



Desarrollo de las restricciones del mecanismo en síntesis dimensional óptima de mecanismos espaciales

V. García-Marina¹, G. Urkullu², A. Noriega³, I. Coria²

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad del País Vasco. vanessa.garcia@ehu.eus

² Departamento de Matemática Aplicada. Universidad del País Vasco. gorka.urkullu@ehu.eus, ibai.coria@ehu.eus

³ Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación. Universidad de Oviedo. noriegaalvaro@uniovi.es

Previo a este artículo los autores desarrollaron el enfoque teórico para la síntesis dimensional óptima de mecanismos espaciales. Para ello se planteó una función objetivo basada en la mínima distancia entre un punto de interés del mecanismo y una posición predeterminada en el espacio. Las posiciones se han definido en función de las posiciones del centro de gravedad de los elementos del mecanismo y sus orientaciones.

El problema se ha abordado como la minimización de una función objetivo de la síntesis, que sería la suma de las distancias en cada punto de síntesis del mecanismo al punto predeterminado, considerando en cada punto de dicha síntesis la minimización del problema de mínima distancia. Para la resolución del problema de mínima distancia se empleará un método SQP (Sequential Quadratic Problems) empleando el método de Newton con derivadas analíticas, y para la resolución de la síntesis se empleará también un método SQP, pero en este caso obteniendo las derivadas de forma numérica.

En este trabajo se va a desarrollar el problema de mínima distancia incluyendo las derivadas de las expresiones analíticas de las restricciones relacionadas con los pares R y S del mecanismo. Para introducir estas restricciones en la minimización de la función de error del problema de mínima distancia, se van a emplear los multiplicadores de Lagrange. Dado que se quiere emplear un sistema SQP con el método de Newton, el empleo de estos multiplicadores requiere del conocimiento de las derivadas primeras y segundas de las ecuaciones de restricción derivadas de los pares. Si bien las primeras derivadas son de uso común en dinámica de sólidos, las segundas derivadas no suelen ser necesarias y por ello no se encuentran en la bibliografía. Parte de la contribución de este trabajo es la obtención de estas derivadas para pares esféricos y de rotación. Los desarrollos aquí presentados se basan en el empleo de cuaterniones, pero los planteamientos son fácilmente generalizables a otros sistemas de parametrización de la matriz de rotación.

1. Introducción

En el campo de la síntesis cinemática de mecanismos hay muy poca bibliografía orientada a mecanismos espaciales que a mecanismos planos como pueden ser [1-9]. De la bibliografía revisada para este documento específicamente relacionada con síntesis de mecanismos espaciales, y acotada a los últimos 5 años, el ratio de referencias encontradas acerca de síntesis de aplicación particular sobre general es de 7 a 1. Las investigaciones en la síntesis tridimensional se centran sobre todo en sistemas mecánicos de una topología concreta como por ejemplo [10-26], donde trabajan principalmente métodos de síntesis estructural de tipo y síntesis dimensional de trayectoria de mecanismos particulares, dejando de lado aquellas metodologías más generales válidas para cualquier tipo de mecanismo. Evidentemente sí que existen trabajos en este campo como pueden ser [27-32], donde se describen diferentes metodologías para síntesis cinemática espacial.

Con la intención de continuar dando pasos en la dirección de este campo no tan explorado como ocurre con la síntesis de sistemas mecánicos planos, los autores del presente trabajo en [33] introducían una función de error basada en la mínima distancia. En ese trabajo se desarrollaba asimismo el requerimiento de distancia entre dos puntos. Ese desarrollo incluía las primeras y segundas derivadas de la función de error con enfoque analítico, tratando de buscar las derivadas exactas con el fin de minimizar el error cometido en los cálculos, ya que estas derivadas se calculan bastantes veces en el proceso SQP que se va a emplear para la resolución del problema de mínima distancia. En este desarrollo, las variables de diseño eran las posiciones y orientaciones de los elementos del mecanismo, pues trabajaban en el espacio. Esta función de error de mínima distancia ya se introdujo anteriormente en [34] para optimización de síntesis cinemática para mecanismos planos, donde las variables de diseño eran en ese caso las dimensiones de los elementos y las coordenadas nodales.

En este trabajo los autores van a desarrollar el método de mínima distancia con las ecuaciones de restricción para diferentes tipos de pares, y se va a probar con diferentes topologías de mecanismos para validar el funcionamiento.

2. El problema de mínima distancia

Para definir la síntesis cinemática los autores van a definir el problema de mínima distancia, ya que este problema se resuelve en cada punto de la síntesis. Posteriormente, se seguirá una metodología SQP, y para cada punto de síntesis se tomará como posición inicial la posición solución del punto de síntesis anterior, ya que este método al ser explotativo, funciona muy bien con una solución inicial buena.

Por tanto, en este documento se va a tratar el problema de mínima distancia. La función de error que se va a emplear es la indicada en [33], que expresa el error cometido en un instante por el mecanismo:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_R} w_i f_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

Donde:

- $f(\mathbf{x})$ es la función de error del problema de mínima distancia
- N_R es el número de requerimientos en la posición considerada
- w_i es el factor de ponderación del requerimiento i
- $f_i(\mathbf{x})$ es la función de error del requerimiento i
- $\mathbf{x}$ es el vector que define la posición y orientación de cada sólido del mecanismo

En esta función de error las $f_i(\mathbf{x})$ representarán distancias (lineales o angulares, lo que hace muy necesario el uso de coeficientes de ponderación) desde un punto predefinido del mecanismo a otro punto también establecido que puede simbolizar un punto de otro elemento del mecanismo como un punto de precisión o síntesis.

El vector $\mathbf{x}$ se puede formular como sigue:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Estando cada vector $\mathbf{x}_i$ compuesto por dos partes.

$$\mathbf{x}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_j \\ \mathbf{o}_j \end{Bmatrix} \quad (3)$$

El vector de coordenadas $\mathbf{r}_j$ define la posición del sólido j y $\mathbf{o}_j$ es el vector que define la orientación de dicho sólido.

2.1. Requerimiento de distancia entre dos puntos

En [33] se desarrolló el requerimiento de distancia entre dos puntos, partiendo de la expresión en la ecuación (4) y aplicando las expresiones (5-6), y se llegó a la ecuación (7).

$$f(\mathbf{x}) = ((\mathbf{r}_{c1} - \mathbf{r}_{c2})^T (\mathbf{r}_{c1} - \mathbf{r}_{c2}) - d^2)^2 = g^2(\mathbf{x}) \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{c1} = \mathbf{r}_m + \mathbf{r}_{c1m}^L = \mathbf{r}_m + \mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{r}}_{c1m}^L \quad (5)$$

$$\mathbf{r}_{c2} = \mathbf{r}_p + \mathbf{r}_{c2p}^L = \mathbf{r}_p + \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{c2p}^L \quad (6)$$

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{r}_m^T \mathbf{r}_m + 2\mathbf{r}_m^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \bar{\mathbf{r}}_{c1m}^L + (\bar{\mathbf{r}}_{c1m}^L)^T \bar{\mathbf{r}}_{c1m}^L - 2\mathbf{r}_m^T \mathbf{r}_p - 2\mathbf{r}_m^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{c2p}^L + \\ - 2(\bar{\mathbf{r}}_{c1m}^L)^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_m)^T \mathbf{r}_p - 2(\bar{\mathbf{r}}_{c1m}^L)^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_m)^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{c2p}^L + \mathbf{r}_p^T \mathbf{r}_p + 2\mathbf{r}_p^T \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \bar{\mathbf{r}}_{c2p}^L + (\bar{\mathbf{r}}_{c2p}^L)^T \bar{\mathbf{r}}_{c2p}^L - d^2 \quad (7)$$

Las primeras y segundas derivadas con respecto a las variables $\mathbf{x}$ de esta función se elaboraron también en [33], por lo que lo que queda por definir son las ecuaciones de las restricciones de los pares que se explicarán en el siguiente apartado.

3. Restricciones de los pares

Como se ha comentado en el apartado anterior, para el desarrollo de la minimización hará falta tener en cuenta las ecuaciones de las restricciones de los pares del mecanismo.

Estos pares serán de diferente naturaleza, definiéndose en base a distintas ecuaciones en función de que sean pares esféricos, de rotación, prismáticos, cilíndricos o juntas Cardan. Para introducirlas en el sistema, se van a emplear multiplicadores de Lagrange para definir la función de error ampliada. A la hora de minimizar la función de error, habrá que considerar la derivada de la función de mínima distancia, que se puede encontrar en [33], y la derivada de las ecuaciones de restricción.

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{N_R} w_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_k} \lambda_i q_i(\mathbf{x}) \quad (8)$$

Donde:

$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ es la función de error de mínima distancia ampliada

N_k es el número de ecuaciones de restricción en el par considerado

λ_i es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción i

$q_i(\mathbf{x}) = 0$ son las ecuaciones de restricción en el punto de síntesis considerado

En este apartado, por lo tanto, se van a desarrollar las derivadas de las restricciones.

3.1. Primeras derivadas de las restricciones

Si se expresa cada restricción de la forma (9), tal y como se hizo previamente en [35-37]:

$$q_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (9)$$

Se va a suponer que en cada par únicamente participan dos elementos del mecanismo. Por lo que en las matrices y vectores correspondientes a estas restricciones solo serán no nulos los términos relativos a las posiciones de esos dos sólidos.

Si se agrupan todas las restricciones en un vector:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0 \quad (10)$$

Se tienen las expresiones (en general no lineales) de las restricciones. Para poder incorporarlas en el proceso de optimización, se calcula la serie de Taylor de las restricciones:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{q}(x_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0} (\mathbf{x} - x_0) = \mathbf{0} \quad (11)$$

Que se pueden escribir como:

$$\mathbf{H}(x_0) \mathbf{x} = \mathbf{H}(x_0) x_0 - \mathbf{q}_p(x_0) = \mathbf{b}(x_0) \quad (12)$$

Siendo:

$$\mathbf{H}(x_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0} \quad (13)$$

Así pues, el problema de mínima distancia con restricciones de pares se reduce a la minimización de (8) sujeta a (10), para lo que emplearemos las expresiones linealizadas de las restricciones (13), a las que habrá que añadir las obtenidas en [33] en su ecuación (6) (linealización de la derivada de la función de error $f(\mathbf{x})$ respecto de $\mathbf{x}$).

3.2. Segundas derivadas de las restricciones

Para las segundas derivadas, habrá que desarrollar el término:

$$\sum_{i=1}^{N_K} \lambda_i \frac{\partial^2 q_i(x)}{\partial x^2} \quad (14)$$

Y agrupándolo en un vector:

$$\lambda^T \frac{\partial^2 \mathbf{q}(x)}{\partial x^2} \quad (15)$$

Considerando la ecuación (15), si se desarrolla tal cual la derivada de un vector por una matriz, el resultado sería una hipermatriz. Para evitarlo, se puede expresar la ecuación (15) de otra forma:

$$\frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial x} \quad (16)$$

Y ahora se estaría derivando un vector que resultaría de premultiplicar el vector traspuesto de los λ por la matriz de las derivadas $\frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x}$. Y el resultado ahora sería una matriz.

$$\frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial x_p} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial o_p} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial r_m} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial o_m} \end{pmatrix} \quad (17)$$

3.3. Par esférico

En el caso del par esférico el vector $\mathbf{q}(x)$ englobará 3 ecuaciones relativas a las 3 coordenadas de posición de los sólidos implicados en el par. Por tanto, el vector de los multiplicadores de Lagrange también tendrá un conjunto de 3 multiplicadores.

