



## Análisis de estabilidad de Floquet en modelos simplificados de vía flexible

Á. Brazales<sup>1</sup>, R. Chamorro<sup>2</sup>, J.F. Aceituno<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera, Universidad de Jaén, [brazales@ujaen.es](mailto:brazales@ujaen.es), [jaceitun@ujaen.es](mailto:jaceitun@ujaen.es)

<sup>2</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación, Universidad de Sevilla, [rchamorro@us.es](mailto:rchamorro@us.es)

---

*A pesar de la existencia de una gran variedad de modelos numéricos que modelan con gran detalle la dinámica de vías ferroviarias discretamente apoyadas, estos suelen presentar ciertas limitaciones, tales como una reducida eficiencia computacional o problemas derivados de considerar la vía como una estructura flexible de longitud finita. Una alternativa para superar dichos inconvenientes consiste en modelar la flexibilidad de la vía insertando debajo de cada rueda del vehículo un sistema de masas concentradas y sólidos rígidos interconectados a través de conjuntos resorte-amortiguador.*

*Dada la periodicidad que los apoyos discretos introducen en la estructura ferroviaria, las ecuaciones de movimiento de estos modelos poseen, entre otros, términos de rigidez periódicos en el tiempo, lo cual constituye un sistema excitado paramétricamente. La implementación de dichos modelos requiere un análisis detallado, pues el fenómeno de excitación paramétrica tiene efectos significativos en la estabilidad de las soluciones obtenidas y en el análisis energético de dichos sistemas. En este contexto, la teoría de Floquet es una herramienta matemática idónea para el análisis de sistemas sometidos a excitación paramétrica, pues resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes periódicos. La aplicación de la teoría de Floquet permite evaluar la estabilidad de tales sistemas para diferentes combinaciones de parámetros, construyendo así diagramas de estabilidad, que permiten, por ejemplo, detectar bifurcaciones, soluciones periódicas y regiones de inestabilidad.*

*Los modelos simplificados de vía flexible son, en realidad, sistemas sometidos simultáneamente a excitación paramétrica, debido al efecto de los apoyos discretos, y forzada, debido a la fuerza de contacto que resulta de la interacción vehículo-vía. En este sentido, aunque la teoría de Floquet no resuelva ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes periódicos, la estabilidad de estos modelos puede analizarse a partir de los resultados obtenidos por la teoría de Floquet.*

*En el presente trabajo se obtendrá, implementando numéricamente la teoría Floquet, el diagrama de estabilidad de un modelo simplificado de vía flexible de un único grado de libertad formulado con la ecuación de Mathieu amortiguada.*

---

## 1. Introducción

En el campo de la dinámica ferroviaria computacional, existe una amplia variedad de modelos computacionales para modelar la flexibilidad de vías ferroviarias de balasto que, en definitiva, se diferencian por la manera seleccionada para modelar los diferentes elementos que definen a una vía ferroviaria con apoyos discretos: el carril, el sistema de sujeción, la traviesa, el balasto y la subestructura [1]. Algunas de las clasificaciones más comunes atienden, entre otras, al número de capas empleado, a si la subestructura es modelada como un semi-espacio elástico, al dominio de resolución de las ecuaciones de movimiento o la consideración de la vía como un sólido flexible finito o infinito [2-3]. La selección de un modelo computacional dependerá del fenómeno físico analizado o del rango de frecuencia simulado en la simulación multicuerpo, por ejemplo. Sin embargo, pese a tenerse modelos computacionales de elevado nivel de detalle, estos suelen presentar limitaciones tales como la reducida eficiencia computacional de los mismos o las problemáticas derivadas de considerar la vía ferroviaria como una estructura de longitud finita. Además, si el objetivo de la simulación dinámica es analizar exclusivamente la dinámica del vehículo, la implementación de modelos de vía detallados no resulta ser la mejor alternativa. Bajo esta perspectiva, una opción para modelar la flexibilidad de vías ferroviarias consiste en el empleo de modelos simplificados de interacción vehículo-vía con parámetros concentrados, lo cual supone insertar debajo de cada rueda del vehículo ferroviario un conjunto de masas concentradas unidas entre sí mediante conjuntos de resorte-amortiguador [4]. A pesar de su eficiencia computacional y de superar la limitación impuesta por la longitud de vía simulada, estos modelos simplificados de interacción vehículo-vía flexible presentan limitaciones significativas, como el desacoplamiento longitudinal, la dificultad para reproducir la respuesta de la vía ferroviaria de referencia en un espectro de frecuencia adecuado, o la imposibilidad de analizar la respuesta dinámica de la vía.

