



Modelización de fricción seca en superficies suaves a nivel atómico y dopadas

Joaquín Solano Ramírez¹, José Andrés Moreno Nicolás¹

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica, Materiales y Fabricación. Universidad Politécnica de Cartagena.
joaquin.solano@upct.es, josea.moreno@upct.es.

La fricción seca entre superficies suaves a nivel atómico no puede entenderse a escala macroscópica sin conocer que ocurre a escala atómica. Los ensayos con estas superficies tienen un elevado coste económico y se ven afectados por la contaminación o desajustes en las instalaciones de ensayos. Por otro lado, las probetas tienen dimensiones muy reducidas por requerimientos de dichas instalaciones. Si además, se plantea que efecto puede tener la inyección de átomos de otro material en dichas superficies, el coste de la experimentación sin un análisis teórico previo puede ser prohibitivo. En este sentido, los modelos parametrizados pueden reducir el número de ensayos a realizar y proporcionar un valor de referencia con el que comparar los resultados experimentales.

Estos modelos numéricos presentan comportamientos caóticos para algunas combinaciones de los parámetros que los definen. El método de simulación por redes (MESIR), que transforma el problema mecánico original en un circuito con ecuaciones diferenciales equivalentes, combina métodos numéricos convencionales con herramientas propias de diseño de circuitos. lo que facilita la convergencia.

En este artículo se presenta un modelo numérico para el cálculo de las fuerzas de fricción de superficies suaves a nivel atómico con un patrón de inyección de átomos distintos a los de la superficie receptora. El patrón de dopado viene definido por un átomo inyectado cada 116 átomos de superficie receptora. Este modelo proporciona la fuerza de fricción para las variaciones de rigidez de la superficie en función de la naturaleza del material.

1. Introducción

La comprensión de la fricción en la nanoescala es crucial para el diseño de mecanismos con estos patrones de fricción. Aunque a partir de las pruebas realizadas en esta escala parecen funcionar las leyes de la fricción de Amontons y Coulomb, por el momento es muy difícil predecir las propiedades de fricción de un contacto determinado. Por ello, la optimización de estas propiedades en superficies de uso específico está cobrando importancia debido a la miniaturización de los sistemas mecánicos en nanotecnología [1–10].

El modelo más sencillo para interpretar los resultados experimentales relacionados con la fricción en seco es el modelo Prandtl-Tomlinson (PT), basado en los trabajos de Prandtl [11] y Tomlinson [12]. Este modelo consiste en una masa puntual arrastrada sobre una superficie, considerada como referencia del movimiento relativo, interactuando elásticamente con un punto perteneciente a la superficie con movimiento relativo. En adelante, la primera superficie se denominará móvil y la segunda fija. La interacción con la superficie fija se realiza mediante un potencial sinusoidal. Este potencial genera la fuerza de fricción a escala atómica y se considera uno de los principales mecanismos de disipación de energía a escala nanométrica [13,14].

En el modelo de Frenkel-Kontotova (FK) las masas puntuales interactúan elásticamente entre sí en lugar de con la superficie en movimiento [14–16]. Como en el modelo PT, estas masas interactúan con la superficie fija a través de un potencial sinusoidal. Combinando los modelos PT y FK se obtiene el modelo Frenkel-Kontorova-Tomlinson (FKT) [17–19].

Otro modelo común en el análisis de la fricción es el modelo Burridge-Knopoff (BK) [20], utilizado en la simulación de terremotos. En este modelo, un número discreto de masas interactúan elásticamente entre sí y con la superficie móvil. Su interacción con la superficie fija está representada por una fuerza de fricción dependiente de la velocidad. En este tipo de modelo, se considera que la fuerza de fricción disminuye asintóticamente con la velocidad, realizando los bloques un movimiento de stick-slip [21–23].

A pesar de la aparente simplicidad de los modelos anteriores, el rozamiento en seco presenta a veces comportamientos inesperados. Algunos de estos comportamientos reducen la fricción en diseños industriales, pero otros pueden bloquearlos.

Si el objetivo es reducir la fricción al inicio del movimiento es necesario revisar el análisis realizado por Aubry [24], que demostró que una fuerza muy pequeña puede vencer la fricción si la amplitud del potencial periódico, que representa la interacción entre las superficies, no supera un cierto valor límite y la relación entre las constantes de las retículas cristalinas de la capa adsorbida y la superficie del sustrato se aproxima a un número irracional. Estas condiciones producen una ruptura en la analiticidad, que es la clave para explicar esta fuerte reducción de la fuerza de fricción.

Desde un punto de vista experimental, el uso de dispositivos como los microscopios de fuerza atómica (AFM), que utilizan una punta de tamaño nanométrico sobre una superficie lisa a nivel atómico, es una vía importante para verificar los resultados de la simulación numérica utilizando los modelos mencionados [25,26].

Así, el microscopio de fuerza de barrido (SFM) [27], con alta resolución espacial, muestra que existen algunos fenómenos a nanoescala que son similares a los observados a escala macroscópica, mientras que otros son completamente diferentes. Entre estos últimos se encuentra una correspondencia entre la fuerza de fricción a nanoescala y el área de contacto. También es relevante la independencia entre la presión de contacto media y el esfuerzo cortante, que no ocurre en el mundo macroscópico [28,29]. En este sentido, Greenwood demostró que el área de contacto efectiva entre cuerpos macroscópicamente planos con rugosidad microscópica aumenta linealmente con la carga [30,31], lo que elimina cualquier contradicción entre las leyes de fricción macroscópica y nanoscópica.