Estas restricciones, considerando que se trabaja con los sólidos M y P , se expresan como indica la ecuación (18):

$$\mathbf{q}(x) = \mathbf{r}_p + \mathbf{R}(\mathbf{o}_p) \mathbf{r}_{cp}^L - \mathbf{r}_m - \mathbf{R}(\mathbf{o}_m) \mathbf{r}_{cm}^L = 0 \quad (18)$$

Si uno se detiene a analizar el término de la primera derivada de la restricción:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial r_p} & \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial o_p} & \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial r_m} & \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial o_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{r}_{cp}^L) & -\mathbf{I} & -\mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{r}_{cm}^L) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Por tanto, si premultiplicamos por el vector traspuesto de los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x} = [\lambda^T \quad \lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{r}_{cp}^L) \quad -\lambda^T \quad -\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{r}_{cm}^L)] \quad (20)$$

Si ahora se deriva nuevamente respecto de x :

$$\frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial x_p} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial o_p} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial r_m} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}(x)}{\partial x})}{\partial o_m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Donde $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ son los únicos términos de la matriz no nulos, que a su vez son matrices.

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial (\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{r}_{cp}^L))}{\partial o_p}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\partial (\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{r}_{cm}^L))}{\partial o_m} \quad (22)$$

Para calcular estas matrices, recordar la expresión de $\mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v})$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v}) = \frac{d(\mathbf{R}(\mathbf{o})\mathbf{v})}{d\mathbf{o}} = \frac{d}{d\mathbf{o}} \begin{Bmatrix} (o_0^2 + o_1^2 - o_2^2 - o_3^2)v_1 + 2(o_1o_2 - o_0o_3)v_2 + 2(o_1o_3 + o_0o_2)v_3 \\ 2(o_1o_2 + o_0o_3)v_1 + (o_0^2 - o_1^2 + o_2^2 - o_3^2)v_2 + 2(o_2o_3 - o_0o_1)v_3 \\ 2(o_1o_3 - o_0o_2)v_1 + 2(o_2o_3 + o_0o_1)v_2 + (o_0^2 - o_1^2 - o_2^2 + o_3^2)v_3 \end{Bmatrix} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} o_0v_1 - o_3v_2 + o_2v_3 & o_1v_1 + o_2v_2 + o_3v_3 & -o_2v_1 + o_1v_2 + o_0v_3 & -o_3v_1 - o_0v_2 + o_1v_3 \\ o_3v_1 + o_0v_2 - o_1v_3 & o_2v_1 - o_1v_2 - o_0v_3 & o_1v_1 + o_2v_2 + o_3v_3 & o_0v_1 - o_3v_2 + o_2v_3 \\ -o_2v_1 + o_1v_2 + o_0v_3 & o_3v_1 + o_0v_2 - o_1v_3 & -o_0v_1 + o_3v_2 - o_2v_3 & o_1v_1 + o_2v_2 + o_3v_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Donde:

$$\mathbf{R}(\mathbf{o}) = \begin{bmatrix} o_0^2 + o_1^2 - o_2^2 - o_3^2 & 2(o_1o_2 - o_0o_3) & 2(o_1o_3 + o_0o_2) \\ 2(o_1o_2 + o_0o_3) & o_0^2 - o_1^2 + o_2^2 - o_3^2 & 2(o_2o_3 - o_0o_1) \\ 2(o_1o_3 - o_0o_2) & 2(o_2o_3 + o_0o_1) & o_0^2 - o_1^2 - o_2^2 + o_3^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Es la matriz de rotación en función del sistema de orientación elegido [38-42]. En este caso se ha representado con una parametrización redundante de cuaterniones.

Por lo tanto, al premultiplicar (23) por el vector de multiplicadores se obtiene una matriz fila:

$$\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v}) = 2[B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \quad (25)$$

Donde los términos B_1 , B_2 , B_3 , y B_4 son las siguientes expresiones:

$$B_1 = \lambda_1(o_0v_1 - o_3v_2 + o_2v_3) + \lambda_2(o_3v_1 + o_0v_2 - o_1v_3) + \lambda_3(-o_2v_1 + o_1v_2 + o_0v_3) \quad (26)$$

$$B_2 = \lambda_1(o_1v_1 + o_2v_2 + o_3v_3) + \lambda_2(o_2v_1 - o_1v_2 - o_0v_3) + \lambda_3(o_3v_1 + o_0v_2 - o_1v_3) \quad (27)$$

$$B_3 = \lambda_1(-o_2v_1 + o_1v_2 + o_0v_3) + \lambda_2(o_1v_1 + o_2v_2 + o_3v_3) + \lambda_3(-o_0v_1 + o_3v_2 - o_2v_3) \quad (28)$$

$$B_4 = \lambda_1(-o_3v_1 - o_0v_2 + o_1v_3) + \lambda_2(o_0v_1 - o_3v_2 + o_2v_3) + \lambda_3(o_1v_1 + o_2v_2 + o_3v_3) \quad (29)$$

Por lo tanto, las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ se obtienen con las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial(\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}, \mathbf{v}))}{\partial \mathbf{o}} = 2 \begin{bmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial o_0} & \frac{\partial B_2}{\partial o_0} & \frac{\partial B_3}{\partial o_0} & \frac{\partial B_4}{\partial o_0} \\ \frac{\partial B_1}{\partial o_1} & \frac{\partial B_2}{\partial o_1} & \frac{\partial B_3}{\partial o_1} & \frac{\partial B_4}{\partial o_1} \\ \frac{\partial B_1}{\partial o_2} & \frac{\partial B_2}{\partial o_2} & \frac{\partial B_3}{\partial o_2} & \frac{\partial B_4}{\partial o_2} \\ \frac{\partial B_1}{\partial o_3} & \frac{\partial B_2}{\partial o_3} & \frac{\partial B_3}{\partial o_3} & \frac{\partial B_4}{\partial o_3} \end{bmatrix} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 & -\lambda_2v_3 + \lambda_3v_2 & \lambda_1v_3 - \lambda_3v_1 & -\lambda_1v_2 + \lambda_2v_1 \\ -\lambda_2v_3 + \lambda_3v_2 & \lambda_1v_1 - \lambda_2v_2 - \lambda_3v_3 & \lambda_1v_2 + \lambda_2v_1 & \lambda_1v_3 + \lambda_3v_1 \\ \lambda_1v_3 - \lambda_3v_1 & \lambda_1v_2 + \lambda_2v_1 & -\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 - \lambda_3v_3 & \lambda_2v_3 + \lambda_3v_2 \\ -\lambda_1v_2 + \lambda_2v_1 & \lambda_1v_3 + \lambda_3v_1 & \lambda_2v_3 + \lambda_3v_2 & -\lambda_1v_1 - \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Donde el vector $\mathbf{v}$ representa a $\mathbf{r}_{cp}^L$ para la matriz $\mathbf{A}_1$ y a $\mathbf{r}_{cm}^L$ para la matriz $\mathbf{A}_2$.

Así quedará:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial(\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{r}_{cp}^L))}{\partial \mathbf{o}_p} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \lambda_1x_p + \lambda_2y_p + \lambda_3z_p & -\lambda_2z_p + \lambda_3y_p & \lambda_1z_p - \lambda_3x_p & -\lambda_1y_p + \lambda_2x_p \\ -\lambda_2z_p + \lambda_3y_p & \lambda_1x_p - \lambda_2y_p - \lambda_3z_p & \lambda_1y_p + \lambda_2x_p & \lambda_1z_p + \lambda_3x_p \\ \lambda_1z_p - \lambda_3x_p & \lambda_1y_p + \lambda_2x_p & -\lambda_1x_p + \lambda_2y_p - \lambda_3z_p & \lambda_2z_p + \lambda_3y_p \\ -\lambda_1y_p + \lambda_2x_p & \lambda_1z_p + \lambda_3x_p & \lambda_2z_p + \lambda_3y_p & -\lambda_1x_p - \lambda_2y_p + \lambda_3z_p \end{bmatrix} \quad (31)$$

Y:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\partial(\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{r}_{cm}^L))}{\partial \mathbf{o}_m} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \lambda_1x_m + \lambda_2y_m + \lambda_3z_m & -\lambda_2z_m + \lambda_3y_m & \lambda_1z_m - \lambda_3x_m & -\lambda_1y_m + \lambda_2x_m \\ -\lambda_2z_m + \lambda_3y_m & \lambda_1x_m - \lambda_2y_m - \lambda_3z_m & \lambda_1y_m + \lambda_2x_m & \lambda_1z_m + \lambda_3x_m \\ \lambda_1z_m - \lambda_3x_m & \lambda_1y_m + \lambda_2x_m & -\lambda_1x_m + \lambda_2y_m - \lambda_3z_m & \lambda_2z_m + \lambda_3y_m \\ -\lambda_1y_m + \lambda_2x_m & \lambda_1z_m + \lambda_3x_m & \lambda_2z_m + \lambda_3y_m & -\lambda_1x_m - \lambda_2y_m + \lambda_3z_m \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.4. Par de rotación

En el caso del par de rotación el vector $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ se podrá desglosar en dos partes:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{q}_2(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

De esta manera, $\mathbf{q}_1(\mathbf{x})$ coincidiría con las ecuaciones de restricción del par esférico, que ya son conocidas. Por lo que este apartado se centrará en estudiar el componente $\mathbf{q}_2(\mathbf{x})$. Este vector añade tres ecuaciones de restricción más para considerar el eje común de los dos sólidos implicados en el par.

Por tanto, en este caso habrá seis multiplicadores de Lagrange en el vector λ .

Las nuevas restricciones se pueden escribir como:

$$\mathbf{q}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_m = R(\mathbf{o}_p)\mathbf{u}_p^L - R(\mathbf{o}_m)\mathbf{u}_m^L \quad (34)$$

Siendo $\mathbf{u}_p$ y $\mathbf{u}_m$ los vectores $\mathbf{u}$ pertenecientes a los sólidos P y M respectivamente, y la condición es que ambos tienen que coincidir. Nosotros conocemos las coordenadas locales de estos dos vectores, es decir, $\mathbf{u}_p^L$ y $\mathbf{u}_m^L$.

Para las restricciones de coordenadas necesitamos $\mathbf{H}(\mathbf{x})$. Ya se definió también esta matriz en el apartado del par esférico (ver ecuación (13)). Tal y como se ha hecho con las ecuaciones de restricción, se puede dividir en dos partes:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (35)$$

En la ecuación (13) se definió $\mathbf{H}_1(\mathbf{x})$ que correspondía al par esférico. Pero ahora hará falta también $\mathbf{H}_2(\mathbf{x})$, correspondiente al vector común.

