



# Determinación del dominio de contacto y reparto de carga en engranajes cónicos de evolvente de ejes paralelos y dientes rectos

Giuseppe Sciarra<sup>1</sup>, Marco Carricato<sup>1</sup>, Miguel Pleguezuelos<sup>2</sup>, Miryam B. Sánchez<sup>2</sup>, José I. Pedrero<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Bologna, [giuseppe.sciarra2@unibo.it](mailto:giuseppe.sciarra2@unibo.it), [marco.carricato@unibo.it](mailto:marco.carricato@unibo.it)

<sup>2</sup> Departamento de Mecánica, UNED, [mpleguezuelos@ind.uned.es](mailto:mpleguezuelos@ind.uned.es), [msanchez@ind.uned.es](mailto:msanchez@ind.uned.es), [jpedrero@ind.uned.es](mailto:jpedrero@ind.uned.es)

*Los engranajes cónicos de evolvente, también conocidos como engranajes beveloides, son engranajes rectos o helicoidales cuyo radio de cabeza varía linealmente a lo largo del ancho del diente. Aunque el aspecto es el de un engranaje cónico, sus secciones transversales presentan la geometría de un engranaje recto, si bien el radio de cabeza, el radio de pie y el factor de desplazamiento son diferentes en cada una. Particular interés tienen los engranajes beveloides de ejes paralelos, y por tanto con igual ángulo de cono en piñón y rueda pero con ambos conos invertidos, porque permiten controlar la holgura con pequeños desplazamientos axiales. Son, por ello, utilizados en posicionadores de precisión y aplicaciones de robótica.*

*Debido a los diferentes radios de cabeza y desplazamientos en cada sección transversal, los puntos de inicio y finalización de engrane son distintos en cada una, lo que se traduce en que cada sección comienza y finaliza su engrane en un instante –o en una posición de engrane– también diferente. Consecuencia de ello es que, a pesar de tratarse de engranajes de dientes rectos, presentan un grado de recubrimiento axial que influye en las condiciones de contacto, condiciones que serán a su vez determinantes para la estimación de las condiciones de carga y resistencia.*

*Por otro lado, aunque en este tipo de transmisiones el ángulo de cono es pequeño –por lo general, por debajo de 5°–, las variaciones ocasionadas por la propia geometría en los factores de desplazamiento pueden ser suficientemente grandes para presentar problemas de penetración o apuntamiento en los dientes, incluso para anchos de cara pequeños, lo que también ha de tomarse en consideración para la determinación de los intervalos de contacto en cada posición de engrane.*

*En este trabajo se presenta un estudio del dominio de contacto y el reparto de carga en engranajes beveloides de dientes rectos y ejes paralelos, que toma en consideración la influencia de la aparición de penetración o apuntamiento en los dientes. Se presentan, asimismo, ecuaciones aproximadas para la determinación del radio de apuntamiento y del radio de cabeza para un espesor preestablecido, necesarias para introducir las correcciones apropiadas en la geometría del engrane.*

## 1. Introducción

Los engranajes cónicos de evolvente, también denominados engranajes beveloides, constituyen un tipo de engranajes versátil y eficiente, empleado en la transmisión de movimiento y potencia entre ejes en distintas configuraciones, ya sea de ejes paralelos, que se cruzan o que se cortan. Su principal característica es que el radio de cabeza varía linealmente a lo largo del ancho del diente sin variar el módulo, lo que proporciona adaptabilidad geométrica y optimización del contacto, para las configuraciones antes citadas. Esta geometría los convierte en una opción especialmente adecuada para aplicaciones en las que la precisión y la durabilidad son requisitos fundamentales [1, 2].

Uno de los aspectos determinantes en el diseño de engranajes beveloides es el análisis del dominio de contacto y el reparto de carga entre dientes a lo largo del engrane, factores directamente vinculados a la vida útil y rendimiento del sistema de transmisión. Estudios recientes han profundizado en la modelización matemática de las superficies de los dientes para analizar el comportamiento en contacto y minimizar los efectos adversos, como el desgaste y la vibración [3, 4]. Además, se ha prestado especial atención a la rigidez de engrane, parámetro clave que determina la capacidad del engranaje para resistir cargas y mantener la estabilidad durante el funcionamiento [5, 6].

