazabilidad de las deformaciones a través de $\bar{\mathbf{X}}_i$. Con esto, se entrena una red neuronal que posteriormente se valida con un conjunto específico diseñado para ese propósito, y finalmente se prueba con dos casos de carga y posición no utilizados en las fases previas de entrenamiento ni validación. Esta metodología se presenta en la Figura 2 y, dentro de la misma, se mencionan métricas para evaluar la RNA en dos etapas: M_V , que corresponde a la métrica de validación y un umbral de error definido por ξ_V ; y M_P para prueba, con su correspondiente umbral de error ξ_P .

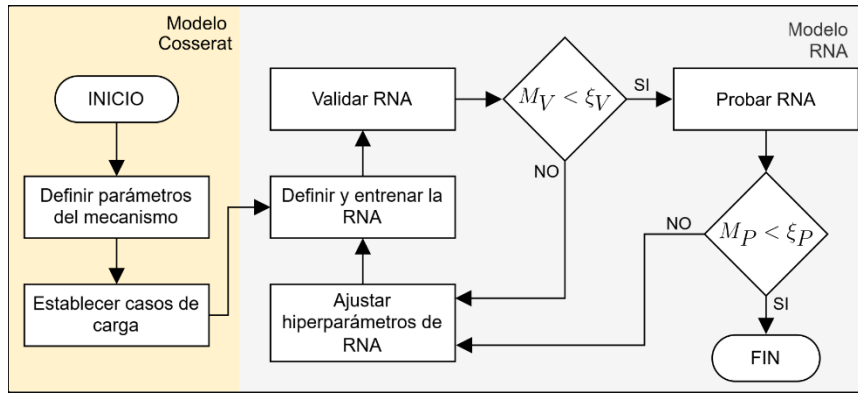


Figura 2: Metodología para el modelado y solución de un eslabonamiento con barras Cosserat a partir de redes neuronales artificiales tipo *feed-forward*.

En la metodología presentada, se pueden usar métricas comunes para monitoreo, ajuste y evaluación final de una RNA. En este trabajo se recurre a dos métricas en concreto, el Error Absoluto Medio:

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\bar{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}_i| \quad (17)$$

y el Coeficiente de Determinación R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N |\bar{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}_i|^2}{\sum_{i=1}^N |\bar{\mathbf{y}}_i - \mu|^2} \quad (18)$$

donde $\hat{\mathbf{y}}_i$ son las predicciones generadas por el modelo a partir de las entradas $\mathbf{c}_i$, y μ es el promedio de los valores simulados con el modelo numérico. El MAE mide el promedio de los errores absolutos en el conjunto de datos, proporcionando una métrica que cuantifica qué tan cerca están las predicciones del modelo de las salidas esperadas, mientras que R^2 evalúa la proporción de la variabilidad total de los datos que es explicada por el modelo, indicando su capacidad de generalización y ajuste. Para la metodología propuesta, se usan ambas métricas después de entrenar una RNA y posteriormente al compararla con dos casos de carga del mecanismo no usados para el entrenamiento de esta (es decir, con datos de prueba).

3. Caso de estudio

La Figura 3 presenta el caso de un mecanismo de barras flexibles que sólo cuenta con movilidad gracias a la flexibilidad de estas. Esta configuración geométrica, bajo cualquier enfoque de modelado de barra rígida, vendría a ser una estructura, pero no es así cuando sus eslabones se consideran barras flexibles, ya que, ante un estado de grandes deformaciones, se puede lograr movilidad.

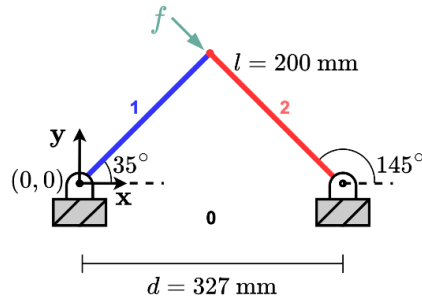


Figura 3: Caso de estudio: mecanismo con eslabones flexibles (barras Cosserat). La carga aplicada, f , es perpendicular a la barra en su configuración inicial. Cada barra está numerada en el centro.

Además de los parámetros geométricos ilustrados en la Figura 3, en la Tabla 1 se detallan las propiedades físicas del material y los parámetros de análisis utilizados en el modelo numérico Cosserat del mecanismo. Cabe destacar que dicho modelo fue desarrollado empleando la librería PyElastica [4], una herramienta especializada en la simulación de barras deformables Cosserat.