Las propiedades de estos modelos son calculadas a partir de funciones de respuesta en frecuencia obtenidas experimentalmente o mediante modelos de vía detallados [5]. Dependiendo del tipo de análisis realizado, pueden usarse con propiedades constantes, justificado para frecuencias bajas, o con propiedades periódicas en el espacio, si desea contemplarse el efecto de los apoyos discretos, importante para frecuencias altas. Si las propiedades son constantes en el espacio, y por ende en el tiempo, no es necesario realizar ningún tipo de análisis especial, pues son sistemas mecánicos elementales. Sin embargo, no ocurre así cuando las propiedades de dichos modelos son periódicas en el tiempo durante la ejecución de una simulación dinámica.

Sistemas físicos modelados con términos de rigidez variables en el tiempo pueden ser inestables en ausencia de fuerzas externas aplicadas, debido al fenómeno de excitación paramétrica. La frecuencia de variación de parámetros supone por sí sola una fuente de excitación que puede inducir a inestabilidades. Asimismo, las soluciones obtenidas para sistemas excitados paraméricamente difieren notablemente de las soluciones obtenidas para sistemas mecánicos con parámetros constantes. En este contexto, cobran importancia los trabajos desarrollados por Floquet, Hill y Mathieu.

La teoría de Floquet permite analizar la estabilidad de sistemas excitados paraméricamente y su implementación se resume, a grandes rasgos, en determinar la matriz de monodromía. La ecuación de Mathieu, que es un caso particular y sencillo de la ecuación de Hill, utilizada originalmente para dar solución a las vibraciones de una membrana con frontera elíptica, ha sido empleada para describir y entender numerosos sistemas físicos excitados paraméricamente, tales como una cuerda sometida a una tensión periódica en sus extremos, un péndulo invertido con excitación periódica en su base o el flujo pulsátil en tubos con secciones transversales elípticas [6]. Aunque la teoría de Floquet por sí sola no permite analizar sistemas sometidos simultáneamente a excitaciones forzada y paramétrica, la estabilidad y solución de dichos sistemas pueden obtenerse a partir de los resultados obtenidos aplicando la teoría de Floquet para la versión homogénea [7-8]. Esto es de suma relevancia para los modelos simplificados de vía flexible, debido a que la excitación inducida por las fuerzas de contacto deberá ser contemplada junto a la excitación inducida por el simple hecho de avanzar el vehículo sobre un sólido flexible discretamente apoyado.

Los objetivos del presente trabajo son, en primer lugar, justificar el uso de la teoría de Floquet para una correcta implementación de los modelos simplificados de vía flexible con propiedades periódicas en simulaciones multicuerpo de interacción vehículo-vía; en segundo lugar, desarrollar una metodología para la construcción de diagramas de estabilidad de dichos modelos; y, por último, analizar la interacción entre excitaciones paramétrica y forzada presentes en los mismos. Para ello, se obtendrá el diagrama de estabilidad de un modelo simplificado de vía flexible formulado mediante la ecuación de Mathieu con amortiguamiento periódico. Este diagrama permitirá evaluar, para distintas combinaciones de parámetros, el tipo de solución obtenida e identificar así posibles regiones de inestabilidad.