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{dr_p} & \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{do_p} & \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{dr_m} & \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{do_m} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Analizamos cada término por separado. Teniendo en cuenta la ecuación (34):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{dr_p} &= 0 & ; & & \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{do_p} &= \frac{d(R(\mathbf{o}_p)\mathbf{u}_p^L)}{do_p} = \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{u}_p^L) \\ \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{dr_m} &= 0 & ; & & \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{do_m} &= \frac{-d(R(\mathbf{o}_m)\mathbf{u}_m^L)}{do_m} = -\mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{u}_m^L) \end{aligned} \quad (37)$$

Por tanto, la matriz $\mathbf{H}_2(\mathbf{x})$ se podrá escribir:

$$\mathbf{H}_2(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{u}_p^L) \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{u}_m^L)] \quad (38)$$

Por tanto, si premultiplicamos por el vector traspuesto de los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = [\mathbf{0}^T \quad \lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{u}_p^L) \quad \mathbf{0}^T \quad -\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{u}_m^L)] \quad (39)$$

Si ahora se deriva nuevamente respecto de $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}})}{\partial r_p} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}})}{\partial o_p} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}})}{\partial r_m} \\ \frac{\partial (\lambda^T \frac{\partial \mathbf{q}_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}})}{\partial o_m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Donde $\mathbf{A}_3$ y $\mathbf{A}_4$ son los únicos términos de la matriz no nulos, que a su vez son matrices.

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\partial (\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_p, \mathbf{u}_p^L))}{\partial o_p} \quad , \quad \mathbf{A}_4 = \frac{\partial (\lambda^T \mathbf{S}(\mathbf{o}_m, \mathbf{u}_m^L))}{\partial o_m} \quad (41)$$

Siguiendo los mismos desarrollos de las expresiones del (23) al (30), se obtienen las matrices $\mathbf{A}_3$ y $\mathbf{A}_4$, sin más que sustituir en la expresión (30) el vector $\mathbf{v}$ por el vector $\mathbf{u}_p^L$ para la matriz $\mathbf{A}_3$ y por $\mathbf{u}_m^L$ para la matriz $\mathbf{A}_4$.

Así quedará:

$$A_3 = \frac{\partial(\lambda^T S(o_p, u_p^L))}{\partial o_p} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{xp} + \lambda_2 u_{yp} + \lambda_3 u_{zp} & -\lambda_2 u_{zp} + \lambda_3 u_{yp} & \lambda_1 u_{zp} - \lambda_3 u_{xp} & -\lambda_1 u_{yp} + \lambda_2 u_{xp} \\ -\lambda_2 u_{zp} + \lambda_3 u_{yp} & \lambda_1 u_{xp} - \lambda_2 u_{yp} - \lambda_3 u_{zp} & \lambda_1 u_{yp} + \lambda_2 u_{xp} & \lambda_1 u_{zp} + \lambda_3 u_{xp} \\ \lambda_1 u_{zp} - \lambda_3 u_{xp} & \lambda_1 u_{yp} + \lambda_2 u_{xp} & -\lambda_1 u_{xp} + \lambda_2 u_{yp} - \lambda_3 u_{zp} & \lambda_2 u_{zp} + \lambda_3 u_{yp} \\ -\lambda_1 u_{yp} + \lambda_2 u_{xp} & \lambda_1 u_{zp} + \lambda_3 u_{xp} & \lambda_2 u_{zp} + \lambda_3 u_{yp} & -\lambda_1 u_{xp} - \lambda_2 u_{yp} + \lambda_3 u_{zp} \end{bmatrix}$$

(42)

Y:

$$A_4 = \frac{\partial(\lambda^T S(o_m, u_m^L))}{\partial o_m} =$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{xm} + \lambda_2 u_{ym} + \lambda_3 u_{zm} & -\lambda_2 u_{zm} + \lambda_3 u_{ym} & \lambda_1 u_{zm} - \lambda_3 u_{xm} & -\lambda_1 u_{ym} + \lambda_2 u_{xm} \\ -\lambda_2 u_{zm} + \lambda_3 u_{ym} & \lambda_1 u_{xm} - \lambda_2 u_{ym} - \lambda_3 u_{zm} & \lambda_1 u_{ym} + \lambda_2 u_{xm} & \lambda_1 u_{zm} + \lambda_3 u_{xm} \\ \lambda_1 u_{zm} - \lambda_3 u_{xm} & \lambda_1 u_{ym} + \lambda_2 u_{xm} & -\lambda_1 u_{xm} + \lambda_2 u_{ym} - \lambda_3 u_{zm} & \lambda_2 u_{zm} + \lambda_3 u_{ym} \\ -\lambda_1 u_{ym} + \lambda_2 u_{xm} & \lambda_1 u_{zm} + \lambda_3 u_{xm} & \lambda_2 u_{zm} + \lambda_3 u_{ym} & -\lambda_1 u_{xm} - \lambda_2 u_{ym} + \lambda_3 u_{zm} \end{bmatrix}$$

(43)

4. Aplicación en ejemplos de mecanismos

Todo lo descrito hasta ahora desde el punto de vista teórico se ha puesto a prueba con algunos ejemplos de mecanismos. El objetivo de este apartado es, por tanto, presentar varios ejemplos cuya topología vaya creciendo en complejidad.

Se van a realizar cuatro pruebas con cada mecanismo, de tal forma que se definirán puntos objetivos cada vez más alejados de la configuración inicial.

4.1. Péndulo espacial

Se busca que el extremo libre del péndulo ocupe la posición del mecanismo de tal forma que cumpla la mínima distancia con respecto de un punto definido por el usuario.

En este mecanismo hay un par esférico en el punto fijo, por tanto, habrá 3 restricciones. Además, hay un único sólido por lo que solo se aplicará la norma unitaria del cuaternion una vez. Esto hace que para este ejemplo se tengan 4 restricciones y, por consiguiente, 4 multiplicadores de Lagrange.

Desde un sistema de referencia global las variables de diseño son: $x_1 = (0.0, 2.5, 0.0, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0)$ siendo las 3 primeras las cartesianas del marcador y las 4 siguientes el cuaternion.

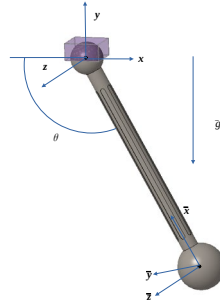


Figura 1: Mecanismo de péndulo simple

a) Punto 1

Se desea que el extremo libre del péndulo se acerque al punto de coordenadas $P(0.0, 0.0, 6.5)$.

En la Tabla 1 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 14 iteraciones. La Figura 2 muestra la posición final del péndulo.

Tabla 1: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 67.25000000000000$	$\ d\ = 51.091371928728989$
Iteración 2	$f(x) = 16.900985828072066$	$\ d\ = 69.151947239373385$
Iteración 3	$f(x) = 3.934502287561005$	$\ d\ = 5.410186472619777$
Iteración 4	$f(x) = 1.639765804594753$	$\ d\ = 1.746058715957305$
Iteración 5	$f(x) = 2.247815759892246$	$\ d\ = 0.183535167337333$

Iteración 6	$f(x) = 2.249992147184748$	$\ d\ = 0.005666757582195$
Iteración 7	$f(x) = 2.24999984061258$	$\ d\ = 0.000215369105461$
Iteración 8	$f(x) = 2.24999999939521$	$\ d\ = 0.000013343646052$
Iteración 9	$f(x) = 2.2499999999774$	$\ d\ = 0.000000816645730$
Iteración 10	$f(x) = 2.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000049999909$
Iteración 11	$f(x) = 2.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000003061215$
Iteración 12	$f(x) = 2.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000187422$
Iteración 13	$f(x) = 2.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000011475$
Iteración 14	$f(x) = 2.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000000701$

En la Tabla 2 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (7 variables). Debajo (últimos 4 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

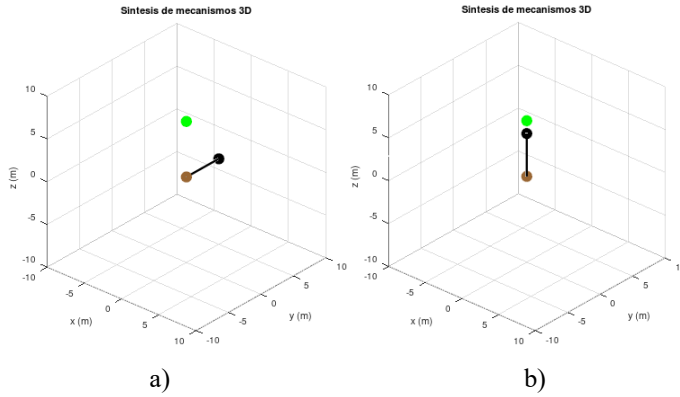


Figura 2: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

Tabla 2: Resultados del problema	
coordenadas iniciales	coordenadas finales
0.0	1.279873626854062e-25
2.5	-1.535088292534069e-15
0.0	2.500000000000000e+00
1.0	7.071067811865474e-01
0.0	7.071067811865477e-01
0.0	-8.655199941245973e-16
0.0	-8.655199941608005e-16
0.0	-5.119897957605417e-25
0.0	6.140353170136212e-15
0.0	3.000000000000000e+00
0.0	1.499999999999999e+01

b) Punto 2

Se desea que el extremo libre del péndulo se acerque al punto de coordenadas P(0.0,0.0,19.5).

En la Tabla 3 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 25 iteraciones. La Figura 3 muestra la posición final del péndulo.

Tabla 3: Resultados del problema		
iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 405.250000000000000$	$\ d\ = 53.869284485355038$
Iteración 2	$f(x) = 70.427797392094533$	$\ d\ = 170.081719905530463$
Iteración 3	$f(x) = 195.076443447581909$	$\ d\ = 23.062639160016168$
Iteración 4	$f(x) = 207.606689502797792$	$\ d\ = 6.588614636066852$
Iteración 5	$f(x) = 209.862538601651124$	$\ d\ = 4.226075387649783$
Iteración 6	$f(x) = 210.234613381355018$	$\ d\ = 0.714644730682395$
Iteración 7	$f(x) = 210.249124106013284$	$\ d\ = 0.186779158114128$
Iteración 8	$f(x) = 210.249955021321284$	$\ d\ = 0.041754477705286$
Iteración 9	$f(x) = 210.249997646529579$	$\ d\ = 0.009584164399195$
Iteración 10	$f(x) = 210.249999877382095$	$\ d\ = 0.002185956398343$
Iteración 11	$f(x) = 210.24999993605286$	$\ d\ = 0.000499288950856$
Iteración 12	$f(x) = 210.24999999666585$	$\ d\ = 0.000114003903918$
Iteración 13	$f(x) = 210.24999999982606$	$\ d\ = 0.000026032750412$
Iteración 14	$f(x) = 210.2499999999147$	$\ d\ = 0.000005944467426$
Iteración 15	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000001357399056$
Iteración 16	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000309957199$
Iteración 17	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000070777629$
Iteración 18	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000016161817$
Iteración 19	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000003690511$
Iteración 20	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000842718$
Iteración 21	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000192427$
Iteración 22	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000043946$
Iteración 23	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000010037$
Iteración 24	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000002301$
Iteración 25	$f(x) = 210.250000000000000$	$\ d\ = 0.000000000000505$

En la Tabla 4 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (7 variables). Debajo (últimos 4 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

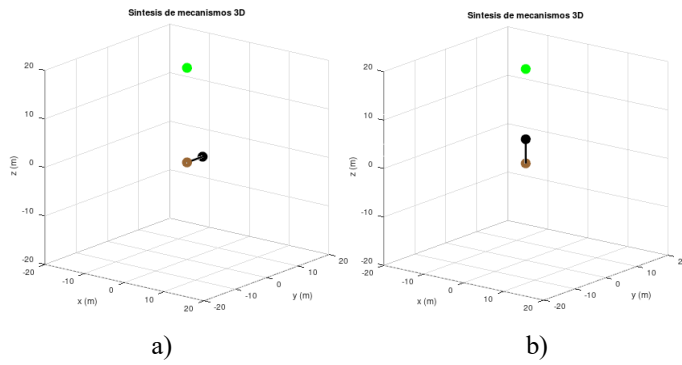


Figura 3: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

c) Punto 3

Se desea que el extremo libre del péndulo se acerque al punto de coordenadas $P(6.0, 5.5, -2.5)$.