La relativa independencia entre la fuerza de fricción y la velocidad de deslizamiento, tanto a escala macroscópica como nanoscópica es otro fenómeno interesante. A escala nanoscópica esta independencia se explica por el movimiento de stick-slip de los átomos sobre el potencial de interacción punta microscopio-muestra. Siempre que la velocidad de deslizamiento de los átomos sea mucho mayor que la velocidad relativa de los dos cuerpos, la energía disipada será independiente de las variaciones de la velocidad relativa de deslizamiento de los cuerpos. Estos átomos saltan de un mínimo potencial, que representa la interacción entre los dos elementos, al siguiente, [32]. Sus trayectorias son similares a una curva en diente de sierra que intenta evitar pasar por encima de la posición de un átomo de la muestra asociada al potencial máximo de la interacción. Debido a este comportamiento específico, las imágenes de AFM representan únicamente la periodicidad de los mínimos potenciales de interacción, que no suele coincidir con la estructura atómica de una muestra cuando su estructura cristalina no es trivial.

La determinación de los factores que establecen el valor de la fuerza de fricción constituye otra fuente de dificultades. En este sentido, varios ensayos con AFMs y SFMs muestran la sensibilidad de la fuerza de fricción a pequeños cambios en la estructura de la superficie o en la dirección de deslizamiento en el sistema de referencia de la red cristalina. La relación es tan clara que esta característica se ha utilizado a menudo para identificar regiones

químicamente distintas en una muestra o dominios individuales. Sin embargo, estas relaciones no han podido explicar las diferencias en la fuerza de fricción en otras superficies [33,34].

Además de los dispositivos que analizan las superficies, es necesario desarrollar las nanoestructuras que forman las superficies sobre las que se estudia la fricción. El objetivo es desarrollar la capacidad de colocar un solo átomo en una posición precisa para crear cualquier estructura deseada. Entre los avances en este campo, cabe mencionar el trabajo de Gibbons, quien desarrolló una tecnología de dopaje de materiales con varias ventajas potenciales sobre el dopaje convencional [35].

Stroccio et al. estudiaron la dinámica de un solo átomo de Co en una superficie de Cu(111) durante el barrido a baja temperatura con un microscopio de túnel de barrido (STM) [36]. Manova et al. mencionaron tecnologías de deposición, incluyendo el haz de iones y la deposición física de vapor (PVD) [37]. Sin embargo, mencionaron las dificultades de aplicar estas tecnologías, incluida la contaminación por partículas y la baja productividad [38].

En este estudio, se analizará el comportamiento friccional de varias superficies con diferentes patrones de dopaje utilizando un modelo FKT. Los resultados obtenidos pueden proporcionar indicaciones sobre el efecto del dopaje y ayudar a comprender las leyes que gobiernan esta escala [39–41].

2. El método de Simulación por Redes

Dado que los fenómenos físicos están descritos por ecuaciones diferenciales, ecuaciones en derivadas parciales, lineales o no lineales, y que la mayoría de estas ecuaciones, no tienen solución analítica, salvo contadas excepciones y haciendo grandes simplificaciones, la resolución de problemas físicos conlleva un gran conocimiento de cálculo analítico o numérico.

El Método de Simulación por Redes (MESIR) [42,43] se usa como un procedimiento para el análisis y simulación de diferentes problemas físicos descritos matemáticamente. Este procedimiento tiene dos partes claramente diferenciadas:

- Diseñar el circuito equivalente al problema físico o modelo matemático
- Resolver o simular el circuito con un programa destinado a dar solución a circuitos eléctricos

El uso de la analogía entre las ecuaciones que definen el problema físico con las ecuaciones constitutivas de los circuitos eléctricos permite usar software que ha sido verificado extensamente durante el desarrollo de sistemas electrónicos con un alto grado de integración de componentes. Además, el propio circuito, antes de iniciar el análisis, permite visualizar propiedades del modelo que en su versión matemática pueden incluir errores.

En este método, el tiempo permanece como variable continua en el diseño del modelo. Para un estudio más detallado se puede consultar, [14,44–51].

Las etapas para establecer el estudio y simulación en la versión del MESIR utilizada en este trabajo se pueden separar en:

- Elaboración de un modelo en red o circuito eléctrico equivalente al proceso
- Creación del código mediante software libre Octave
- Ejecución del código mediante software libre NGSpice
- Simulación de dicho modelo en red mediante software libre NGSpice

La equivalencia formal entre el modelo en red y el proceso físico se asegura al:

- Establecer la relación entre variables del problema y variables eléctricas (desplazamientos y voltajes)
- Interpretar los resultados obtenidos en la simulación en términos del proceso que se modela
- Incorporar las condiciones de contorno e iniciales al modelo utilizando componentes eléctricos adecuados

En el MESIR, se puede establecer una equivalencia entre las variables físicas y las variables eléctricas. En la Tabla 1 se muestra la equivalencia entre las variables mecánicas del problema a estudiar y las variables eléctricas.

Tabla 1: Equivalencia entre variables mecánicas y eléctricas.

Variable mecánica	Variable eléctrica
$x(t)$	$q(t)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$
$\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$

Tal y como se ha mostrado en la Tabla 1, cada variable eléctrica tiene asociado un componente eléctrico con una ecuación de comportamiento que tiene la misma ecuación que la variable mecánica, ver Tabla 2.