## 2. Teoría de Floquet

Las ecuaciones de movimiento de un modelo simplificado de vía flexible de  $n$  grados de libertad, en ausencia de excitación forzada y dada una velocidad de avance constante, pueden ser formuladas matricialmente como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  es una matriz  $T$ -periódica,  $T = \frac{L_s}{v}$ , con  $L_s$  siendo el espaciado entre traviesas y  $v$  la velocidad de avance del vehículo ferroviario,  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{2n}$  es el vector formado por los vectores de velocidades y aceleraciones generalizadas y, finalmente,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}$  es el vector que almacena los vectores de coordenadas y velocidades generalizadas.

El teorema de Floquet establece que la matriz fundamental de sistemas físicos descritos por la Ec. 1, suponiendo que  $t_0 = 0$ , puede expresarse como:

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{Q}(t)e^{\mathbf{B}t} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{Q}(t)$  es una matriz  $n \times n$   $T$ -periódica y  $\mathbf{B}$  es una  $n \times n$  matriz constante. Por otro lado, a partir de la teoría de sistemas dinámicos y del álgebra lineal, se sabe que la solución de la Ec.1 puede expresarse como  $\mathbf{x} = \Phi(t, 0)\mathbf{x}_0$ . Por tanto, se tiene que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}(t)e^{\mathbf{B}t}\mathbf{x}_0 \quad (3)$$

Así, se observa que la estabilidad de la Ec. 3 depende del término  $e^{\mathbf{B}t}$ , el cual puede ser expresado en función de los autovalores y autovectores de la matriz  $\mathbf{B}$ . Los autovalores de la matriz  $\mathbf{B}$  son conocidos como exponentes de Floquet, y la estabilidad de la Ec. 3 queda determinada en base a estos. De este modo, si se tiene un exponente de Floquet  $\mu_i$  con parte real positiva la solución será inestable, creciendo la solución exponencialmente en el tiempo, y no linealmente, como ocurre en el caso de la resonancia forzada. En el caso de que la matriz  $\mathbf{B}$  no fuese diagonalizable, la solución también podrá ser inestable teniéndose exponentes de Floquet  $\mu_i$  con parte real nula.

La estabilidad de la Ec. 3 puede ser evaluada también a partir de los autovalores la matriz fundamental evaluada al final de un periodo  $T$ . Dicha matriz, denominada como matriz de monodromía del sistema, es fundamental en la teoría de Floquet:

$$\Phi(T, 0) = \mathbf{M} \quad (4)$$

Debido a las propiedades exhibidas por la matriz fundamental  $\Phi(t, 0)$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  evaluada después de  $m$  periodos fundamentales  $T$  puede expresarse como sigue:

$$\mathbf{x}(mT, 0) = \mathbf{M}^m \mathbf{x}_0 \quad (5)$$

Analizando la Ec. 5, puede concluirse que la dinámica a largo plazo de sistemas modelados por la Ec. 1 puede ser evaluada a partir del comportamiento observado a lo largo de un único y primer periodo  $T$ , lo cual es fundamental. De este modo, evaluando el término  $\mathbf{M}^m$  podrá determinarse si el sistema excitado paramétricamente analizado es estable o inestable. Nuevamente, el término  $\mathbf{M}^m$  puede ser expresado en función de sus autovalores y autovectores, los cuales son denominados multiplicadores de Floquet. Puede concluirse que la solución crecerá exponencialmente en el tiempo si existe un multiplicador de Floquet  $\lambda_i$  de módulo mayor que uno. Asimismo, si la matriz de monodromía  $\mathbf{M}$  no es diagonalizable, el sistema también podrá ser inestable si se tienen multiplicadores de Floquet con módulo unitario.

Como consecuencia, la estabilidad de modelos simplificados de vía flexible para cualquier combinación de parámetros podrá ser evaluada a integrando numéricamente la Ec. 1 durante un único periodo  $T$ , con las correspondientes soluciones iniciales, para definir la matriz de monodromía  $\mathbf{M}$  y calcular sus autovalores, esto es,  $\sigma(\mathbf{M})$ . El inconveniente asociado a la metodología propuesta es el elevado coste computacional requerido construir diagramas de estabilidad de alta resolución, lo cual dificulta, por ejemplo, la visualización de bifurcaciones presentes.