En la Tabla 5 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 13 iteraciones. La Figura 4 muestra la posición final del péndulo.

Tabla 5: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 42.50000000000000$	$\ d\ = 25.379880476608822$
Iteración 2	$f(x) = 2.983212500928590$	$\ d\ = 11.517777182291750$
Iteración 3	$f(x) = 8.754648862199499$	$\ d\ = 2.291657379872299$
Iteración 4	$f(x) = 12.296863458590840$	$\ d\ = 0.457673720334611$
Iteración 5	$f(x) = 12.352922256620497$	$\ d\ = 0.013992308057704$
Iteración 6	$f(x) = 12.353068126355002$	$\ d\ = 0.000041583556365$
Iteración 7	$f(x) = 12.353068170161528$	$\ d\ = 0.000002377031977$
Iteración 8	$f(x) = 12.353068170367020$	$\ d\ = 0.000000163840914$
Iteración 9	$f(x) = 12.353068170367985$	$\ d\ = 0.000000011295079$
Iteración 10	$f(x) = 12.353068170367992$	$\ d\ = 0.000000000778713$
Iteración 11	$f(x) = 12.353068170367994$	$\ d\ = 0.000000000053687$
Iteración 12	$f(x) = 12.353068170367994$	$\ d\ = 0.000000000003702$
Iteración 13	$f(x) = 12.353068170367994$	$\ d\ = 0.000000000000256$

En la Tabla 6 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (7 variables). Debajo (últimos 4 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

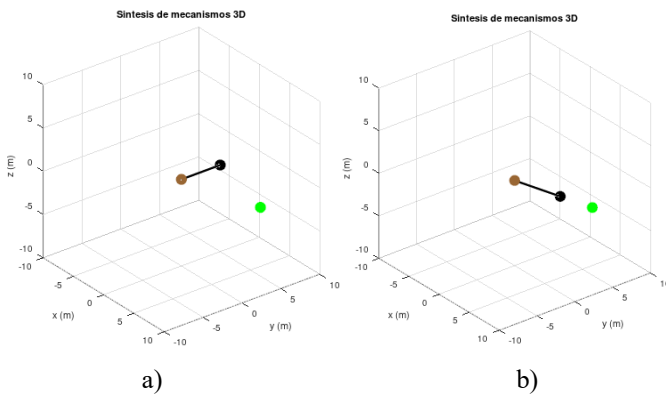


Figura 4: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

d) Punto 4

Se desea que el extremo libre del péndulo se acerque al punto de coordenadas $P(-20.0, -20.0, 20.0)$.

En la Tabla 7 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 26 iteraciones. La Figura 5 muestra la posición final del péndulo.

Tabla 7: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 1425.00000000000000$	$\ d\ = 76.762259245316557$
Iteración 2	$f(x) = 706.202330208430112$	$\ d\ = 204.360740931338029$

Iteración 3	$f(x) = 490.254866589458970$	$\ d\ = 73.162300256221528$
Iteración 4	$f(x) = 637.232243087939423$	$\ d\ = 35.468910750105913$
Iteración 5	$f(x) = 857.468621916710390$	$\ d\ = 14.799573869892054$
Iteración 6	$f(x) = 876.787769290607343$	$\ d\ = 9.553361237706655$
Iteración 7	$f(x) = 878.568051887255933$	$\ d\ = 0.495497656563047$
Iteración 8	$f(x) = 878.588731528652033$	$\ d\ = 0.013635575293279$
Iteración 9	$f(x) = 878.589757443561666$	$\ d\ = 0.002460589123757$
Iteración 10	$f(x) = 878.589832490267327$	$\ d\ = 0.000652622334155$
Iteración 11	$f(x) = 878.589838042269093$	$\ d\ = 0.000172106434567$
Iteración 12	$f(x) = 878.589838453351376$	$\ d\ = 0.000046445582411$
Iteración 13	$f(x) = 878.589838483790231$	$\ d\ = 0.000012591304489$
Iteración 14	$f(x) = 878.589838486044187$	$\ d\ = 0.000003421938764$
Iteración 15	$f(x) = 878.589838486211193$	$\ d\ = 0.000000930730118$
Iteración 16	$f(x) = 878.589838486223584$	$\ d\ = 0.000000253230176$
Iteración 17	$f(x) = 878.589838486224380$	$\ d\ = 0.000000068906155$
Iteración 18	$f(x) = 878.589838486224494$	$\ d\ = 0.000000018750797$
Iteración 19	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000005102571$
Iteración 20	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000001388552$
Iteración 21	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000000377860$
Iteración 22	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000000102825$
Iteración 23	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000000027980$
Iteración 24	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000000007617$
Iteración 25	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000000002079$
Iteración 26	$f(x) = 878.589838486224608$	$\ d\ = 0.000000000000566$

En la Tabla 8 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (7 variables). Debajo (últimos 4 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

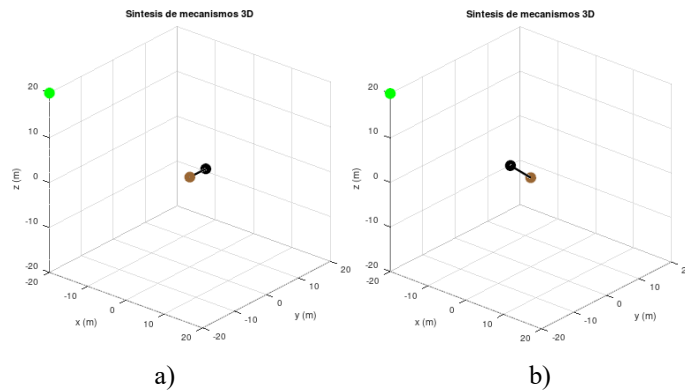


Figura 5: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

Tabla 8: Resultados del problema	
coordenadas iniciales	coordenadas finales
0.0	-1.443375672974065
2.5	-1.443375672974085
0.0	1.443375672974044
1.0	0.393940677325520
0.0	0.214481198721161
0.0	0.236929542593350
0.0	0.861784746900263
0.0	-3.422649730810375e+01
0.0	-3.422649730810366e+01
0.0	3.422649730810382e+01
0.0	2.964101615137754e+02

4.2. Cuadrilátero RRSS

Se busca que el punto del acoplador del cuadrilátero articulado se acerque lo más posible a un punto definido por el usuario.

En este mecanismo hay dos pares de rotación en los puntos de la izquierda, por tanto, habrá 6 restricciones por cada par. En los puntos de la derecha hay dos pares esféricos, por tanto, habrá 3 restricciones más por cada par. Además, hay tres sólidos por lo que se aplicará la norma unitaria del cuaternión tres veces. Esto hace que para este ejemplo se tengan 21 restricciones y, por consiguiente, 21 multiplicadores de Lagrange.

Desde un sistema de referencia global las variables de diseño son: $x_1 = (0, 2.5, 0, 1.0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (2.5, 2., 0, 1.0, 0, 0, 0)$, $x_3 = (2., 2.5, 0, 1.0, 0, 0, 0)$ siendo las 3 primeras las cartesianas del marcador y las 4 siguientes el cuaternión de cada uno de los 3 sólidos.

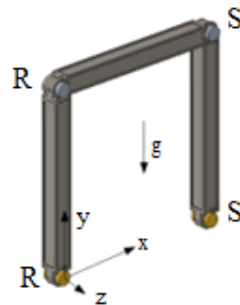


Figura 6: Mecanismo de cuadrilátero articulado

a) Punto 1

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(5.0,5.0,0.0)$.

En la Tabla 9 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 6 iteraciones. La Figura 7 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 9: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 8.500000000000000$	$\ d\ = 11.634001891008930$
Iteración 2	$f(x) = 2.249999999999973$	$\ d\ = 15.492400435939036$
Iteración 3	$f(x) = 0.252373962617635$	$\ d\ = 9.604675230080437$
Iteración 4	$f(x) = 0.227707038256016$	$\ d\ = 1.476055699115391$
Iteración 5	$f(x) = 0.261183263048220$	$\ d\ = 0.014818894083502$
Iteración 6	$f(x) = 0.261378577122083$	$\ d\ = 0.000000995592534$

En la Tabla 10 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (21 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

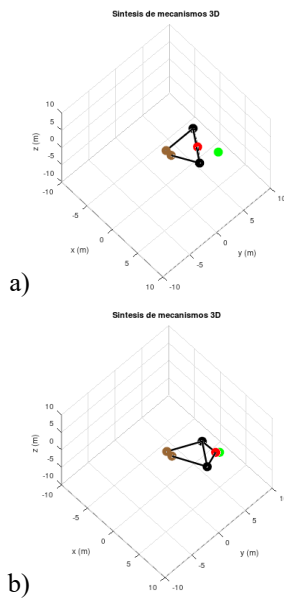


Tabla 10: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	1.076398021757062e+00	2.459377112785761e-01
2.5	2.256405836448196e+00	5.155484085950287e-01
0	3.057026359867851e-22	4.426329992111687e-22
1	9.753364379995445e-01	-1.692598322011956e-21
0	-1.577233918792332e-22	3.774589451367082e-21
0	1.466029929018347e-22	1.312494883575333e+00
0	-2.207234303610761e-01	-2.459377112785761e-01
2.5	3.806012109336233e+00	-5.155484085950287e-01
2	3.387255526048235e+00	-2.198343147988066e-22
0	-9.343830236137601e-22	1.269842601516535e-21
1	9.556694075126226e-01	-4.743351631294311e-21
0	9.016511945045211e-23	2.310368408916035e-01
2	2.179417623574247e-22	4.537038497767228e-01
0	-2.944418169086600e-01	2.301164405753379e-01
2	3.229614087579171e+00	-1.567320189350729e-21
2.5	1.130849689600039e+00	4.537038497767228e-01
0	-1.463268867555454e-22	2.301164405753379e-01
1	8.521560525631487e-01	-2.092532384417716e-21
0	2.816178590525982e-14	1.312494883575304e+00
0	4.586049798280455e-14	1.081458042683743e+00
0	-5.232877431012428e-01	2.543623200895146e+00

Figura 7: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

Cuando se han probado puntos en ubicaciones detrás del mecanismo de tal forma que obligaría al sistema a modificar la configuración, esto no ha sido posible, y el algoritmo ha dado como óptima la solución con el punto más cercano posible con la configuración actual.

b) Punto 2

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(15.0,17.0,0.0)$.