Tabla 1: Propiedades físicas y parámetros para el análisis del modelo Cosserat

Propiedad	Valor
Módulo de Young del NiTi	115×10^3
Densidad	$6.45 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$
Relación de Poisson	0.5
Diámetro de barras	5 mm
Modelo de elementos	Cosserat
Número de elementos por barra	100
Parámetro de análisis	Valor
Tiempo de simulación física	1 s.
Tiempo total de solución numérica	10 s (aprox.)

Para capturar la diversidad de las configuraciones de entrada en el modelo, se definió inicialmente un conjunto de datos de 40 casos distintos del mecanismo analizado. Estos casos consideran combinaciones de fuerza aplicada (f), la barra afectada (β), y las condiciones de frontera $u(0)_1$ y $u(0)_2$. La Tabla 2 presenta todas las configuraciones utilizadas para el entrenamiento. Estas configuraciones se distribuyen uniformemente a lo largo del espacio de variables de entrada de la RNA, con el propósito de obtener un modelo con buena capacidad de generalizar dentro del conjunto de posibles soluciones del mecanismo.

Tabla 2: Configuraciones de entrada utilizadas para el entrenamiento.

Caso	f	β	$u(0)_1$	$u(0)_2$	Caso	f	β	$u(0)_1$	$u(0)_2$
1	2200	0	0	1	21	2000	1	0	0
2	2300	0	0	1	22	1500	1	0	0
3	2250	0	0	1	23	1750	1	0	0
4	2150	0	0	1	24	1250	1	0	0
5	2100	0	0	1	25	1400	1	0	0
6	2050	0	0	1	26	1300	1	0	0
7	2000	0	0	1	27	1450	1	0	0
8	1000	0	0	1	28	1475	1	0	0
9	1500	0	0	1	29	1350	1	0	0
10	2400	0	0	1	30	1800	1	0	0
11	2200	1	1	0	31	2000	0	0	0
12	2300	1	1	0	32	1500	0	0	0
13	2250	1	1	0	33	1750	0	0	0

14	2150	1	1	0	34	1250	0	0	0
15	2100	1	1	0	35	1400	0	0	0
16	2050	1	1	0	36	1300	0	0	0
17	2000	1	1	0	37	1450	0	0	0
18	1000	1	1	0	38	1475	0	0	0
19	1500	1	1	0	39	1375	0	0	0
20	2400	1	1	0	40	1800	0	0	0

Además, se empleó la librería TensorFlow [5] para construir la RNA. Este modelo de red se diseñó con una arquitectura de tres capas totalmente conectadas: una capa de entrada con cuatro nodos, correspondientes a las características normalizadas de entrada (f , β , $u(0)_1$, $u(0)_2$), dos capas ocultas con 80 y 160 neuronas respectivamente, ambas activadas mediante la función *ReLU*, y una capa de salida con 80 nodos, representando las coordenadas deformadas de ambas barras. La configuración específica de la red y del proceso de entrenamiento se describe en la Tabla 3. Aunque el *teorema de aproximación universal* indicaría que una sola capa oculta puede ser suficiente, en este caso no logró capturar con precisión las relaciones no lineales del modelo; tras experimentación inicial con los datos del modelo del mecanismo de barras Cosserat, se comprobó que una arquitectura con dos capas ocultas ofrecía un mejor equilibrio entre ajuste y generalización, según métricas como el error absoluto medio y el coeficiente de determinación.

Además, el conjunto de datos general consistió en 40 casos de estudio (véase Tabla 2), de los cuales, de forma aleatorizada se usó el 70% para entrenamiento, y el restante 30% para validación; luego se usaron dos casos de prueba fuera de estos cuarenta casos del conjunto de datos inicial. Estos sirvieron para evaluar la generalización de la RNA en casos de posición del mecanismo no vistos por la misma. Así, las métricas de evaluación seleccionadas permitieron evaluar la precisión de las predicciones frente a los datos esperados. La normalización de la característica f (fuerza) permitió estabilizar el entrenamiento y acelerar la convergencia del modelo.

Tabla 3: Parámetros de construcción y entrenamiento de la red neuronal.

Parámetro	Valor
Librería utilizada	TensorFlow
Número de entradas	4 (f , β , $u(0)_1$, $u(0)_2$)
Número de salidas	80 (coordenadas de nodos)
Capas ocultas	2 (160 y 80 neuronas con función <i>ReLU</i>)
Función de pérdida	<i>MAE</i>
Optimizador	RMSProp
Criterio de error de validación del modelo	$MAE < 5 \text{ mm}$
Criterio de error de prueba del modelo	$R^2 > 0.9$
Épocas de entrenamiento	5000
Datos normalizados	Característica f (entre 0 y 1)

La metodología previamente presentada asegura la reproducibilidad del modelo Cosserat por un modelo RNA y su aplicabilidad en estudios relacionados con la predicción de deformaciones en barras.