### 3. Resultados numéricos

Se propone aplicar la teoría de Floquet para obtener el diagrama de estabilidad de un modelo simplificado de vía flexible formulado con la ecuación de Mathieu periódicamente amortiguada:

$$\ddot{x} + \frac{k_t + k_v}{2m_r} (1 + \varepsilon_k \cos(2\pi f_s t)) x + \frac{c_t + c_v}{2m_r} (1 + \varepsilon_c \cos(2\pi f_s t)) \dot{x} = 0 \quad (6)$$

donde:

- La frecuencia de variación de parámetros  $f_s = \frac{v}{L_s}$  queda definida por la velocidad de avance del vehículo  $v$  y la distancia entre apoyos  $L_s$ .
- El parámetro inercial  $m_r$  es la masa puntual que modela el carril.
- Las constantes de resorte  $k_t$  y  $k_v$  definen la rigidez del resorte móvil cuando la rueda se encuentra encima de un apoyo y a mitad de vano, respectivamente. Lo mismo aplica para las constantes de amortiguamiento  $c_t$  y  $c_v$ .
- Los parámetros adimensionales  $\varepsilon_k$  y  $\varepsilon_c$  modulan la intensidad de variación de rigidez y amortiguamiento.

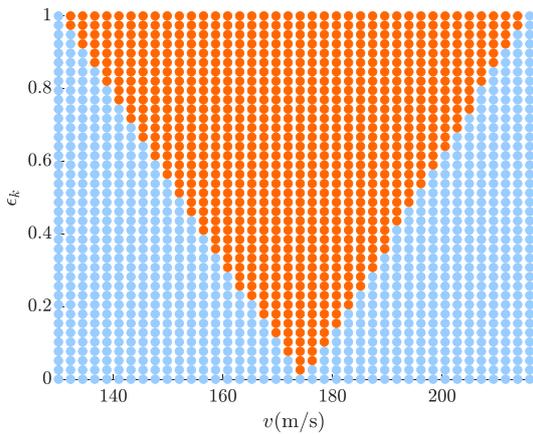
Para simplificar la construcción del diagrama de estabilidad, se supondrán constantes los parámetros  $k_t$ ,  $k_v$ ,  $c_t$ ,  $c_v$  y  $m_r$ , y con magnitudes tomadas del modelo simplificado de vía flexible publicado en el benchmark de Manchester [9]. De este modo, se modificarán únicamente la velocidad de avance del vehículo y la magnitud de variación armónica de la rigidez. Por otro lado, se supondrá que  $L_s = 0.6$  m.

Dado que el sistema modelado tiene un único grado de libertad, el fenómeno de resonancia paramétrica ocurrirá cuando:

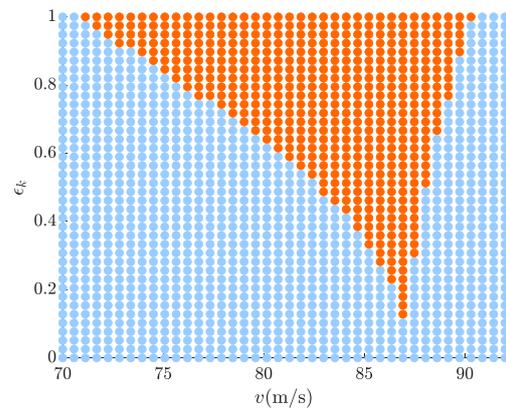
$$f_s = \frac{2f_0}{k} \quad (7)$$

donde  $k = 1, 2, 3, \dots$ , siendo  $k$  el orden de la resonancia paramétrica y  $f_0$  la frecuencia natural del modelo con propiedades constantes. Las frecuencias establecidas por la Ec. 7 definen las velocidades de avance donde las bifurcaciones asociadas a una región de inestabilidad paramétrica comienzan. La resonancia paramétrica de mayor importancia es aquella que ocurre cuando la frecuencia de variación de parámetros es el doble de la frecuencia natural, es decir, aquella que satisface  $k = 1$ .