Los fenómenos de penetración y apuntamiento tienen un significativo impacto en la longitud efectiva de engrane. Este efecto no solo reduce la capacidad de carga, sino que también altera el perfil del contacto, incrementando el riesgo de fallos prematuros. Para modelar estos fenómenos y desarrollar soluciones de diseño que mitiguen sus efectos se han utilizado métodos analíticos y simulaciones numéricas [7, 8].

Por otro lado, avances en las técnicas de fabricación como el rectificado generativo, han permitido producir engranajes beveloides de alta precisión y con adaptaciones específicas en su geometría para optimizar el contacto y el reparto de carga. No obstante, estas técnicas presentan limitaciones económicas y técnicas en ciertas configuraciones, lo que pone de manifiesto la necesidad del empleo de métodos más eficientes [9, 10].

En este trabajo se presenta un estudio del dominio de contacto y el reparto de carga en engranajes beveloides de dientes rectos y ejes paralelos, que tiene en cuenta la influencia de la aparición de penetración o apuntamiento en las secciones extremas de los dientes. Se presentan, asimismo, ecuaciones aproximadas para la determinación del radio de apuntamiento y del radio de cabeza para un espesor preestablecido, que facilitan el cálculo de las correcciones que se han de introducir en la geometría del engrane para asegurar su correcto funcionamiento.

## 2. Geometría de los engranajes beveloides de dientes rectos

Un engranaje beveloide se talla sobre un tocho de forma troncocónica, con herramienta y movimiento de generación idénticos al de un engranaje cilíndrico, pero con un movimiento de corte que no es paralelo al eje del tocho sino a su generatriz, como se muestra en la Fig. 1-izq. El resultado es un engranaje cuyas secciones transversales forman una sucesión de engranajes rectos o helicoidales, con igual módulo, ángulo de presión y número de dientes, pero diferente desplazamiento, radio de cabeza y radio de pie. Como es evidente, estas tres magnitudes varían linealmente con la profundidad de la sección, las tres con igual pendiente, igual a su vez a la tangente del ángulo de cono del tocho. La Fig. 1-izq. muestra el esquema de un engranaje beveloide de dientes rectos; en la Fig. 1-dcha. se puede apreciar la diferencia entre un engranaje cilíndrico recto, uno beveloide recto y uno cónico recto.

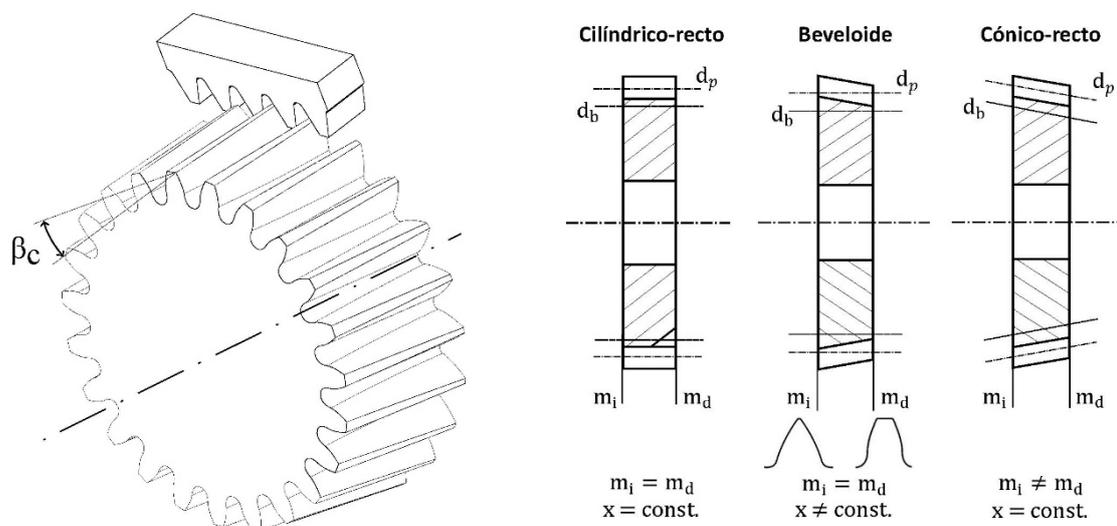
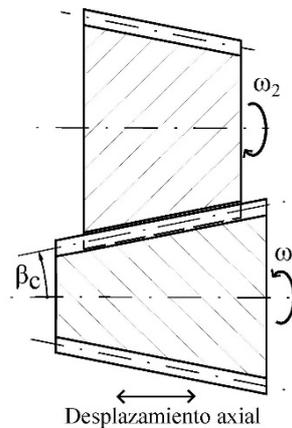