4. Resultados

La Figura 4 muestra la evolución del desempeño durante el entrenamiento del modelo RNA. Se observa que, a partir de las cinco mil épocas, los errores en los conjuntos de entrenamiento y validación comienzan a divergir, lo cual sugiere un posible inicio del sobreajuste. No obstante, antes de ese punto, el modelo alcanza en el conjunto de entrenamiento un error absoluto medio menor a 2 mm entre las predicciones de la red y los datos simulados, que de acuerdo con el criterio de error establecido en la Tabla 3, indica una buena capacidad de ajuste durante la fase inicial del entrenamiento.

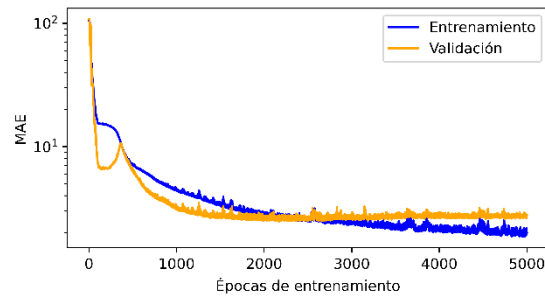


Figura 4: Gráfica de desempeño.

La Figura 5 presenta cuatro casos de entrada del mecanismo de la Tabla 2 (1, 11, 21 y 31) obtenidos de simulaciones de carga del mecanismo Cosserat de la Figura 3. Como se observa, las barras se comportan de forma flexible ante una carga dada. Los datos de las simulaciones obtenidas de todos los casos se usaron para entrenar la RNA.

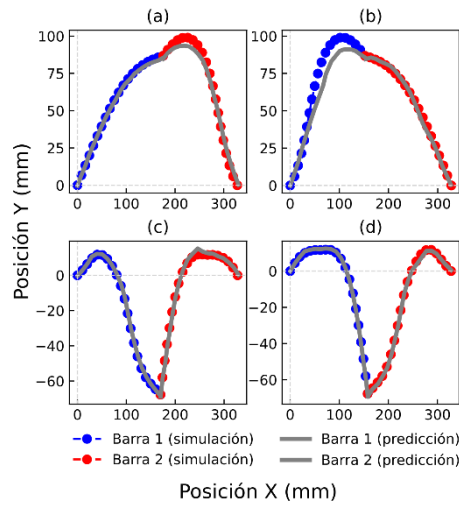


Figura 5: Comparación de la deformación en el eslabonamiento. Los puntos representan los resultados simulados con barras Cosserat, mientras las predicciones de RNA se presentan en líneas continuas: (a) caso 1, (b) caso 11, (c) caso 21, y (d) caso 31.

En la Figura 6 se muestra la comparación entre los casos de prueba y las predicciones generadas por la red neuronal entrenada. El error absoluto medio mínimo registrado fue de aproximadamente 3.04 mm, acompañado de un valor del coeficiente de determinación cercano a la unidad. Esto sugiere que, en los casos de prueba analizados, la red fue capaz de generalizar adecuadamente a datos no vistos durante las fases de entrenamiento y validación. No obstante, este aspecto podría explorarse con mayor profundidad en trabajos futuros, especialmente en el contexto de mecanismos más complejos, donde sería relevante identificar qué configuraciones son más sensibles al evaluar la capacidad de generalización del modelo. En este trabajo no se llevó a cabo un análisis prospectivo en esa dirección. Finalmente, la Tabla 4 presenta los valores obtenidos del error absoluto medio y el coeficiente de determinación para los conjuntos de entrenamiento, validación y prueba.

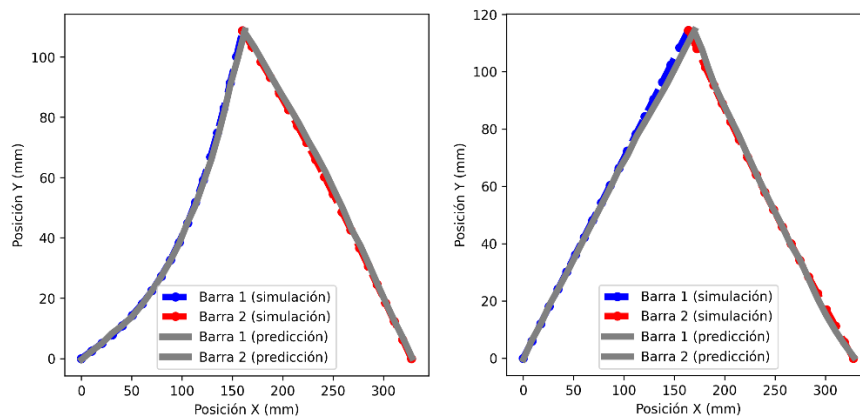


Figura 6: Comparación de casos de prueba para la RNA.