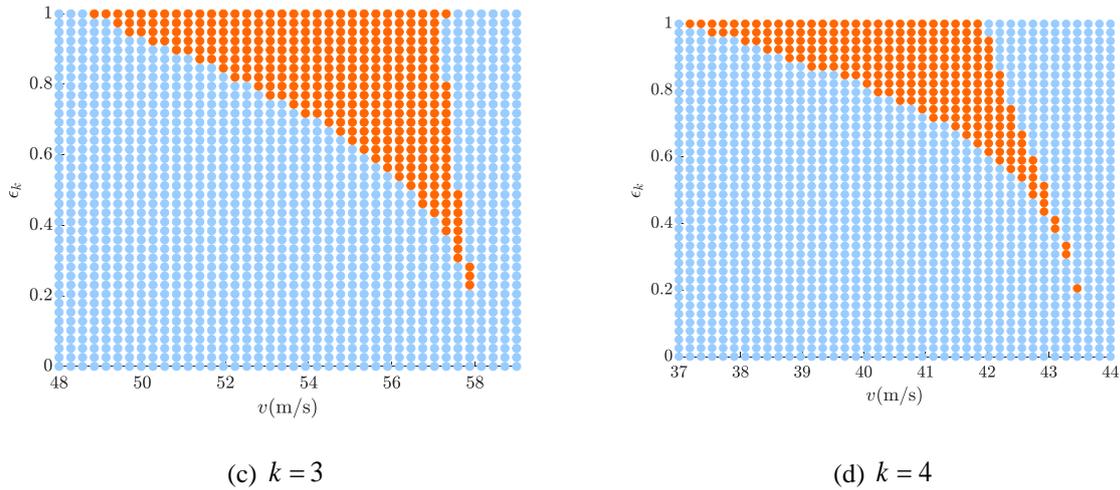
Tal y como es habitual en el análisis de sistemas excitados paramétricamente, se representará en primera instancia el diagrama de estabilidad sin amortiguamiento, pudiendo así visualizar las regiones de inestabilidad de manera completa. Se representarán las regiones de inestabilidad asociadas a las cuatro primeras resonancias paramétricas, representando con color azul la estabilidad y con color rojo la inestabilidad:



(a)  $k = 1$



(b)  $k = 2$



**Figura 1:** Evaluación de la estabilidad de Ec. 6, con  $c_t = 0$  y  $c_v = 0$

Los resultados mostrados en la Fig. 1 son plenamente consistentes con la Ec. 7. En definitiva, la frecuencia natural del sistema sin variación de parámetros determina las regiones de velocidad de avance donde las resonancias paramétricas ocurrirán y  $\varepsilon_k$  controla la intensidad de la excitación paramétrica.

Debido a que el modelo simplificado de vía flexible propuesto constituye un sistema Hamiltoniano, la matriz fundamental  $\Phi(t, 0)$  es simpléctica y, por lo tanto, la matriz de monodromía  $\Phi(T, 0)$  también posee esta propiedad. Esto implica que:

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J} \quad (8)$$

donde  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , para un modelo simplificado de vía flexible de un grado de libertad.

Del mismo modo, toda matriz simpléctica satisface que:

$$\det(\mathbf{M}) = 1 \quad (9)$$

El hecho de que la matriz fundamental  $\Phi(t, 0)$  sea simpléctica es fundamental en el contexto de la teoría de Floquet, pues los autovalores de matrices simplécticas aparecen como pares recíprocos, esto es:

$$\lambda_i \in \sigma(\mathbf{M}) \rightarrow \frac{1}{\lambda_i} \in \sigma(\mathbf{M}) \quad (10)$$

Todo lo expuesto implica que los multiplicadores de Floquet serán simétricos con respecto al círculo unitario. Además, no serán posibles soluciones asintóticamente estables si no se incluyen términos disipativos, pero sí soluciones cuasi-periódicas,  $kT$ -periódicas o inestables. Por consiguiente, los multiplicadores de Floquet solo podrán abandonar el círculo unitario en los puntos  $(+1, 0)$  o  $(-1, 0)$ , lo cual implica que en las bifurcaciones observadas en la Fig. 1 se tienen soluciones periódicas con periodos  $T$  o  $2T$  respectivamente.