Tabla 2: Componente eléctricas y ecuación de comportamiento.

Componente eléctrico	Ecuación de comportamiento
Condensador	$V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$
Resistencia	$V_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt}$
Bobina	$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2}$

Existen otros componentes que intervienen en los circuitos eléctricos y que serán usados en este modelo, como fuentes dependientes de tensión controladas por tensión, fuentes dependientes de corriente controladas por corriente, interruptores y circuitos auxiliares.

PSpice, es la aplicación informática de la que deriva NGSpice, se desarrolló para conseguir fácilmente la convergencia con objeto de simular circuitos con altos grados de integración [62–64].

En [65] se puede encontrar un desarrollo sobre el error de truncamiento local, cometido con el MESIR como método numérico.

3. Esquema de dopaje

Consideraremos un modelo elemental de dopaje de la superficie superior del deslizamiento, compuesto por la yuxtaposición en una línea de átomos no dopados (no tratados) y dopados (tratados) completando un segmento. Un ejemplo de tal disposición puede verse en la Figura 1, donde círculos representan el primer tipo de átomos y los círculos concéntricos representan el segundo tipo.



Figura 1: Patrón de dopaje definido por $a = 1$ (círculo), $b = 3$ (círculos concéntricos).

Teniendo en cuenta que cualquier esquema de dopaje debe seguir un patrón repetido para facilitar la fabricación, se considera conveniente usar una sucesión de átomos como la siguiente:

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_i + b_i) \quad (1)$$

donde a_i y b_i para $1 \leq i \leq n$, representan el número de átomos del material original y los dopados, respectivamente. El signo + en la Ecuación 1 significa aquí sólo la yuxtaposición de átomos.

La Figura 2 muestra un ejemplo bidimensional de dopaje [66].

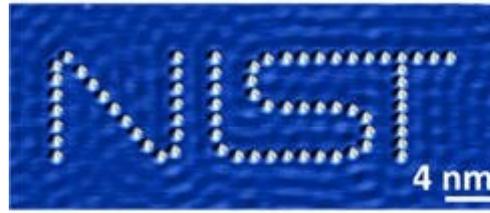


Figura 2: Nanoestructura con el logotipo del NIST fabricado con átomos de cobalto (Co) sobre una superficie de cobre (Cu). Fuente [66]

Esta sucesión cíclica propuesta en la Ecuación 1 debería acabar de la misma manera que empieza, con un número a de átomos normales. La ecuación que define cuantos ciclos, j , de átomos normales y contaminantes tiene la cadena es:

$$(a + b)j + a = N \quad (2)$$

Donde N son los átomos de la superficie estudiada que corresponde a un número fijo de átomos de la superficie sobre la que se mueve.

En este modelo, N átomos de la superficie superior se emparejan antes de iniciar el movimiento con M en la inferior. Por tanto, para desarrollar el modelo hay que elegir la relación M/N , que proporciona unas características especiales al proceso de fricción.

Siguiendo a Aubry [24], elegimos la relación $M/N = 144/233$, que es una aproximación racional del número áureo Φ , un número incommensurable. Esta condición es una de las dos necesarias, para romper la analiticidad.

Así, la Ecuación 1 se puede escribir también como:

$$a(j + 1) + bj = 233 \quad (3)$$

Una forma de resolver la ecuación es considerar conocida la variable a . A continuación, vamos a resolver la ecuación para valores de a entre 1 y 5. Así para $a=1$ resulta

$$(1 + b)j = 232 \quad (4)$$

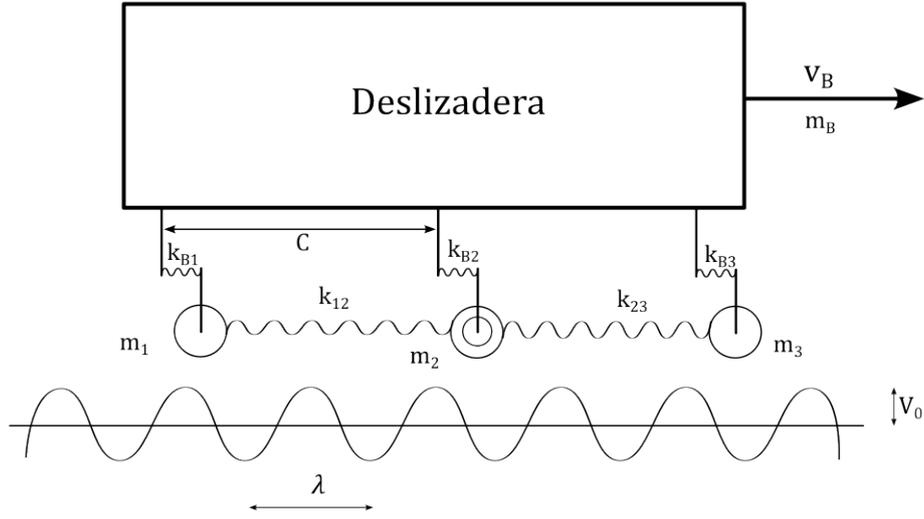
Dado que $232=2^3 \cdot 29$, $b+1=\{2, 2^2, 2^3, 29, 58, 116, 232\}$. Esto significa que $b=\{1, 3, 7, 28, 57, 115, 231\}$ y para cada valor de b se obtiene un valor de j según la Tabla 3.