Tabla 4: Resultados finales de las métricas de evaluación del modelo RNA.

Métrica de evaluación	Valor		
	Conjunto de entrenamiento	Conjunto de validación	Conjunto de prueba*
MAE	1.9964 mm	2.7696 mm	3.03950 mm
R^2	0.7470	0.4783	0.9996

*Corresponde a los valores más pesimistas de los dos únicos casos de prueba

5. Conclusiones

El modelado de mecanismos mediante barras Cosserat representa un enfoque emergente en la simulación de sistemas flexibles. Diversos estudios han propuesto estrategias que, por su propia formulación y naturaleza, pueden considerarse atomizadas dentro de la literatura sobre simulación de mecanismos basados en eslabones Cosserat ([6–8]).

En este trabajo, se presentó una metodología basada en modelos numéricos y redes neuronales artificiales bajo un enfoque *data-driven* [3], logrando una representación adecuada del comportamiento de un mecanismo flexible compuesto por tres barras, dos de ellas definidas como eslabones Cosserat. Aunque la metodología no explicita las leyes físicas subyacentes, los resultados obtenidos son satisfactorios según los criterios de validación y prueba adoptados.

Si bien no se cuenta con una validación experimental del mecanismo estudiado, al considerar los datos de la simulación numérica como referencia, la metodología propuesta demuestra un potencial significativo para ser adoptada y escalada a casos más complejos. En trabajos futuros, la integración de datos experimentales permitirá validar extensivamente la propuesta y explorar su aplicabilidad en escenarios reales, consolidando su robustez y utilidad en el modelado de mecanismos flexibles basados en barras Cosserat.

Finalmente, cabe destacar que, si bien los resultados del presente estudio se ilustraron empleando un material con propiedades similares al nitinol, la metodología desarrollada no se restringe a dicho material. Su estructura general permite ser ajustada a diferentes configuraciones y características mecánicas, lo que refuerza su aplicabilidad en contextos de diseño más amplios.

6. Agradecimientos

Los autores desean agradecer el apoyo financiero recibido por parte de la Universidad Panamericana, a través del Fondo Fomento a la Investigación 2024 (Proyecto UP-CI-2024-GDL-15-ING), así como del Gobierno Español a través del Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto PID2020-116176GB-I00) financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, y el apoyo al grupo de investigación a través del Proyecto IT1480-22 financiado por el Departamento de Educación del Gobierno Vasco.

7. Referencias

- [1] Gazzola, M., Dudte, L. H., McCormick, A. G., Calvo-Irisarri J., Mahadevan, L., “Forward and inverse problems in the mechanics of soft filaments”, *Royal Society Open Science* **5**(6), 171628 (2018).
- [2] Aggarwal, C. C., *Neural Networks and Deep Learning*, Springer, New York (2018)
- [3] Nature Reviews Physics, “The rise of data-driven modelling”, *Nature Reviews Physics*, **3**(6), pp. 383, Jun. (2021).
- [4] Tekinalp, A., Kim, S. H., Bhosale, Y., Parthasarathy, T., Naughton, N., Albazroun, A., Joon, R., Cui, S., Nasiriziba, I., St’olze, M., Shih, C.-H., Gazzola, M., *GazzolaLab/PyElastica: v0.3.2*, Zenodo, Version v0.3.2, (2024).
- [5] Abadi, M., Agarwal, A., Barham, P. *et al.*, “TensorFlow: Large-Scale Machine Learning on Heterogeneous Systems”, Software available from tensorflow.org, 2015.
- [6] Díez Sánchez, M., Campa Gómez, F. J., Díaz-Caneja Iglesias, D., & Altuzarra Maestre, Ó., “Diseño, fabricación y validación de un robot paralelo ultraflexible de 3 grados de libertad para operaciones de Pick&Place”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* **25**(2), 3-11 (2021).
- [7] Altuzarra, O., Urizar, M., Cichella, M., Petuya, V. “Kinematic Analysis of three degrees of freedom planar parallel continuum mechanisms”, *Mechanism and Machine Theory* **185**, 105311 (2023).
- [8] Altuzarra, O., Urizar, M., Bilbao, K., Hernández, A. “Full Forward Kinematics of Lower-Mobility Planar Parallel Continuum Robots”, *Mathematics* **12**(22), 3562 (2024).