En la Tabla 11 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 8 iteraciones. La Figura 8 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 11: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 338.500000000000000$	$\ d\ = 76.271554330563106$
Iteración 2	$f(x) = 110.2500000000000227$	$\ d\ = 82.296754125868205$
Iteración 3	$f(x) = 40.852538098099011$	$\ d\ = 136.531622243064703$
Iteración 4	$f(x) = 251.397738077550514$	$\ d\ = 56.201107040770211$
Iteración 5	$f(x) = 259.714605997406352$	$\ d\ = 5.646706883663581$
Iteración 6	$f(x) = 259.971628734436649$	$\ d\ = 0.050215547127676$
Iteración 7	$f(x) = 259.975039231677556$	$\ d\ = 0.000002354184729$
Iteración 8	$f(x) = 259.975039424372824$	$\ d\ = 0.000000000000016$

En la Tabla 12 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (últimos 21 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

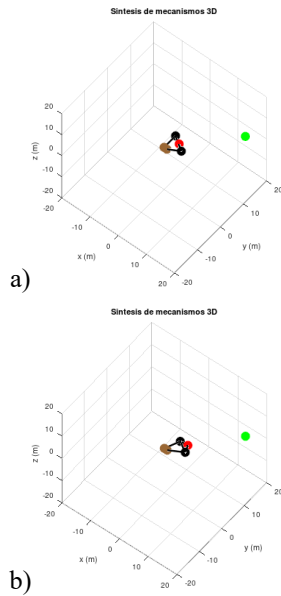


Figura 8: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

c) Punto 3

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(0,0,8,0,4,0)$.

En la Tabla 13 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 8 iteraciones. La Figura 9 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 13: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 42.50000000000000$	$\ d\ = 60.149397336965407$
Iteración 2	$f(x) = 18.250000000000668$	$\ d\ = 14.683036060475379$
Iteración 3	$f(x) = 19.037500845399464$	$\ d\ = 0.956480881550120$
Iteración 4	$f(x) = 19.049543789408624$	$\ d\ = 0.028428580156127$
Iteración 5	$f(x) = 19.049659923082086$	$\ d\ = 0.000925766357639$
Iteración 6	$f(x) = 19.049660018162008$	$\ d\ = 0.000033663081208$
Iteración 7	$f(x) = 19.049660018275834$	$\ d\ = 0.000001223162718$
Iteración 8	$f(x) = 19.049660018275986$	$\ d\ = 0.00000044443301$

En la Tabla 14 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (últimos 21 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

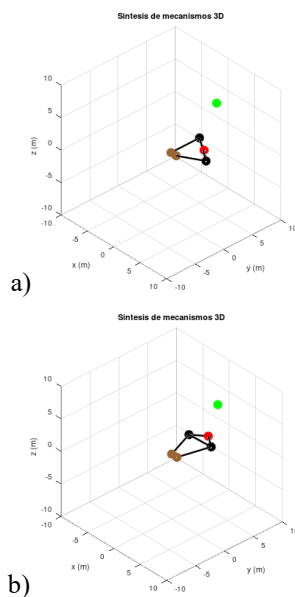


Figura 9: a) Mecanismo en la posición inicial

Tabla 14: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	-9.058106843971223e-01	-6.594764383787474e-01
2.5	2.330130254735133e+00	1.696453826192217e+00
0	1.927574005393873e-23	8.000000000000000e+00
1	9.828662426531022e-01	-8.945173316600588e-01
0	1.914646506325774e-24	-5.005804605109694e+01
0	3.826832283691301e-24	4.248515537102577e+00
0	1.843202350610843e-01	6.594764383787474e-01
2.5	1.859354122239872e-01	-1.696453826192217e+00
2	4.759088170618750e+00	-8.000000000000000e+00
0	-2.495256215311229e-24	1.538748828201402e+01
1	9.996945509777264e-01	1.277596197533481e+01
0	-2.220621844077997e-24	6.036073061205688e-01
0	4.952231804646060e-24	4.358471056534979e-01
0	2.471446429607607e-02	1.789034661042936e+00
2	1.591746096621109e+00	-1.740190179062620e-25
2.5	2.428957915883617e+00	4.358471056534979e-01
0	-5.185365306635695e-24	1.789034661042936e+00
1	9.928703758178725e-01	-1.259778192005338e-23
0	-6.910491502462731e-15	4.248515537103439e+00
0	-5.756104176152082e-14	3.644908230983253e+00
0	-1.191990638523506e-01	9.206801450448937e+00

y, b) en la posición solución

d) Punto 4

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(18.0, 15.0, -16.0)$.

En la Tabla 15 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 12 iteraciones. La Figura 10 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 15: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 628.50000000000000$	$\ d\ = 244.624344659306814$
Iteración 2	$f(x) = 328.24999999978797$	$\ d\ = 114.945667993583911$
Iteración 3	$f(x) = 283.286203975273509$	$\ d\ = 294.667516172545390$
Iteración 4	$f(x) = 522.941661156685200$	$\ d\ = 188.233566270777033$
Iteración 5	$f(x) = 538.108831824299045$	$\ d\ = 40.462069039321598$
Iteración 6	$f(x) = 539.822715187040330$	$\ d\ = 3.267478228895072$
Iteración 7	$f(x) = 539.958370470132309$	$\ d\ = 0.273283991964859$
Iteración 8	$f(x) = 539.964911033454655$	$\ d\ = 0.011957572554346$
Iteración 9	$f(x) = 539.964920619756299$	$\ d\ = 0.000624137406801$
Iteración 10	$f(x) = 539.964920646983956$	$\ d\ = 0.000031765526443$
Iteración 11	$f(x) = 539.964920647054555$	$\ d\ = 0.000001618062998$
Iteración 12	$f(x) = 539.964920647054669$	$\ d\ = 0.00000082416666$

En la Tabla 16 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (últimos 21 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

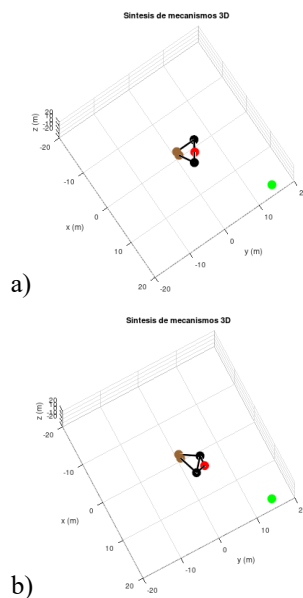


Tabla 16: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	1.317620620320073e+00	9.996844361005849e+00
2.5	2.124588407411503e+00	1.611934369616249e+01
0	1.338466873629618e-23	-3.200000000000000e+01
1	9.617264067718535e-01	1.642206696878709e+02
0	4.411124135839193e-24	1.318364437929785e+02
0	1.135809279506248e-24	4.344512112291363e+01
0	-2.740115298991986e-01	-9.996844361005849e+00
2.5	4.171042026181121e+00	-1.611934369616249e+01
2	2.968038279327438e+00	3.200000000000000e+01
0	2.289476233674836e-23	-7.989294998738620e+01
1	9.401862562201405e-01	4.137214281357702e+00
0	4.181376332109204e-24	7.947795794462589e+00
0	-1.771769781879526e-25	1.573936378338856e+01
0	-3.406608336964440e-01	5.640878566871169e+00
2	3.353421405861048e+00	1.395042941755834e-23
2.5	8.434498719159360e-01	1.573936378338856e+01
0	2.222914997883413e-23	5.640878566871169e+00
1	8.177346601332165e-01	1.620759554332318e-23
0	-5.883114534509364e-12	4.344512112290433e+01
0	-8.358001031130786e-12	3.549732532844217e+01
0	-5.755953662224991e-01	8.359830789436320e+01

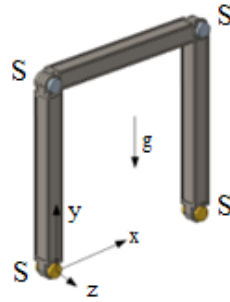
Figura 10: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

4.3. Cuadrilátero SSSS

Se busca que el punto del acoplador del cuadrilátero articulado se acerque lo más posible a un punto definido por el usuario.

En este mecanismo hay cuatro pares esféricos en los puntos de ensamblaje, por tanto, habrá 3 restricciones por cada par. Además, hay tres sólidos por lo que se aplicará la norma unitaria del cuaternion tres veces. Esto hace que para este ejemplo se tengan 15 restricciones y, por consiguiente, 15 multiplicadores de Lagrange.

Desde un sistema de referencia global las variables de diseño son: $x_1 = (0, 2.5, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (2.5, 2., 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $x_3 = (2., 2.5, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ siendo las 3 primeras las cartesianas del marcador y las 4 siguientes el cuaternion de cada uno de los 3 sólidos.

**Figura 11:** Mecanismo de cuadrilátero articulado**a) Punto 1**

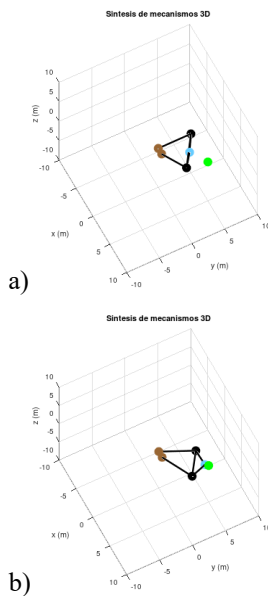
Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(5.0,5.0,0.0)$.

En la Tabla 17 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 7 iteraciones. La Figura 12 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 17: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 8.500000000000000$	$\ d\ = 12.794530081249542$
Iteración 2	$f(x) = 2.249999999999976$	$\ d\ = 18.889162311291461$
Iteración 3	$f(x) = 0.25237396261763$	$\ d\ = 10.05867705983022$
Iteración 4	$f(x) = 0.227707038256029$	$\ d\ = 1.665798494415494$
Iteración 5	$f(x) = 0.261183263048219$	$\ d\ = 0.016086122515527$
Iteración 6	$f(x) = 0.261378577122082$	$\ d\ = 0.000001086680527$
Iteración 7	$f(x) = 0.261378595311040$	$\ d\ = 0.000000000000003$

En la Tabla 18 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (15 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

**Tabla 18:** Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	1.076398021757062e+00	2.459377112785756e-01
2.5	2.256405836448196e+00	5.155484085950277e-01
0	-9.471214009877887e-27	5.670650952208553e-30
1	9.753364379995445e-01	-2.459377112785756e-01
0	4.412032998224955e-12	-5.155484085950277e-01
0	1.949596624964398e-11	-1.922517437267025e-30
0	-2.207234303610760e-01	4.537038497767230e-01
2.5	3.806012109336232e+00	2.301164405753386e-01
2	3.387255526048235e+00	-1.773315644475346e-29
0	1.739426054320122e-27	4.537038497767230e-01
1	9.556694075126226e-01	2.301164405753386e-01
0	-2.132407304832787e-27	-2.145047207131925e-29
0	-4.754426807169507e-27	2.856026608042236e+00
0	-2.944418169086601e-01	8.504212017921389e-01
2	3.229614087579170e+00	2.543623200895145e+00
2.5	1.130849689600039e+00	
0	1.121105598080656e-26	
1	8.521560525631486e-01	
0	-2.224012206574737e-12	
0	-3.621727219474191e-12	
0	-5.232877431012427e-01	

Figura 12: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución**b) Punto 2**

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(15.0,17.0,0.0)$.