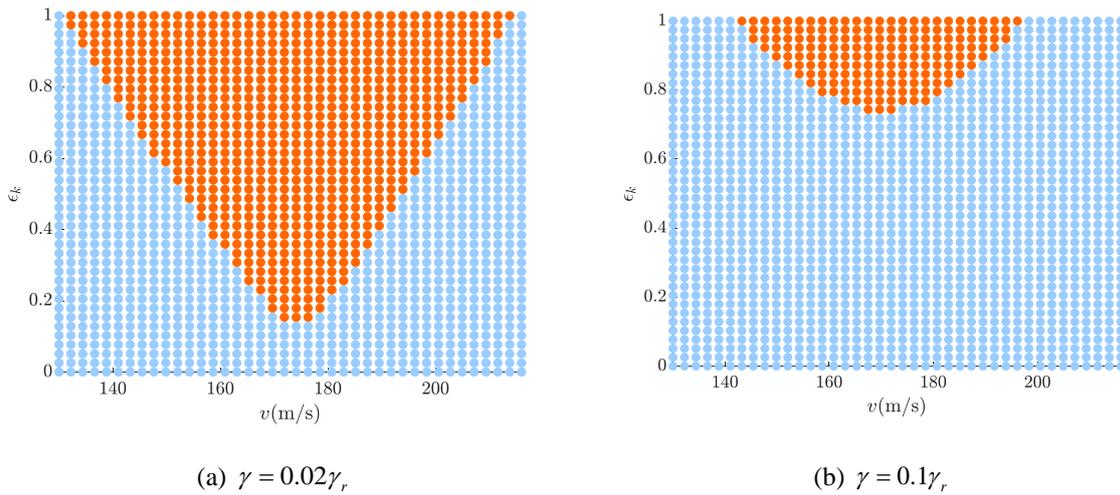
Incluyendo términos de amortiguamiento, los multiplicadores de Floquet pasan a satisfacer la siguiente relación [10]:

$$\lambda_i \in \sigma(\mathbf{M}) \rightarrow \frac{\xi}{\lambda_i} \in \sigma(\mathbf{M}) \quad (11)$$

donde  $\xi = \det(\mathbf{M})$ , lo cual implica que ahora los multiplicadores de Floquet pasan a ser simétricos con respecto a un círculo con un radio menor que uno, e igual a  $r = \sqrt{\xi}$ . Como consecuencia, ahora sí podrán obtenerse

soluciones asintóticamente estables. Respecto a las bifurcaciones, seguirán obteniéndose soluciones periódicas con periodos  $T$  o  $2T$ , lo cual es demostrable a partir de la Ec. 3.

Usando el amortiguamiento propuesto en [9], únicamente soluciones asintóticamente estables son posibles, lo cual implica que las regiones de resonancia paramétrica desaparecen por completo. Para poder visualizar el efecto que tiene el amortiguamiento en las regiones de resonancia paramétrica, denominando  $\gamma_r$  al valor del cociente  $\frac{c_t + c_v}{2m_r}$  empleado por [9] y  $\gamma$  al amortiguamiento usado aquí, se usarán valores de amortiguamiento tales que  $\gamma = 0.02\gamma_r$  y que  $\gamma = 0.1\gamma_r$ , manteniendo en ambos casos que  $\varepsilon_c = 0.5$ . Debido a que la resonancia paramétrica de orden uno es la de mayor importancia y la última en dejar de ser inestable, se representará el efecto que tiene amortiguamiento sobre esta.