Figura 1: Piñón beveloide de dientes rectos.

Un caso de particular interés es el de engranajes beveloides con igual ángulo de cono en piñón y rueda, y montaje con ejes paralelos –y, por tanto, con conos invertidos–, como se muestra en la Fig. 2, de manera que la holgura de paso se puede controlar tanto con la variación de la distancia entre ejes como con el desplazamiento axial relativo de ambas ruedas. Por esta razón, los engranajes beveloides se utilizan con frecuencia en aplicaciones en que sea deseable una holgura nula, como posicionadores de precisión y accionamientos para aplicaciones de robótica [11].



**Figura 2:** Engranaje beveloide de ejes paralelos.

Es de destacar que la variación del coeficiente de desplazamiento, el radio de cabeza y el radio de pie a lo ancho del diente puede ocasionar fenómenos de penetración y apuntamiento en las secciones extremas del piñón, que influyen de forma directa en los grados de recubrimiento efectivo. Además, como los radios de inicio de contacto en cada sección transversal son diferentes (puesto que dependen de los radios de cabeza de la rueda contraria, que son diferentes en cada sección), la posición relativa de piñón y rueda en la que se inicia el contacto en cada sección es también diferente. Dicho de otra forma, las secciones van iniciando su contacto de manera progresiva, de manera similar a los engranajes cilíndricos helicoidales, lo que se traduce en algo parecido a un grado de recubrimiento axial, incluso en el caso de engranajes beveloides de dientes rectos. De hecho, no es inusual el caso de que, debido a este desfase en el inicio del contacto de las secciones transversales, el giro total del engranaje entre el inicio del contacto en la primera sección de un diente y la finalización en la última sea mayor que el doble del paso angular, es decir, que presente un grado de recubrimiento efectivo mayor que 2, incluso cuando el grado de recubrimiento de las secciones sea menor que 2 en todas ellas.

El inicio de contacto de un diente comenzará en la sección con menor radio de inicio (mayor radio de cabeza efectivo en la rueda conducida) y finalizará en la sección de mayor radio de finalización (mayor radio de cabeza en la rueda conductora). Sin embargo, la sección de menor radio de inicio, en que se inicia el contacto, no siempre será la sección extrema, pues si se ha producido penetración el radio de inicio aumenta, y el inicio del contacto se retrasa en esa sección. En consecuencia, el contacto se iniciaría en una sección próxima a la extrema, y se iría propagando axialmente en ambos sentidos. Y algo similar podría ocurrir con la finalización del engrane, si en las secciones extremas se hubiera producido apuntamiento; no obstante, puesto que el radio de apuntamiento aumenta con el desplazamiento, y el desplazamiento es máximo en la sección extrema, el contacto siempre finaliza en esta sección extrema. En efecto, un desplazamiento mayor produce un diente más ancho, con los perfiles de ambos lados más separados entre sí, de manera que su intersección se produce en un punto más alto, que se traduce en un radio de cabeza efectivo mayor.