En la Tabla 19 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 8 iteraciones. La Figura 13 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 19: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 338.500000000000000$	$\ d\ = 84.891106719136914$
Iteración 2	$f(x) = 110.249999999999773$	$\ d\ = 88.960556796588264$
Iteración 3	$f(x) = 40.852538098102713$	$\ d\ = 162.365728774242342$
Iteración 4	$f(x) = 251.397738077552816$	$\ d\ = 65.311452429841808$

Iteración 5	$f(x) = 259.714605997400326$	$\ d\ = 6.433033187096609$
Iteración 6	$f(x) = 259.971628734441481$	$\ d\ = 0.058405365276165$
Iteración 7	$f(x) = 259.975039231677613$	$\ d\ = 0.000002586511514$
Iteración 8	$f(x) = 259.975039424372824$	$\ d\ = 0.000000000000008$

En la Tabla 20 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (15 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

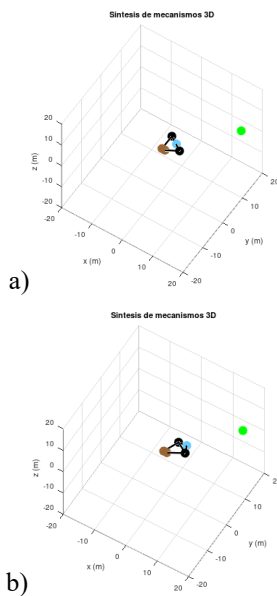


Figura 13: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

Tabla 20: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	9.857609734126714e-01	7.082811225875163e+00
2.5	2.297449739014219e+00	1.650745286257312e+01
0	4.010513715167490e-25	-1.120741718076974e-24
1	9.795355776095341e-01	-7.082811225875163e+00
0	-3.780195620378078e-11	-1.650745286257312e+01
0	-1.839725753153094e-10	1.120764712524952e-24
0	-2.012710913100941e-01	1.399022062519179e+01
2.5	3.662527297252362e+00	7.902124894967236e+00
2	3.526957108409555e+00	9.626530693798684e-25
0	-1.626962598589395e-25	1.399022062519179e+01
1	9.605994678359731e-01	7.902124894967236e+00
0	1.032817397273765e-25	9.626515005173357e-25
0	2.212068352189432e-25	8.981400431885008e+01
0	-2.779364358864184e-01	2.696567202690383e+01
2	3.176766323839690e+00	8.033832382449903e+01
2.5	1.229507369395336e+00	
0	-5.637488734515440e-25	
1	8.636558770014058e-01	
0	-1.415301742848643e-10	
0	-2.424871343360972e-10	
0	-5.040818645031110e-01	

c) Punto 3

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(0.0,8.0,4.0)$.

En la Tabla 21 se muestran algunos resultados del problema. La solución se obtiene en 146 iteraciones. La Figura 14 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 21: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 42.500000000000000$	$\ d\ = 13.513696755514417$
Iteración 20	$f(x) = 7.158930624590221$	$\ d\ = 1.159221372907010$
Iteración 40	$f(x) = 200.378760663130350$	$\ d\ = 1795.255742300247221$
Iteración 60	$f(x) = 9.328487825185004$	$\ d\ = 1.963925257263125$
Iteración 80	$f(x) = 9.703848480344018$	$\ d\ = 2.012765482054928$
Iteración 100	$f(x) = 9.766824935390355$	$\ d\ = 2.198996048673334$
Iteración 120	$f(x) = 9.778865167539152$	$\ d\ = 5.902903162906547$
Iteración 140	$f(x) = 9.782522801056828$	$\ d\ = 0.000671693724750$
Iteración 146	$f(x) = 9.782522888743967$	$\ d\ = 0.000000910938370$

En la Tabla 22 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (15 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

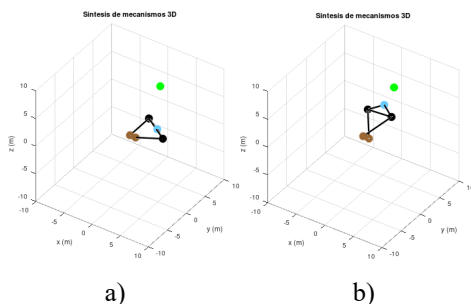


Figura 14: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

Tabla 22: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	1.132447272129799e+00	1.633137145477630e+00
2.5	1.993502057308199e+00	2.874890813462026e+00
0	9.967510839491307e-01	1.437445486473689e+00
1	-8.021140029418629e-01	-1.633137145477630e+00
0	-3.052668684593183e-01	-2.874890813462026e+00
0	-5.052856001769899e-01	-1.437445486473689e+00
0	9.006512954191494e-02	-1.972123690745608e+00
2.5	2.693293462831389e-01	2.711892137621711e+00
2	3.867942693613916e+00	1.355945988880934e+00
0	1.933971346854990e+00	-1.972123690745608e+00
1	7.650142563142775e-03	2.711892137621711e+00
0	-3.240641641174382e-02	1.355945988880934e+00
0	9.727093188273176e-01	1.802663560668680e+01
0	2.296255224503812e-01	2.163595746203456e+00

2	-3.631179258466601e-01	1.808467607012689e+01
2.5	1.874440636305717e+00	
0	9.372202629058596e-01	
1	9.242947656451894e-01	
0	2.427182858192403e-01	
0	-1.434130867879496e-01	
0	2.572930361821449e-01	

d) Punto 4

Se desea que el acoplador del cuadrilátero se acerque al punto de coordenadas $P(18.0,15.0,16.0)$.

En la Tabla 23 se muestran algunos resultados del problema. La solución se obtiene en 110 iteraciones. La Figura 15 muestra la posición final del cuadrilátero.

Tabla 23: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 628.50000000000000$	$\ d\ = 73.024242549992707$
Iteración 20	$f(x) = 69154.542053754528752$	$\ d\ = 1425.598416841687822$
Iteración 40	$f(x) = 536.407780103924893$	$\ d\ = 167.221843470904673$
Iteración 60	$f(x) = 470.137116852008205$	$\ d\ = 41.686330418327955$
Iteración 80	$f(x) = 476.699689804072307$	$\ d\ = 0.152116828555150$
Iteración 100	$f(x) = 476.699790505374210$	$\ d\ = 0.000045160764090$
Iteración 110	$f(x) = 476.699790505383021$	$\ d\ = 0.000000778707014$

En la Tabla 24 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (21 variables). Al lado (15 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

Tabla 24: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
0	0.909568674419215	8.827988183709717e+00
2.5	1.592670379470388	1.545795901500985e+01
0	1.698848400791818	1.648848957741492e+01
1	-0.121628635110526	-8.827988183709717e+00
0	0.148757169422229	-1.545795901500985e+01
0	0.896515784030169	-1.648848957741492e+01
0	0.399170676091579	1.856309116717454e+01
2.5	3.539583570956590	7.801348698415028e+00
2	2.487833194276287	8.321438651165433e+00
0	2.653688741119798	1.856309116717454e+01
1	-0.884944377817494	7.801348698415028e+00
0	-0.383386233058451	8.321438651165433e+00
0	-0.105092488661018	1.213210782207654e+02
0	0.242577849972939	3.666657873467167e+01
2	3.130014896537376	1.089375665714318e+02
2.5	0.895162814805899	
0	0.954840340327980	
1	-0.647253058002842	
0	0.137924461062143	
0	0.509996119462834	
0	0.549494567834422	

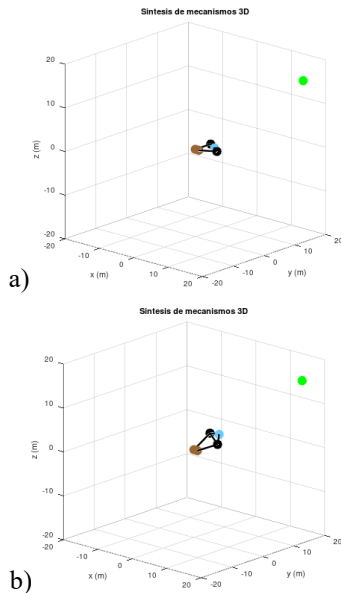


Figura 15: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

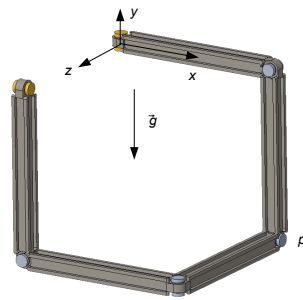
Como comentario de este ejemplo, destacar que si el punto de síntesis se ubica en la coordenada z negativa, no converge o tarda muchas iteraciones en converger. Por eso se ha resuelto el ejemplo del *punto objetivo 4* en el espacio con las 3 coordenadas positivas.

4.4. Bricard

Se busca que un punto elegido (P en la Figura 16) del mecanismo Bricard cumpla con la condición de mínima distancia con un punto definido por el usuario.

En este mecanismo hay seis pares de rotación, y 6 restricciones en cada par. Además, hay cinco sólidos por lo que se aplicará la norma unitaria del cuaternion cinco veces. Esto hace que para este ejemplo se tengan 41 restricciones y, por consiguiente, 41 multiplicadores de Lagrange.

Desde un sistema de referencia global las variables de diseño son: $x_1 = (2.5, 0, 0, 1.0, 0, 0, 0)$, $x_2 = (5, -2.5, 0, 1.0, 0, 0, 0)$, $x_3 = (5, -5, 2.5, 1.0, 0, 0, 0)$, $x_4 = (2.5, -5, 5, 1.0, 0, 0, 0)$, $x_5 = (0, -2.5, 5, 1.0, 0, 0, 0)$, siendo las 3 primeras las cartesianas del marcador y las 4 siguientes el cuaternion de cada sólido.

**Figura 16:** Mecanismo Bricard*a) Punto 1*

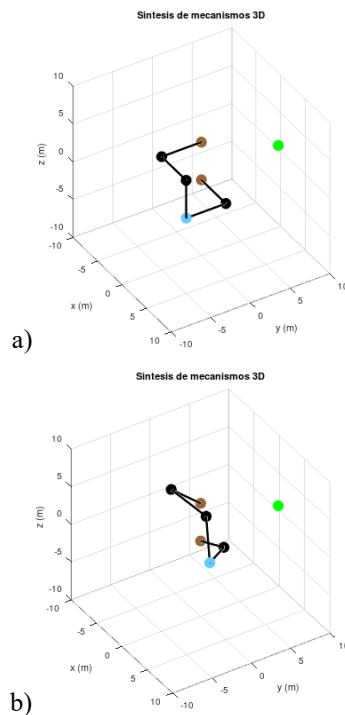
Se desea que el punto P del sistema mecánico se acerque al punto de coordenadas $P(6.0,6.0,6.0)$.