Tabla 3: Valores de j para cada valor de b seleccionado, cuando $a=1$.

b	j
1	116
3	58
7	29
28	8
57	4
115	2
231	1

4. Metodología

El problema a resolver en superficies dopadas se realiza utilizando el enfoque FKT. La Figura 3 muestra un esquema de este modelo físico. Los muelles reflejan la interacción átomo-átomo en la capa superficial del cuerpo deslizante superior y su relación átomo-átomo con el grueso. El potencial de interacción entre estos átomos y la superficie de referencia del movimiento relativo movimiento relativo se realiza mediante una función trigonométrica.


Figura 3: Esquema del modelo FKT.

Un átomo concreto de la superficie deslizante es señalado e indexado con j , y el desplazamiento relativo del átomo j , con una masa m , por ξ_j . Por tanto, la fuerza de inercia se representa por $m \frac{d^2 \xi_j}{dt^2}$. La fuerza de amortiguación, de naturaleza viscosa, asociada al movimiento absoluto del átomo está representada por los términos $\beta \frac{d \xi_j}{dt}$ y $\gamma \left(v_B + \frac{d \xi_j}{dt} \right)$, y las fuerzas elásticas por $\kappa_1 (2 - \xi_j - \xi_{j-1} - \xi_{j+1})$ y $\kappa_2 \xi_j$. La fuerza elegida para representar la interacción entre el átomo j y la superficie fija es:

$$F(v_B, \xi_j, t) = \frac{b}{m} \text{sen}[2\pi(v_B \cdot t + c \cdot j + \xi_j)] \quad (5)$$

con j de 1 hasta N .

Las ecuaciones de equilibrio, donde se ha dividido por m , para cada átomo son:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + \frac{\beta + \gamma}{m} \frac{d \xi_1}{dt} + \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{m} \xi_1 - \frac{b}{m} \text{sen}[2\pi(v_B \cdot t + c \cdot j + \xi_j)] + \frac{\gamma}{m} v_B - \frac{\kappa_1}{m} \xi_2 = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^2 \xi_N}{dt^2} + \frac{\beta + \gamma}{m} \frac{d \xi_N}{dt} + \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{m} \xi_N - \frac{b}{m} \text{sen}[2\pi(v_B \cdot t + c \cdot j + \xi_N)] + \frac{\gamma}{m} v_B - \frac{\kappa_1}{m} (\xi_{N-1} + \xi_{N+1}) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Así, la ecuación de equilibrio para el átomo j es:

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} + \frac{\beta + \gamma}{m} \frac{d \xi_j}{dt} + \frac{2\kappa_1 + \kappa_2}{m} \xi_j - \frac{b}{m} \text{sen}[2\pi(v_B \cdot t + c \cdot j + \xi_j)] + \frac{\gamma}{m} v_B - \frac{\kappa_1}{m} (\xi_{j-1} + \xi_{j+1}) = 0 \quad (7)$$

De lo anterior se deduce que el modelo unidimensional no lineal consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales, cada una de ellas asociada al átomo j , más las condiciones de contorno. Todas las variables y todos los parámetros se han adimensionalizado, considerando unidad la relación κ_1/m y λ . El resto de las magnitudes se definen en términos de estas magnitudes, relación rigidez/masa y longitud. Sumando el desplazamiento relativo de cada uno de los N átomos y multiplicándolo por la relación κ_2/m se obtiene la fuerza de fricción total por unidad de masa no estacionaria para una velocidad constante de la superficie en movimiento, v_B :

$$f(t) = -\frac{\kappa_2}{m} \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \quad (8)$$

5. Resultados

En la Tabla 4 se puede ver el valor medio de la fuerza de fricción, obtenido con el MESIR para los valores de κ_2/m analizados.

En la Figura 4 se puede observar la variación de la fuerza de fricción, Ecuación 8, para los patrones de dopado seleccionados.

Los diagramas de fase, Desplazamiento-Velocidad, se pueden ver en la Figura 5

Tabla 4: Media de la fuerza de fricción para diferentes valores de $\frac{\kappa_2}{m}$.

$\frac{\kappa_2}{m}$	$\overline{f_T}$
1,1	6,735
1,2	4,552
1,3	3,129
1,4	1,880
1,5	0,891
1,6	0,0947
1,7	0,0965
1,8	0,0986
1,9	0,1008