Como se deduce de lo anterior, se trata de una geometría que reviste cierta complejidad y que requiere de un análisis detallado de los dominios de contacto para poder evaluar la variación de la rigidez y el reparto de carga a lo largo del ciclo de engrane. Para un engranaje beveloide de dientes rectos y ejes paralelos, los radios de cabeza  $r_o$ , los radios de pie  $r_d$  y los desplazamientos  $x$  de cada sección transversal vienen dados por:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= x_{o1/o2} \pm \frac{z}{m} \operatorname{tg} \beta_c \\ r_{o1/o2} &= r_{o01/o02} \pm z \operatorname{tg} \beta_c \\ r_{d1/d2} &= r_{d01/d02} \pm z \operatorname{tg} \beta_c \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $m$  es el módulo,  $\beta_c$  el ángulo de cono,  $z$  la coordenada en dirección axial correspondiente a la sección transversal considerada, y los subíndices 1 y 2 designan el piñón y la rueda, respectivamente, a los que corresponden también, en el mismo orden, los signos superior e inferior de los términos de la derecha. El subíndice 0 corresponde a la sección transversal de referencia, que por lo general se hace coincidir con la sección media del engranaje, de manera que, si  $b$  es el ancho de cara, se tiene:

$$-\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \quad (2)$$

Puesto que el módulo, el ángulo de presión  $\alpha_n$  y los números de dientes,  $Z_1$  y  $Z_2$ , no varían de una sección transversal a otra, los radios primitivos  $r_p$  y los radios de base  $r_b$  son también constantes. Consecuentemente, la condición de engrane es la misma para todas las secciones, y su expresión no depende de la coordenada  $z$  [12, 13]:

$$\xi_1 + \xi_2 = \frac{Z_1 + Z_2}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (3)$$

donde  $\alpha'_t$  es el ángulo de presión transversal de operación y  $\xi$  el parámetro del perfil correspondiente al punto de contacto, que se expresa como [12, 13]:

$$\xi_{1/2} = \frac{Z_{1/2}}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{r_{C1/C2}}{r_{b1/b2}}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

siendo  $r_C$  el radio del punto de contacto. Se puede comprobar que  $\xi_1$  y  $\xi_2$  varían linealmente con la distancia a lo largo de la línea de presión, de manera que se puede definir una coordenada  $\xi$  sobre la línea de presión, que se hace igual al valor de  $\xi_1$  cuando el contacto se produce en ese punto de la línea de presión. De acuerdo con ello, el grado de recubrimiento  $\varepsilon_\alpha$  de cada sección viene dado por:

$$\varepsilon_\alpha(z) = \xi_{out}(z) - \xi_{inn}(z) \quad (5)$$

En esta ecuación,  $\xi_{out}(z)$  y  $\xi_{inn}(z)$  corresponden con los puntos de contacto superior e inferior de la sección caracterizada por  $z$ .  $\xi_{out}(z)$  puede calcularse con la ec. (4) particularizada para  $r_{C1} = r_{o1}$ .  $\xi_{inn}(z)$  sería el punto del piñón que engrana con la cabeza de la rueda, y por tanto corresponde al valor de  $\xi_1$  que se obtendría de hacer  $\xi_2 = \xi_{o2}$  en la ec. (3), donde  $\xi_{o2}$  se calcula de nuevo con la ec. (4) particularizada para  $r_{C2} = r_{o2}$ . Sin embargo, eso será cierto únicamente en las secciones en las que no se presente penetración ni apuntamiento. Si se presenta apuntamiento,  $\xi_{out}(z)$  no corresponde con el valor de  $r_o$  dado por la ec. (1) sino con el radio de apuntamiento  $r_o^*$ , en el que se cortan los perfiles de evolvente de ambos lados. Para su determinación se ha desarrollado una fórmula aproximada que se presenta en el Anexo I. De acuerdo con ello, se puede afirmar con generalidad que el valor de  $\xi_{out}(z)$  se puede calcular mediante la ecuación:

$$\xi_{out}(z) = \min(\xi_o(z), \xi_o^*(z)) \quad (6)$$

donde  $\xi_o$  y  $\xi_o^*$  se calculan con la ec. (4) para valores del radio del punto de contacto  $r_{o1}$  y  $r_{o1}^*$ . Análogamente, en las secciones en las que hay penetración el parámetro del punto  $E$  de intersección entre evolvente y trocoide se puede aproximar mediante la expresión [14]:

$$\xi_{E1} = \left(\frac{Z_1}{2\pi}\right) 0,523191 \left[ \arccos\left(\frac{\delta}{r_{b1}}\right) - \alpha_t \right] \quad (7)$$

$$\delta = r_p - m(h_{a0} - x - r_f + r_f \operatorname{sen} \alpha_n)$$

en la que  $\alpha_t$  es el ángulo de presión transversal (que en el caso de un engranaje recto es igual al normal,  $\alpha_n$ ),  $h_{a0}$  el factor de altura de cabeza de la herramienta y  $r_f$  el factor de radio de acuerdo en la cabeza de la herramienta. En el caso de que el punto del perfil de la rueda que engrana con  $E_1$  esté situado por debajo del punto de cabeza se produce lo que se conoce como engrane en vacío, porque el engrane efectivo termina en este punto, y los puntos exteriores del perfil de la rueda no encuentran perfil en el piñón con el que engranar. Así pues, el punto inferior de engrane será:

$$\xi_{inn}(z) = \max(\xi_{E1}(z), \xi_{inn}^*(z)) \quad (8)$$

siendo  $\xi_{inn}^*$  el parámetro correspondiente al teórico punto de contacto del piñón con el punto de cabeza de la rueda  $\xi_{o2}$  (que no existe en el perfil, pero que existiría de no haber penetración), que se puede calcular con la ec. (3).

La penetración reduce la resistencia del diente frente al fallo por tensión en la base, e incluso reduce el grado de recubrimiento si se produce engrane en vacío; sin embargo, no impide un correcto funcionamiento de la transmisión aunque sea con una menor capacidad de carga. Por el contrario, un diente apuntado no es capaz de soportar apenas carga sin la aparición de mellas, por lo que no es admisible en la práctica. La norma AGMA, por ejemplo, recomienda, para engranajes de potencia, un espesor mínimo en la cabeza de 0,3 veces el módulo [15]. En el caso de engranajes beveloides, la manera más eficaz de evitar el apuntamiento de los dientes en las secciones del piñón más cercanas a la base mayor del tronco de cono consiste en aplicar un rebaje en esa zona, también de forma troncocónica, con un ángulo de cono  $\beta_{cr}$  menor que el inicial  $\beta_c$ , de manera que el radio de cabeza de esas secciones del piñón se reduce, asegurando un determinado espesor en la cabeza del diente en la sección extrema, que es siempre la de menor espesor, de manera que se tiene:

$$r_{o1} = r_{o01} + z \operatorname{tg} \beta_c \quad \text{para} \quad -\frac{b}{2} \leq z \leq 0$$

$$r_{o1} = r_{o01} + z \operatorname{tg} \beta_{cr} \quad \text{para} \quad 0 \leq z \leq \frac{b}{2} \quad (9)$$

El ángulo de cono de la zona rebajada viene dado por el radio de cabeza en la sección extrema requerido para asegurar un espesor mínimo, y el radio de la sección en la que entronca con el tocho inicial. Para el cálculo del radio de cabeza que asegura un valor específico del ancho del diente en la punta, se ha desarrollado otra fórmula aproximada que se presenta en el Anexo II. Para la unión de los dos troncos de cono, en este trabajo se tomará la sección media del engranaje,  $z = 0$ , a la cual está referida la ec. (9).