En la Tabla 25 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 17 iteraciones. La Figura 17 muestra la posición final del Bricard.

Tabla 25: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 158.00000000000000$	$\ d\ = 137.005840116179144$
Iteración 2	$f(x) = 130.812656250000657$	$\ d\ = 567.548465027703514$
Iteración 3	$f(x) = 138.346884765614703$	$\ d\ = 5998.604882004126921$
Iteración 4	$f(x) = 146.890332639990959$	$\ d\ = 333.854175585770804$
Iteración 5	$f(x) = 129.985903277891651$	$\ d\ = 42536.282448929501697$
Iteración 6	$f(x) = 139.856475928373385$	$\ d\ = 615.482096533871868$
Iteración 7	$f(x) = 129.165534712338058$	$\ d\ = 42096.675460947641113$
Iteración 8	$f(x) = 79.125128139883543$	$\ d\ = 20241.100464428611303$
Iteración 9	$f(x) = 89.948760857197414$	$\ d\ = 11053.012025598614855$
Iteración 10	$f(x) = 107.110566696925574$	$\ d\ = 27286.774079439393972$
Iteración 11	$f(x) = 119.269790977501316$	$\ d\ = 5085.845131637202030$
Iteración 12	$f(x) = 105.618594237344738$	$\ d\ = 537.766794267988757$
Iteración 13	$f(x) = 104.775520536822697$	$\ d\ = 76125.965368974240846$
Iteración 14	$f(x) = 104.758216069917978$	$\ d\ = 5.976383611874137$
Iteración 15	$f(x) = 104.761515682454998$	$\ d\ = 0.010364204920302$
Iteración 16	$f(x) = 104.761502623128081$	$\ d\ = 0.000003942197344$
Iteración 17	$f(x) = 104.761502623597806$	$\ d\ = 0.00000014411454$

En la Tabla 26 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (35 variables). Al lado (41 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

**Figura 17:** a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución**Tabla 26:** Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
2.5	2.292877825799609e+00	9.403164427787964e+02
0	6.844325359610842e-04	3.204722215851795e+03
0	9.968971287572745e-01	1.432777955783682e+03
1	9.790843811179579e-01	-1.053246632169789e+04
0	-9.429302712498718e-05	-9.004866677580707e+03
0	-2.036312096620159e-01	-1.595063900336031e+04
0	1.108015626914927e-04	-9.403164427763712e+02
5	6.105236385222863e+00	-3.204722215851798e+03
-2.5	-1.870618912803880e+00	-1.432777955789259e+03
0	2.654938506253418e+00	-1.434194965729571e+04
1	9.155252298171642e-01	-1.042741099616605e+04
0	-7.230158575790284e-02	2.121270982636572e+04
0	-1.903207170691813e-01	-9.435658770217603e+02
0	3.469665564922222e-01	-3.185237002484109e+03
5	6.104686430579275e+00	-1.427410121320240e+03
-5	-2.995801707127599e+00	4.494824665849489e+04
2.5	5.155206087251321e+00	6.874476642815277e+04
1	8.815469930822222e-01	3.089107163851103e+04
0	-2.572185671154156e-01	-9.435658770294604e+02
0	-2.569820191397577e-01	-3.185237002510172e+03
0	3.011823490385330e-01	-1.427410121341233e+03
2.5	2.292186711488587e+00	-2.916517723722351e+04
-5	-2.994250013910089e+00	3.441000690387860e+04
5	7.656729398217831e+00	-4.447660440251342e+04
1	9.152883277609721e-01	-9.435658770270431e+02
0	-3.474546030693431e-01	-3.185237002536254e+03
0	7.247855273298520e-02	-1.427410121362230e+03
0	1.903593212687572e-01	1.044632447207815e+04
0	-1.411596674331463e-04	4.957497828144001e+04

-2.5	-1.869751652122331e+00	3.188354132551057e+04
5	6.659564688462654e+00	-9.435658770270471e+02
1	9.348497972551306e-01	-3.185237002549942e+03
0	-3.550519238985267e-01	-1.427410121377653e+03
0	9.328740880090909e-05	3.196239880662351e+04
0	-5.998070713646397e-05	-1.045722310474713e+04
		-4.677673599883212e+03
		-8.999073422475221e+03
		-6.772827511965325e+04
		3.049710066845155e+04
		-1.635407059627463e+03
		3.196527696152222e+04

b) Punto 2

Se desea que el punto P del sistema mecánico se acerque al punto de coordenadas $P(16.0,18.0,4.0)$.

En la Tabla 27 se muestran los resultados del problema. La solución se obtiene en 19 iteraciones. La Figura 18 muestra la posición final del Bricard.

Tabla 27: Resultados del problema

iteraciones	Función error	error
Iteración 1	$f(x) = 666.0000000000000$	$\ d\ = 368.295578603929130$
Iteración 2	$f(x) = 581.097656250041723$	$\ d\ = 334.728062563669084$
Iteración 3	$f(x) = 581.767822265628070$	$\ d\ = 1634.724947791487693$
Iteración 4	$f(x) = 616.065078735404995$	$\ d\ = 11971.325537065791650$
Iteración 5	$f(x) = 639.365578656310277$	$\ d\ = 858.790893140153003$
Iteración 6	$f(x) = 596.981761651204692$	$\ d\ = 73209.387061728295521$
Iteración 7	$f(x) = 621.415277135263864$	$\ d\ = 1882.736997371862572$
Iteración 8	$f(x) = 591.883888087461742$	$\ d\ = 128517.102608913148288$
Iteración 9	$f(x) = 345.689240107458943$	$\ d\ = 52285.284105031583749$
Iteración 10	$f(x) = 421.800467512172133$	$\ d\ = 63788.010694995035010$
Iteración 11	$f(x) = 498.805696555388636$	$\ d\ = 17595.386052539073717$
Iteración 12	$f(x) = 546.549463254242141$	$\ d\ = 21078.071395868002583$
Iteración 13	$f(x) = 478.845761372688685$	$\ d\ = 116127.760538215065026$
Iteración 14	$f(x) = 510.429956456501827$	$\ d\ = 14636.914488178757892$
Iteración 15	$f(x) = 470.480880796634551$	$\ d\ = 1870.285665207106831$
Iteración 16	$f(x) = 469.673466621278124$	$\ d\ = 18.046749824186886$
Iteración 17	$f(x) = 469.670875914598696$	$\ d\ = 0.004573639440506$
Iteración 18	$f(x) = 469.670875635656273$	$\ d\ = 0.000010594726167$
Iteración 19	$f(x) = 469.670875619065157$	$\ d\ = 0.00000062644668$

En la Tabla 28 se muestran los valores de las coordenadas del mecanismo iniciales y finales (35 variables). Al lado (41 valores) se muestran los multiplicadores de Lagrange, uno por cada restricción.

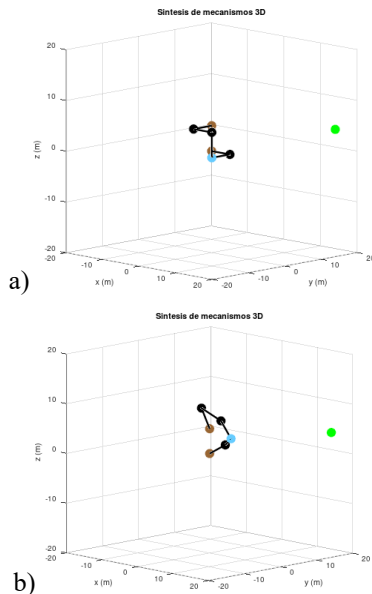


Figura 18: a) Mecanismo en la posición inicial y, b) en la posición solución

Tabla 28: Resultados del problema

coordenadas iniciales	coordenadas finales	Multiplicadores Lagrange
2.5	2.205085657020173e+00	2.770423257236716e+02
0	1.486000072723250e-03	1.929742720261747e+03
0	1.178401705739526e+00	4.493442069191709e+02
1	9.700753273977478e-01	-5.892961286671459e+03
0	-2.213794107835564e-04	-6.719515916981986e+03
0	-2.429428106971067e-01	-9.433081184560715e+03
0	2.285959212929359e-04	-2.770423257216252e+02
5	6.374444291736029e+00	-1.929742720261750e+03
-2.5	-1.132200306526430e+00	-4.493442069229948e+02
0	3.407109980079756e+00	-8.577585298330232e+03
1	8.271731739579246e-01	-5.540086317924519e+03
0	-1.271729618009790e-01	1.323206332781771e+04
0	-2.069399356910513e-01	-2.617197602666779e+02
0	5.067521206837320e-01	-1.889207975062289e+03
5	6.373955900954511e+00	-4.502590400378577e+02
-5	-1.731178387081065e+00	3.107448605635355e+04
2.5	5.907528066177782e+00	9.609849297964662e+04
1	7.713548077918595e-01	2.282264174238102e+04
0	-3.243505310565182e-01	-2.617197602728821e+02
0	-3.237301644121452e-01	-1.889207975105200e+03
0	4.416398368245436e-01	-4.502590400553478e+02
2.5	2.204454499231529e+00	-5.405068318858339e+04
-5	-1.726064601188274e+00	3.930427784856879e+04
5	8.409648507360293e+00	-9.015823345766190e+04
1	8.264967009607872e-01	-2.617197602708609e+02
0	-5.07766464692871e-01	-1.889207975148152e+03
0	1.274928339809127e-01	-4.502590400728108e+02
0	2.068416867651772e-01	5.697242618681917e+03
0	-1.427670071255858e-04	7.914819768352050e+04

-2.5	-1.128572520706362e+00	2.945137738150366e+04
5	7.230828715522741e+00	-2.617197602708713e+02
1	8.518806988409159e-01	-1.889207975175125e+03
0	-5.237508990658840e-01	-4.502590400864617e+02
0	1.369680712021637e-04	4.308600134999146e+04
0	-1.122573749103385e-04	-5.660702511643570e+03
		-1.398452846964602e+03
		-6.712822181248993e+03
		-8.958557541525102e+04
		-6.813793567124846e+03
		2.593990056462709e+04
		4.308907122563310e+04

5. Conclusiones

Se ha desarrollado un método de resolución del problema de mínima distancia. Para ello se han implementado las ecuaciones correspondientes a los pares de tipo R y S. El método se ha probado con diferentes topologías de mecanismos espaciales y los resultados demuestran que converge de forma eficaz en todos los casos probados.

La línea futura principal será llegar a desarrollar la síntesis dimensional donde se optimice una función de error compuesta por el sumatorio de las funciones de mínima distancia minimizadas a su vez en cada punto de síntesis. Posteriormente habrá que probar el método en varios ejemplos de diversa índole tipológica tanto planos como espaciales, para demostrar el carácter genérico del algoritmo válido para cualquier mecanismo. Con ello se tratará de demostrar la eficiencia y robustez del método.