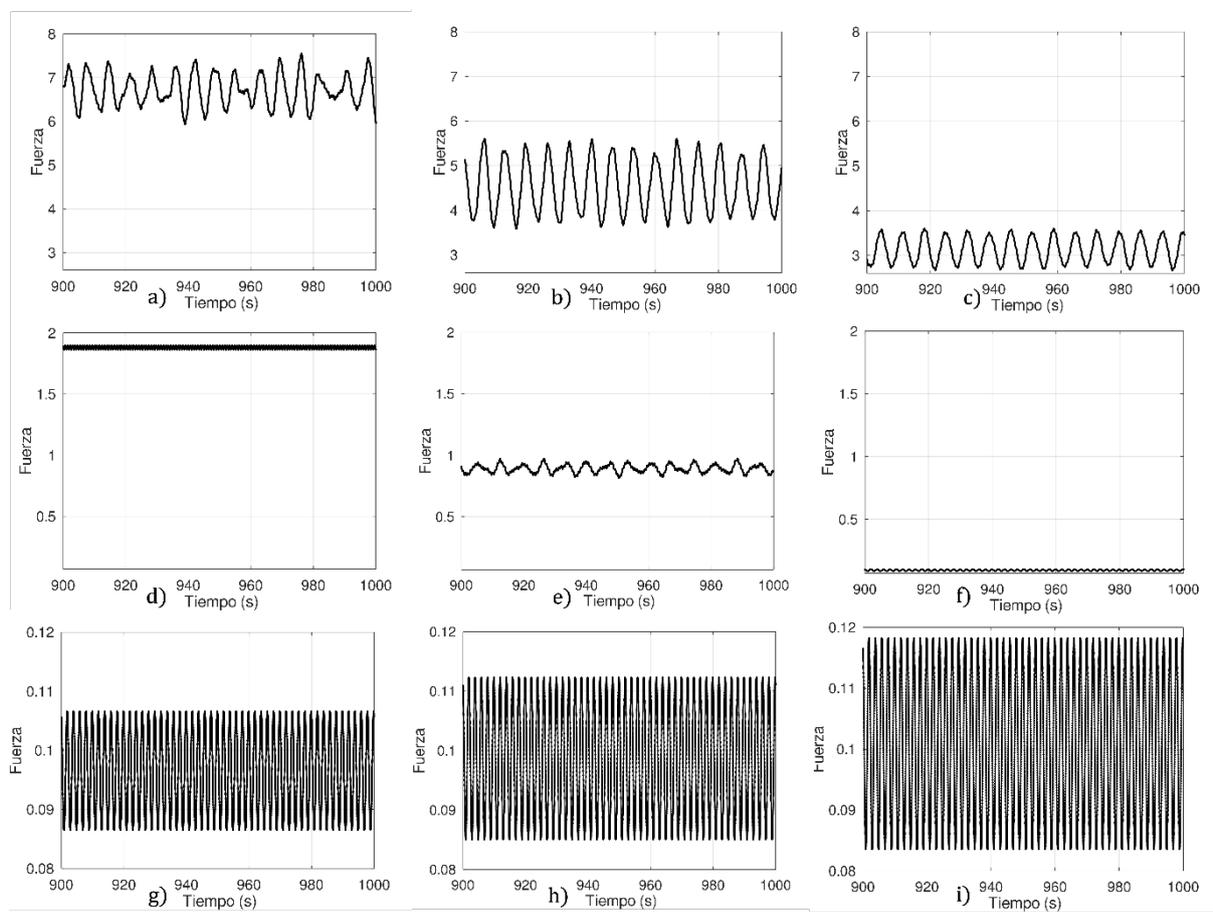


Figura 4: Fuerza de fricción dopada con $\frac{\kappa_2}{m}$ igual a: 1,1 a); 1,2 b); 1,3 c); 1,4 d); 1,5 e); 1,6 f); 1,7 g); 1,8 h); 1,9 i)

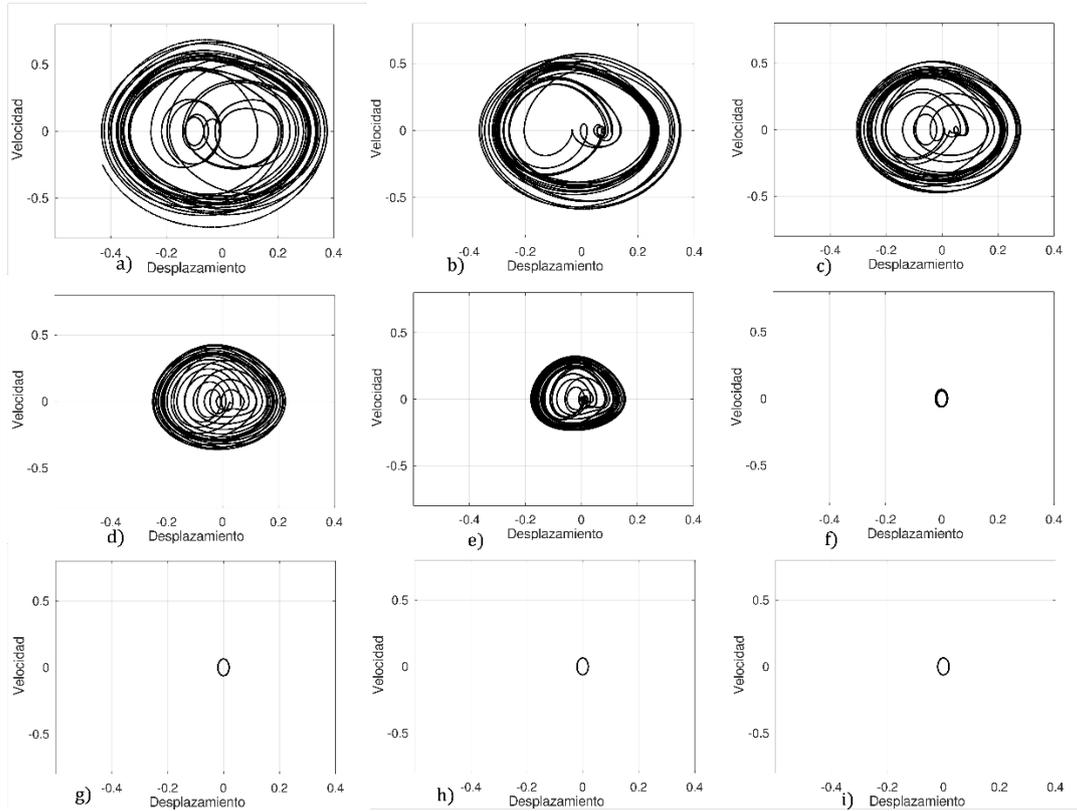


Figura 5: Diagramas de fase con $\frac{\kappa_2}{m}$ igual a: 1,1 a); 1,2 b); 1,3 c); 1,4 d); 1,5 e); 1,6 f); 1,7 g); 1,8 h); 1,9 i)