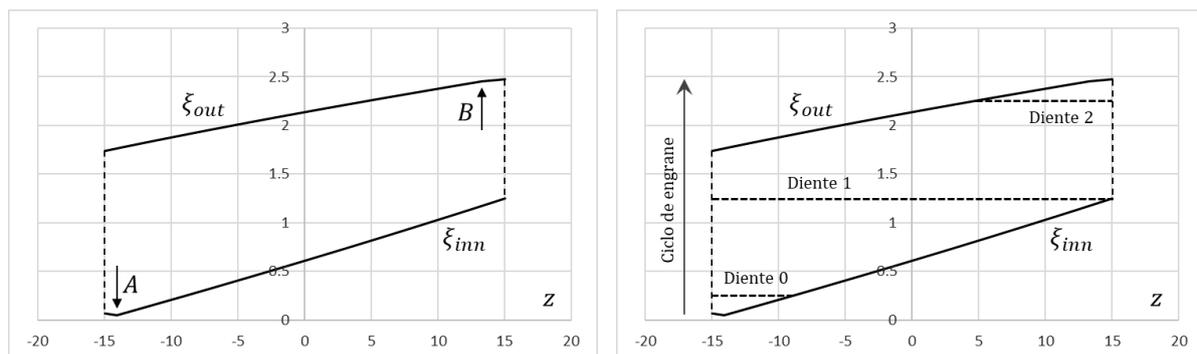
### 3. Dominio de contacto

El dominio de contacto es la representación gráfica de los puntos de contacto existentes en cada posición del ciclo de engrane. En la Fig. 3-izq. se han representado, para el engranaje descrito en la Tabla 1, los valores de  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$  en función de la coordenada axial  $z$ . En cada posición de engrane, todas las secciones de un diente contactan en puntos situados a igual distancia del eje de giro (es decir, con un mismo valor de  $\xi$ ); en consecuencia, la línea de contacto instantánea se representa mediante una recta horizontal, y el dominio de contacto está constituido por todos los puntos situados entre las mencionadas curvas de  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$ . Se puede apreciar la presencia de engrane en vacío en las secciones próximas a la base menor del tronco de cono del piñón, desde  $z = -15,0$  mm hasta  $z = -14,2$  mm (sección designada por A en la figura). Se aprecia también la reducción del grado de recubrimiento efectivo en las secciones de ese intervalo, y cómo esta reducción es tanto mayor cuanto menor (más negativo) es el valor de  $z$ , lo que no sorprende porque cuanto menor es el desplazamiento  $x$ , mayor es el grado de penetración. Más llamativo, en cambio, es que esta reducción del grado de recubrimiento debido al engrane en vacío es tan acusada que da lugar a que la pendiente de la curva de  $\xi_{inn}$  en ese intervalo sea negativa. Eso quiere decir que el inicio del engrane del diente, que se produce en el punto de menor  $\xi_{inn}$ , no ocurre en la sección extrema del diente, como cabría esperar, sino en la sección A, en la que deja de existir engrane en vacío.

**Tabla 1:** Geometría del engranaje beveloide.

	Símbolo	Unidades	Piñón/rueda
Módulo	$m$	mm	1
Ángulo de presión	$\alpha_n$	°	20
Altura de cabeza herramienta	$mh_{a0}$	mm	1,25
Radio de acuerdo herramienta	$mr_f$	mm	0,25
Número de dientes	$Z_1/Z_2$		18 / 120
Factor de desplazamiento (*)	$x_1/x_2$		0,55 / -0,55
Radio de cabeza (*)	$r_{o1}/r_{o2}$	mm	10,55 / 60,45
Ancho de cara	$b$	mm	30,00
Distancia entre ejes	$C$	mm	69,00
Ángulo de cono	$\beta_c$	°	2,5

(\*) Referido a la sección transversal de referencia.



**Figura 3:** Dominio de contacto de engranaje beveloide de dientes rectos.

También se puede apreciar, en la curva de  $\xi_{out}$ , la aparición de apuntamiento, a partir de la sección B. Se produce una reducción del grado de recubrimiento en esas secciones, si bien en este caso no es tan pronunciada, y el valor de  $\xi_{out}$  no deja de crecer con  $z$ . El inicio del contacto de una pareja de dientes se producirá en el punto correspondiente al mínimo de la curva de  $\xi_{inn}$ , es decir, en  $\xi_{inn}(z_A)$ , y finalizará en el punto correspondiente al máximo de la curva de  $\xi_{out}$ , es decir, en  $\xi_{out}(z_{max})$ , como se ha representado en la Fig. 3-dcha. En un instante dado, una pareja de dientes puede estar contactando en cualquier punto cuyo  $\xi$  esté contenido en el intervalo  $\xi_{inn}(z_A) \leq \xi \leq \xi_{out}(z_{max})$ . En ese instante, las parejas anteriores (las que engranaron antes que ésta) estarán en las posiciones correspondientes a  $(\xi + 1)$ ,  $(\xi + 2)$ , etc., y las parejas siguientes en  $(\xi - 1)$ ,  $(\xi - 2)$ , etc., como se