Otra de las líneas futuras será tratar de elaborar las ecuaciones de restricción de otros tipos de pares como el prismático, el par plano, el cilíndrico o la junta universal, para poder aplicar más ejemplos diferentes con el fin de poder seguir trabajando sobre el carácter general del método.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen al Gobierno Vasco por su apoyo económico a este trabajo de investigación a través de la financiación del Grupo de investigación (IT1542-22). Los autores también agradecen el apoyo al proyecto PID2021-124677NB-I00 financiado por el ministerio de ciencia e innovación a través de la agencia estatal de investigación MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por el programa “ERDF A way of making Europe”.

7. Referencias

- [1] Liu, Y. and McPhee, J. “Automated Kinematic Synthesis of Planar Mechanisms with Revolute Joints”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines* **35**(4), pp.405–445 (2007). <https://doi.org/10.1080/15397730701647779>
- [2] Hartenberg, R. and Denavit J. “Kinematic synthesis of linkages”, *New York: McGraw-Hill*, (1964). ISBN 978-0070269101
- [3] McCarthy, J.M. “Kinematic synthesis”, *21st Century Kinematics: The 2012 NSF Workshop*. London: Springer London, pp.13-48 (2001).
- [4] Babichev, D., Evgrafov, A. and Lebedev, S. “Structural-kinematic synthesis method for (planar) link”, *IFTOMM World Congress on Mechanism and Machine Science*. Cham: Springer International Publishing, pp.2937-2953 (2019).
- [5] Murray, A.P., Schmiedeler, J.P. and Korte, B.M. “Kinematic synthesis of planar, shape-changing rigid-body mechanisms”, *J. Mech. Des.* **130**(3) 032302 (2008) <https://doi.org/10.1115/1.2829892>
- [6] Erdman, A.G. “Three and four precision point kinematic synthesis of planar linkages”, *Mechanism and Machine Theory* **16**(3), pp.227-245 (1981). [https://doi.org/10.1016/0094-114X\(81\)90038-0](https://doi.org/10.1016/0094-114X(81)90038-0)
- [7] Pucheta, M.A., and Cardona, A. “Topological and dimensional synthesis of planar linkages for multiple kinematic tasks”, *Multibody System Dynamics* **29**, pp.189-211 (2013). <https://doi.org/10.1007/s11044-011-9294-3>
- [8] De-Juan, A., Sancibrian, R., García, P., Viadero, F., Iglesias, M., Fernández, A. “Kinematic synthesis for linkages with velocity targets”, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* **6**(4), pp.472-483 (2012). <https://doi.org/10.1299/jamdsm.6.472>

- [9] Dharmalingum, W.E., Padayachee, J., Bright, G. “Synthesis of a novel five-degrees-of-freedom parallel kinematic manipulator”, *South African Journal of Industrial Engineering* **32**(1), pp.131-143 (2021). <https://doi.org/10.7166/32-1-2382>
- [10] Azizian, K. and Cardou, P., “The dimensional synthesis of spatial cable-driven parallel mechanisms”, *Journal of Mechanisms and Robotics* **5**(4), 044502 (2013). <https://doi.org/10.1115/1.4025173>
- [11] Chu, J. and Sun, J., “A New Approach to Dimension Synthesis of Spatial Four-Bar Linkage Through Numerical Atlas Method”, *ASME. J. Mechanisms Robotics* **2**(4), 041004. (2010). <https://doi.org/10.1115/1.4001774>
- [12] Ananthasuresh, G.K. and Kramer S.N., “Analysis and Optimal Synthesis of the RSCR Spatial Mechanisms”, *J. Mech. Des.* **116**(1), pp.174-181 (1994). <https://doi.org/10.1115/1.2919342>
- [13] Li, X., Wu, T., Liu, W., Zhou, Z., Zhao, J., “Kinematic analysis and dimension synthesis of a spatial RRPCR mechanism”, *6th International Conference on Mechanical Engineering and Automation Science (ICMEAS)*, Moscow, Russia, pp. 87-92 (2020). doi: [10.1109/ICMEAS51739.2020.00024](https://doi.org/10.1109/ICMEAS51739.2020.00024)
- [14] Mudrov, A.G., Sakhapov R. L. “Synthesis of the six-part spatial mechanism”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* (2020). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/786/1/012055>
- [15] Sharma, S. and Purwar, A. “A Machine Learning Approach to Solve the Alt–Burmester Problem for Synthesis of Defect-Free Spatial Mechanisms”, *ASME. J. Comput. Inf. Sci. Eng.* **22**(2). (2022). <https://doi.org/10.1115/1.4051913>
- [16] Doroftei, I., Doroftei, I.A., “Dimensional synthesis and comparative simulation of two planar deployable mechanisms”, *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **1262**. (2022). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1262/1/012043>
- [17] Long, S., Terakawa, T., Komori, M., “Type synthesis of 6-DOF mobile parallel link mechanisms based on screw theory”, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* **16**(1), (2022). <https://doi.org/10.1299/jamdsm.2022jamdsm0005>
- [18] Kai, L., Yu, J., Kong, X., “Structure synthesis and reconfiguration analysis of variable-degree-of-freedom single-loop mechanisms with prismatic joints using dual quaternions”, *Journal of Mechanisms and Robotics* **14**(2) (2022). <https://doi.org/10.1115/1.4052338>
- [19] Yim N. H., Ryu J., Kim Y. Y., “Big data approach for synthesizing a spatial linkage mechanism”, *2023 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, London, United Kingdom, pp.7433-7439, (2023). [10.1109/ICRA48891.2023.10161300](https://doi.org/10.1109/ICRA48891.2023.10161300)
- [20] Kuan-Lun Hsu, Chih-Hsin Chung, “Singularity analysis and modular synthesis of over-constrained spatial mechanisms - A case study on Bennett and RPRP linkage”, *Mechanism and Machine Theory* **189**, (2023). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2023.105424>
- [21] Qu, Z., Hang, L., Zhong, C., Huang, X., Yin, C., “Power Release and Cinch Branches of Vehicle Side Door Latch Based on Multi-mode Mechanisms”, *Advances in Mechanism, Machine Science and Engineering in China*. (2023). https://doi.org/10.1007/978-981-19-9398-5_92
- [22] Liu, W., Zhao, Y., Qin, T. et al. “Optimal synthesis of a spatial RRSS mechanism for path generation”, *Meccanica* **58**, pp.255–285 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11012-022-01616-3>
- [23] Kai Liu, Xianwen Kong, Jingjun Yu, “Algebraic synthesis of single-loop 6R spatial mechanisms for constant velocity transmission between two adjacent parallel, intersecting or skew axes”, *Mechanism and Machine Theory* **200**, (2024). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2024.105725>
- [24] Liu, W., Qu, X., Qin, T. et al., “Dimensional synthesis of motion generation of a spatial RCCC mechanism”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* **46**(41), (2024). <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04566-3>
- [25] Khan, M. Z., Liu, J., Myska, D. H., Murray, A. P., “A Kinematic Synthesis Methodology for P-Drivable Spatial Single Degree-of-Freedom Mechanisms to Avoid Singularities”, *ASME. J. Mechanisms Robotics* **16**(11), (2024) <https://doi.org/10.1115/1.4065237>
- [26] Li, C., and X. G. Li. “Fourier series method for function synthesis of space RCCC mechanism”, *Metalurgija* **64**(1-2), pp.61-64 (2025).
- [27] Jiménez, J.M. et al, “A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms”, *Mechanism and Machine Theory* **32**(3), pp.323-341 (1997). [https://doi.org/10.1016/S0094-114X\(96\)00017-1](https://doi.org/10.1016/S0094-114X(96)00017-1)
- [28] Sandor, George N., “Principles of a general quaternion-operator method of spatial kinematic synthesis”, *J. Appl. Mech.* **35**(1), pp.40-46. (1968). <https://doi.org/10.1115/1.3601171>

- [29] Sandor, G.N. and Bisshopp K.E., “On a general method of spatial kinematic synthesis by means of a stretch-rotation tensor”, *J. Eng. Ind.* **91**(1), pp.115-121 (1969). <https://doi.org/10.1115/1.3591482>
- [30] Jensen, O.F. and Hansen J.M., “Dimensional synthesis of spatial mechanisms and the problem of non-assembly”, *Multibody System Dynamics* **15**, pp.107-133 (2006). <https://doi.org/10.1007/s11044-005-9000-4>
- [31] Sharma, S., “Analytical and Machine Learning Based Frameworks for Synthesis of Planar, Spherical and Spatial Mechanisms”, *State University of New York at Stony Brook ProQuest Dissertations & Theses*, (2020)
- [32] Lin, S., Wang, H., Zhang, Y., Jiang, J., “Kinematic Geometry Description of a Line With Four Positions and Its Application in Dimension Synthesis of Spatial Linkage”, *J. Mechanisms Robotics* **12**(3), (2020). <https://doi.org/10.1115/1.4045426>
- [33] Garcia-Marina V., Noriega A., Uriarte H. and Fernández de Bustos I., “Un planteamiento para la síntesis dimensional óptima de mecanismos espaciales”, *XXIV Congreso Nacional Ingeniería Mecánica*, (2023).
- [34] Fernández de Bustos, I., Urkullu, G., García-Marina, V., Ansola, R. “Optimization of planar mechanisms by using a minimum distance function”, *Mechanism and Machine Theory* **138**, pp.149-168 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.04.002>
- [35] Urkullu, G., de Bustos, I. F., García-Marina, V., Uriarte, H. “Direct integration of the equations of multibody dynamics using central differences and linearization”, *Mechanism and Machine Theory* **133**, pp.432-458 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.11.024>
- [36] Uriarte, H., de Bustos, I.F., Urkullu, G., Olabarrieta, A. “On Classical Newmark Integration of Multibody Dynamics”, In: Corves, B., Wenger, P., Hüsing, M. (eds) *EuCoMeS 2018. Mechanisms and Machine Science* **59**. Springer, Cham. (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-319-98020-1_12
- [37] Urkullu, G., et al. “Estudio de la eficiencia del método de integración directa mediante diferencias centrales (DIMCD).” *DYNA-Ingeniería e Industria* **96**(5) (2021).
- [38] Bauchau, O.A., Trainelli, L. “The vectorial Parameterization of Rotation”, *Nonlinear Dynamics* **32**, pp.71-92 (2003). <https://doi.org/10.1023/A:1024265401576>
- [39] Dai, J.S. “Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections”, *Mechanism and Machine Theory* **92**, pp.144-152 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.03.004>
- [40] Trainelli, L. “The parameterization of rotation and rigid motion, an attempt at a systematic framework”, *6th World Congress on Computational Mechanics*, Beijing (2004)
- [41] Zupan, E., Saje, M. and Zupan, D. “Quaternion-based dynamics of geometrically nonlinear spatial beams using the Runge–Kutta method”, *Finite Elements in Analysis and Design* **54**, pp.48-60 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.01.007>
- [42] Pucheta, M.A., Paz, C.J., and Pereyra, M.E. “Representaciones cinemáticas de orientación y ecuaciones de estimación”, *Mecánica Computacional* **33**(36), pp.2303-2324 (2014)