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran un cambio significativo en el comportamiento de la fuerza de fricción en función del parámetro κ_2/m , que representa la relación entre la rigidez de la interacción átomo-átomo entre superficies y su masa. En la Tabla 4 se aprecia una disminución pronunciada en la fuerza de fricción media hasta alcanzar un mínimo cercano a $\kappa_2/m = 1,6$, a partir del cual la fuerza permanece prácticamente constante.

Este comportamiento puede interpretarse desde la teoría del modelo FKT y las condiciones de pérdida de analiticidad descritas por Aubry. Para valores bajos de κ_2/m , el sistema exhibe trayectorias caóticas, como se aprecia en los diagramas de fase de la Figura 5a-e. Este régimen caótico está asociado a movimientos irregulares de tipo stick-slip, donde la interacción con el potencial periódico de la superficie receptora es fuerte y no se puede evitar el paso por los máximos del potencial.

A medida que κ_2/m aumenta, se alcanza una configuración cuasiperiódica (Figura 5f-i), en la que el acoplamiento entre átomos permite una reorganización más eficiente de la cadena atómica. Esto favorece trayectorias más suaves que evitan los máximos del potencial, lo que explica la reducción drástica de la fricción observada. Estos resultados son consistentes con el fenómeno de superlubricidad predicho teóricamente para sistemas incommensurables, como se obtiene al utilizar una relación $M/N = 144/233$, próxima al número áureo.

La introducción de patrones de dopaje cíclico también influye en la respuesta del sistema. Para bajas frecuencias de dopado (bajas j), la interferencia de los átomos dopados genera irregularidades en el potencial efectivo, intensificando la respuesta caótica. En cambio, al aumentar el número de ciclos de dopado, la estructura se estabiliza y el sistema alcanza un régimen de fricción mínima.

Estos resultados refuerzan la idea de que es posible modular el comportamiento de la fuerza de fricción mediante un diseño atómico de la superficie, lo que puede tener importantes implicaciones tecnológicas. Por ejemplo, se podrían diseñar superficies que alternen zonas con alta fricción (para fijación) y baja fricción (para movimiento libre), sin necesidad de lubricación externa. Este enfoque puede ser particularmente útil en sistemas MEMS o dispositivos en condiciones extremas donde los lubricantes convencionales fallan.

7. Referencias

1. Jonsmann J, Sigmund O, Bouwstra S. Compliant thermal microactuators. *Sens Actuators A Phys.* 1999;76(1–3):463–9.
2. Mahalik NP, Paul BK. Micro energy and chemical systems (MECS) and multiscale fabrication. *Micromanufacturing and nanotechnology.* 2006;299–355.
3. Ouyang X, Tilley D, Keogh P, Yang H, Johnson N, Bowen C, et al. Piezoelectric actuators for screw-in cartridge valves. In: 2008 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. IEEE; 2008. p. 49–55.
4. Engel U, Eckstein R. Microforming—from basic research to its realization. *J Mater Process Technol.* 2002;125:35–44.
5. Razali AR, Qin Y. A review on micro-manufacturing, micro-forming and their key issues. *Procedia Eng.* 2013;53:665–72.
6. Abtahi M, Vossoughi G, Meghdari A. Dynamic Modeling of Scratch Drive Actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems.* 2015;24(5):1370–83.
7. Fu MW, Chan WL. A review on the state-of-the-art microforming technologies. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.* 2013;67:2411–37.
8. Singh A, Suh KY. Biomimetic patterned surfaces for controllable friction in micro-and nanoscale devices. *Micro and Nano Systems Letters.* 2013;1:1–11.
9. Liu YF, Li J, Hu XH, Zhang ZM, Cheng L, Lin Y, et al. Modeling and control of piezoelectric inertia–friction actuators: review and future research directions. *Mechanical Sciences.* 2015;6(2):95–107.
10. Schneider J, Djamiykov V, Greiner C. Friction reduction through biologically inspired scale-like laser surface textures. *Beilstein journal of nanotechnology.* 2018;9(1):2561–72.
11. Prandtl L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 1928;8(2):85–106.
12. Tomlinson GA. CVI. A molecular theory of friction. *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science.* 1929;7(46):905–39.
13. Sircar A, Patra PK. A simple generalization of Prandtl–Tomlinson model to study nanoscale rolling friction. *J Appl Phys.* 2020;127(13).
14. Sánchez-Pérez JF, Marín F, Morales JL, Cánovas M, Alhama F. Modeling and simulation of different and representative engineering problems using Network Simulation Method. *PLoS One.* 2018;13(3):e0193828.
15. Kontorova T, Frenkel J. On the theory of plastic deformation and twinning. II. *Zh Eksp Teor Fiz.* 1938;8:1340–8.
16. Quapp W, Bofill JM. An Analysis of Some Properties and the Use of the Twist Map for the Finite Frenkel–Kontorova Model. *Electronics (Switzerland).* 2022 Oct 1;11(20).
17. Alhama F, Campo A. Electric Network Representation of the Unsteady Cooling of a Lumped Body by Nonlinear Heat Transfer Modes. *J Heat Transfer [Internet].* 2002 Sep 11;124(5):988–92. Available from: <https://doi.org/10.1115/1.1495520>
18. Alhama F, González-Fernández CF. Network simulation method for solving phase-change heat transfer problems with variable thermal properties. *Heat and Mass Transfer [Internet].* 2002;38(4):327–35. Available from: <https://doi.org/10.1007/s002310100254>
19. Sánchez-Pérez JF, Marín F, Morales JL, Cánovas M, Alhama F. Modeling and simulation of different and representative engineering problems using Network Simulation Method. *PLoS One.* 2018;13(3):e0193828.