puede deducir de la ec. (4). De ellas estarán en contacto únicamente las que su  $(\xi + j)$  esté incluido en el intervalo  $\xi_{inn}(z_A) \leq (\xi + j) \leq \xi_{out}(z_{max})$ . El grado de recubrimiento efectivo del engranaje beveloide será:

$$\varepsilon_{\alpha-eff} = \xi_{out}(z_{max}) - \xi_{inn}(z_A) \quad (10)$$

que en este caso toma el valor de 2,423. Que este valor sea mayor que 2 significa que, en parte del ciclo de engrane, hay tres dientes en contacto simultáneo. Sin embargo, ninguna de las secciones transversales tiene un grado de recubrimiento mayor que 2. Esto lo que indica es que, en los intervalos de tres dientes en contacto, nunca hay más de dos contactando en la misma sección transversal. En la Fig. 3-dcha. se han representado las líneas de contacto de los tres dientes en contacto simultáneo en una de las posiciones de contacto triple, concretamente cuando el último de ellos está en la posición de contacto correspondiente a  $\xi = 0,25$ . Como se ha mencionado, en ese momento las dos parejas anteriores están contactando en los puntos  $\xi = 1,25$  y  $\xi = 2,25$ . En la figura se aprecia que la línea de contacto de la primera pareja de dientes abarca las secciones contenidas en el intervalo  $-15 \leq z \leq -9$ , la de la segunda pareja abarca el ancho de cara entero  $-15 \leq z \leq 15$ , y la tercera el intervalo  $4 \leq z \leq 15$ . En efecto, en ninguna sección hay tres parejas de dientes en contacto simultáneo.

Como se ha indicado más arriba y se aprecia en el quiebro que hace la curva de  $\xi_{out}$  en el punto B, en las secciones próximas a la base mayor del piñón aparece apuntamiento en la cabeza de los dientes, lo que no es admisible y exige la aplicación de un rebaje troncocónico que se extenderá a todas las secciones de  $z$  positivo. De acuerdo con la ecuación aproximada presentada en el Anexo I, el radio de apuntamiento de la sección extrema es:

$$r_{o1}^*(z_{max}) = 11,170 \text{ mm} \quad (11)$$

Partiendo de ese valor, si se impone que el espesor del diente en la cabeza no sea inferior a 0,3 veces el módulo, la expresión desarrollada en el Anexo II proporciona un valor máximo del radio de cabeza en la sección extrema de:

$$r_{o1}(z_{max}) \leq 10,991 \text{ mm} \quad (12)$$

Puesto que, según se desprende de la Tabla 1, el radio de cabeza en la sección de referencia es de 10,55 mm, el ángulo de cono del rebaje deberá verificar:

$$\beta_{cr} \leq \arctg \frac{10,991 - 10,55}{15} = 1,68^\circ \quad (13)$$

por lo que se tomará  $\beta_{cr} = 1,5^\circ$ .

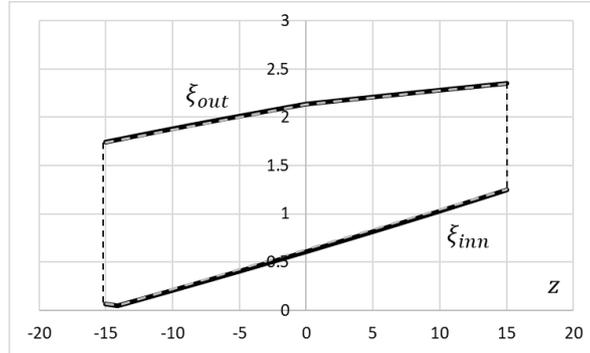


Figura 4: Dominio de contacto de engranaje beveloide con rebaje.