**Figura 2:** Evaluación de la estabilidad de la Ec. 6

La Fig. 2 muestra cómo las regiones inestables se transforman en regiones estables a medida que el amortiguamiento aumenta progresivamente.

Si la respuesta del sistema a la excitación paramétrica es inestable, entonces la interacción simultánea de excitaciones paramétrica y forzada también resultará en una respuesta inestable. Si no se tiene una respuesta inestable del sistema ante la excitación paramétrica, del mismo modo que en la ecuación  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$  la respuesta crecerá lineal e indefinidamente en el tiempo si la frecuencia de la fuerza  $f(t)$  coincide con la frecuencia natural del sistema, para la ecuación  $\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = f(t)$ , se tendrá una solución inestable si la frecuencia de excitación coincide con la frecuencia de la respuesta obtenida para  $\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0$ .

Finalmente, con una ecuación de movimiento del tipo  $\ddot{x} + \omega_0^2(t)x + c(t)\dot{x} = f(t)$ , si la solución obtenida para  $\ddot{x} + \omega_0^2(t)x + c(t)\dot{x} = 0$  es asintóticamente estable, se tendrá una solución modulada por los periodos de la fuerza y variación de parámetros.

## 4. Conclusiones

Aplicando la teoría Floquet, se obtiene el diagrama de estabilidad un modelo simplificado de vía flexible de un único grado de libertad, modelado con la ecuación de Mathieu con amortiguación periódica. Los resultados obtenidos destacan la importancia de realizar análisis de estabilidad antes de implementar estos modelos simplificados de interacción vehículo-vía, dado que la elección de parámetros variables puede inducir a inestabilidades. La metodología desarrollada puede extenderse para modelos simplificados de vía flexible con un mayor número de grados de libertad o expresiones periódicas de receptancia alternativas.

## 5. Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al apoyo recibido por parte del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidad por medio del proyecto con referencia PID2023-152786OB-100 y de la beca con referencia FPU22/01690.

## 6. Referencias

- [1] K. L. Knothe and S. L. Grassie, “Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 22, no. 3-4, pp. 209-262, 1993. Niemman G., Winter H., *Maschineelement*, vol. 2, Springer, Berlin (1989).
- [2] J. L. Escalona, H. Sugiyama, and A. A. Shabana, “Modelling of structural flexibility in multibody railroad vehicle systems,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 51, no. 7, pp. 1027-1058, 2013.
- [3] A. C. Lamprea-Pineda, D. P. Connolly, and M. F. Hussein, “Beams on elastic foundations—A review of railway applications and solutions,” *Transportation Geotechnics*, vol. 33, 100696, 2022.
- [4] R. Weilguny, M. Leitner, and P. Brunnhofer, “Comparison of modern track modelling concepts in multi-body simulation and their application for short-wave rail surface geometries,” *Vehicle System Dynamics*, pp. 1-22, 2025.
- [5] N. Chaar and M. Berg, “Simulation of vehicle–track interaction with flexible wheelsets, moving track models and field tests,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 44, sup1, pp. 921-931, 2006.
- [6] C. Brimacombe, R. M. Corless, and M. Zamir, “Computation and applications of Mathieu functions: a historical perspective,” *SIAM Review*, vol. 63, no. 4, pp. 653-720, 2021.
- [7] J. Slane and S. Tragesser, “Analysis of periodic nonautonomous inhomogeneous systems,” *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, vol. 11, no. 2, pp. 183-198, 2011.
- [8] A. Rodriguez and J. Collado, “Periodic solutions in non-homogeneous Hill equation,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, vol. 20, pp. 78-91, 2020.
- [9] S. Iwnicki, “Manchester benchmarks for rail vehicle simulation,” *Vehicle System Dynamics*, vol. 30, no. 3-4, pp. 295-313, 1998.
- [10] M. Ramírez-Barrios, J. Collado, and F. Dohnal, “Stability of periodic Hamiltonian systems with equal dissipation,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 112, no. 19, pp. 17033-17053, 2024.