20. Carlson JM, Langer JS. Properties of earthquakes generated by fault dynamics. *Phys Rev Lett* [Internet]. 1989 May 29;62(22):2632–5. Available from: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.62.2632>
21. Erickson BA, Birnir B, Lavallée D. Periodicity, chaos and localization in a Burridge-Knopoff model of an earthquake with rate-and-state friction. *Geophys J Int.* 2011 Oct;187(1):178–98.
22. Barbot S. Slow-slip, slow earthquakes, period-two cycles, full and partial ruptures, and deterministic chaos in a single asperity fault. *Tectonophysics.* 2019 Oct 5;768:228171.
23. Stefanou I. Control instabilities and incite slow-slip in generalized Burridge-Knopoff models. arXiv preprint arXiv:200803755. 2020;
24. Bishop AR. Solitons in Condensed Matter Physics. *Phys Scr* [Internet]. 1979 Sep;20(3–4):409–23. Available from: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0031-8949/20/3-4/016>
25. Schwarz UD, Hölscher H. Atomic-Scale Friction Studies Using Scanning Force Microscopy. In: *Modern Tribology Handbook, Two Volume Set.* CRC Press; 2000. p. 671–96.
26. Fan P, Goel S, Luo X, Upadhyaya HM. Atomic-Scale Friction Studies on Single-Crystal Gallium Arsenide Using Atomic Force Microscope and Molecular Dynamics Simulation. *Nanomanufacturing and Metrology* [Internet]. 2022;5(1):39–49. Available from: <https://doi.org/10.1007/s41871-021-00109-3>
27. Hälg D, Gisler T, Tsureyan Y, Catalini L, Grob U, Krass MD, et al. Membrane-based scanning force microscopy. *Phys Rev Appl.* 2021;15(2):L021001.
28. Meyer E, Heinzelmann H. Scanning force microscopy (SFM). In: *Scanning Tunneling Microscopy II: Further Applications and Related Scanning Techniques.* Springer; 1992. p. 99–149.
29. Ducourtieux S, Poyet B. Development of a metrological atomic force microscope with minimized Abbe error and differential interferometer-based real-time position control. *Meas Sci Technol.* 2011;22(9):094010.
30. Greenwood JA, Singer IL, Pollock HM. *Fundamentals of Friction: Macroscopic and Microscopic Processes.* Kluwer Dordrecht; 1992.
31. Greenwood JA, Williamson JBP. Contact of nominally flat surfaces. *Proc R Soc Lond A Math Phys Sci.* 1966;295(1442):300–19.
32. Myshkin NK, Grigoriev AY, Chizhik SA, Choi KY, Petrokovets MI. Surface roughness and texture analysis in microscale. *Wear.* 2003 Jul 1;254(10):1001–9.
33. Manabe K ichi. Metal micro-forming. Vol. 10, *Metals.* MDPI; 2020. p. 813.
34. Bučinskis V, Subačiūtė-Žemaitienė J, Dziedzickis A, Morkvėnaitė-Vilkončienė I. Robotic micromanipulation: A) actuators and their application. 2021;
35. Gibbons JF. Ion implantation in semiconductors—Part I: Range distribution theory and experiments. *Proceedings of the IEEE.* 1968;56(3):295–319.
36. Stroschio JA, Celotta RJ. Controlling the dynamics of a single atom in lateral atom manipulation. *Science (1979).* 2004;306(5694):242–7.
37. Manova D, Gerlach JW, Mändl S. Thin film deposition using energetic ions. *Materials.* 2010;3(8):4109–41.
38. Mundra SS, Pardeshi SS, Bhavikatti SS, Nagras A. Development of an integrated physical vapour deposition and chemical vapour deposition system. *Mater Today Proc.* 2021;46:1229–34.
39. Kizu R, Misumi I, Hirai A, Kinoshita K, Gonda S. Development of a metrological atomic force microscope with a tip-tilting mechanism for 3D nanometrology. *Meas Sci Technol.* 2018;29(7):075005.
40. Misumi I, Sugawara K, Kizu R, Hirai A, Gonda S. Extension of the range of profile surface roughness measurements using metrological atomic force microscope. *Precis Eng.* 2019;56:321–9.

41. Sun L, Wang QJ, Zhao N, Zhang M. Discrete convolution and FFT modified with double influence-coefficient superpositions (DCSS–FFT) for contact of nominally flat heterogeneous materials involving elastoplasticity. *Comput Mech*. 2021;67:989–1007.
42. Peusner L. Network thermostatics. *J Chem Phys*. 1985;83(3):1276–91.
43. Peusner L. The principles of network thermodynamics: theory and biophysical applications. Entropy Limited; 1987.
44. Peusner L. The principles of network thermodynamics: theory and biophysical applications. Entropy Limited; 1987.
45. Alhama F, Campo A. Electric Network Representation of the Unsteady Cooling of a Lumped Body by Nonlinear Heat Transfer Modes. *J Heat Transfer [Internet]*. 2002 Sep 11;124(5):988–92. Available from: <https://doi.org/10.1115/1.1495520>
46. Alhama F, González-Fernández CF. Network simulation method for solving phase-change heat transfer problems with variable thermal properties. *Heat and Mass Transfer [Internet]*. 2002;38(4):327–35. Available from: <https://doi.org/10.1007/s002310100254>
47. Zueco J, Hernández-González A. Network simulation method applied to models of diffusion-limited gas bubble dynamics in tissue. *Acta Astronaut*. 2010;67(3–4):344–52.
48. Solano J, Balibrea-Iniesta F, Moreno Nicolás JA. Applications of the network simulation method to differential equations with singularities and chaotic behaviour. *Mathematics*. 2021;9(12).
49. Solano J, Balibrea F, Moreno JA, Marín F. Dry Friction Analysis in Doped Surface by Network Simulation Method. *Mathematics*. 2023;11(6):1341.
50. Solano J, Balibrea-Iniesta F, Nicolas JAM, García FM. Analysis of chaotic response of Frenkel-Kontorova-Tomlinson model. *Symmetry (Basel)*. 2020;12(9).
51. Sánchez Pérez JF, Marín-García F, Castro E, García-Ros G, Conesa M, Solano J. Methodology for Solving Engineering Problems of Burgers–Huxley Coupled with Symmetric Boundary Conditions by Means of the Network Simulation Method. *Symmetry (Basel)*. 2023;15(9).
52. Alhama F, Campo A. Electric Network Representation of the Unsteady Cooling of a Lumped Body by Nonlinear Heat Transfer Modes. *J Heat Transfer [Internet]*. 2002 Sep 11;124(5):988–92. Available from: <https://doi.org/10.1115/1.1495520>
53. Alhama F, González-Fernández CF. Network simulation method for solving phase-change heat transfer problems with variable thermal properties. *Heat and Mass Transfer [Internet]*. 2002;38(4):327–35. Available from: <https://doi.org/10.1007/s002310100254>
54. Sánchez-Pérez JF, Marín F, Morales JL, Cánovas M, Alhama F. Modeling and simulation of different and representative engineering problems using Network Simulation Method. *PLoS One*. 2018;13(3):e0193828.
55. Zueco J, Hernández-González A. Network simulation method applied to models of diffusion-limited gas bubble dynamics in tissue. *Acta Astronaut*. 2010;67(3–4):344–52.
56. Solano J, Balibrea-Iniesta F, Moreno Nicolás JA. Applications of the network simulation method to differential equations with singularities and chaotic behaviour. *Mathematics*. 2021;9(12).
57. Solano J, Balibrea F, Moreno JA, Marín F. Dry Friction Analysis in Doped Surface by Network Simulation Method. *Mathematics*. 2023;11(6):1341.
58. Solano J, Balibrea F, Moreno JA, Marín F. Dry Friction Analysis in Doped Surface by Network Simulation Method. *Mathematics*. 2023;11(6):1341.
59. Solano J, Balibrea-Iniesta F, Nicolas JAM, García FM. Analysis of chaotic response of Frenkel-Kontorova-Tomlinson model. *Symmetry (Basel)*. 2020;12(9).
60. Solano J, Balibrea-Iniesta F, Moreno Nicolás JA, Marín-García F. Dry Friction Analysis in Doped Surface by Network Simulation Method. *Mathematics*. 2023;11(6).

61. Sánchez Pérez JF, Marín-García F, Castro E, García-Ros G, Conesa M, Solano J. Methodology for Solving Engineering Problems of Burgers–Huxley Coupled with Symmetric Boundary Conditions by Means of the Network Simulation Method. *Symmetry* (Basel). 2023;15(9).
62. Vladimirescu A. *The SPICE book*. John Wiley & Sons, Inc.; 1994.
63. SKOWRONN D, LI D, TYMERSKI R. Simulation of networks with ideal switches. *International Journal of Electronics* [Internet]. 1994 Nov 1;77(5):715–30. Available from: <https://doi.org/10.1080/00207219408926096>
64. Constantinescu F, Gheorghe AG, NIȚESCU M. The energy balance error for circuit transient analysis. *Rev Roum Sci Techn–Électrotechn et Énerg*. 2010;55(3):243–50.
65. Solano J, Mulas-Pérez J, Balibrea F, Moreno-Nicolás JA. Truncation Error of the Network Simulation Method: Chaotic Dynamical Systems in Mechanical Engineering. *Mathematics* [Internet]. 2024 Nov 4;12(21):3441. Available from: <https://www.mdpi.com/2227-7390/12/21/3441>
66. Celotta RJ, Balakirsky SB, Fein AP, Hess FM, Rutter GM, Stroschio JA. Invited article: Autonomous assembly of atomically perfect nanostructures using a scanning tunneling microscope. *Review of Scientific Instruments*. 2014 Dec 1;85(12).