La Fig. 4 muestra el dominio de contacto de un engranaje idéntico al anterior, al que se le ha practicado el rebaje. Se aprecia que la curva de  $\xi_{inn}$  es idéntica a la anterior, lo que es así por razones bastante evidentes. La curva de  $\xi_{out}$  es igual a la anterior para  $z \leq 0$ ; y difiere en la zona rebajada,  $z > 0$ , también por razones evidentes. El valor de  $(\xi_{out}(z))_{max}$  se reduce, con lo que el grado de recubrimiento efectivo es, en este caso, 2,300, algo inferior al anterior.

#### 4. Rigidez de engrane

Partiendo del principio de mínima energía potencial de deformación, se obtuvo que la rigidez de una pareja de dientes rectos se puede aproximar mediante la ecuación [12, 13, 16, 17]:

$$K_M(\xi) = K_{Mmax}^* b \cos(b_0(\xi - \xi_m)) \quad (14)$$

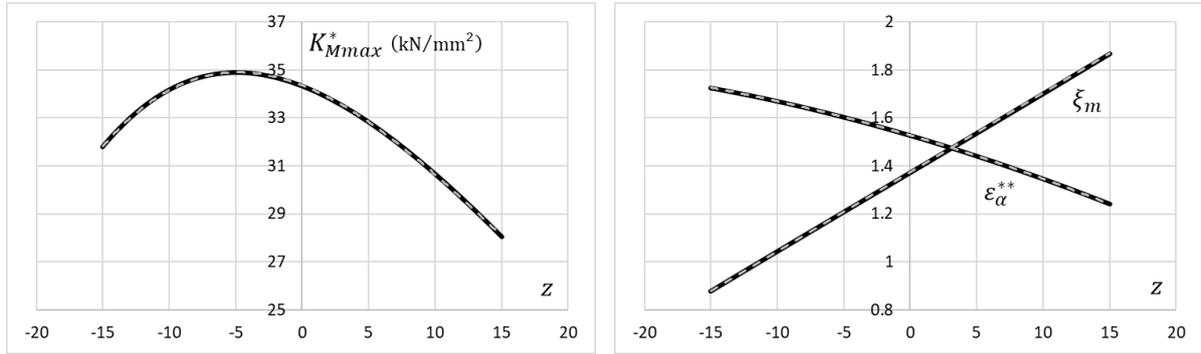
donde  $K_{Mmax}^*$  es la rigidez máxima por unidad de ancho de cara, y  $b_0$  y  $\xi_m$  parámetros que dependen del grado de recubrimiento  $\varepsilon_{\alpha}^{**}$  de un engranaje recto con idéntica geometría, pero altura de cabeza de los dientes igual al módulo y distancia entre centros nominal con desplazamiento. El procedimiento de cálculo de esos parámetros se puede encontrar en [12, 13, 16, 17].

En el caso de un engranaje beveloide, la ec. (14) es aplicable a cada sección transversal, sustituyendo el ancho de cara  $b$  por  $dz$ . Lo que ocurre es que, como cada sección transversal tiene una geometría diferente, los valores de  $K_{Mmax}^*$ ,  $b_0$  y  $\xi_m$  son también diferentes, y por tanto son funciones de  $z$ :

$$dK_M(\xi, z) = K_{Mmax}^*(z) \cos\left(b_0(z)(\xi - \xi_m(z))\right) dz \quad (15)$$

Como se indicó más arriba, en una posición de engrane determinada, todas las secciones transversales del diente contactan en puntos con igual valor de  $\xi$ , por lo que cada posición de contacto se puede caracterizar por ese valor de  $\xi$ . De acuerdo con ello, la rigidez de la pareja de dientes, en la posición de contacto caracterizada por  $\xi$  será la integral de la expresión de la ec. (15) extendida al intervalo de  $z$  de las secciones en contacto en ese momento (en esa posición). La rigidez de engrane será el sumatorio de las rigideces de todas las parejas de dientes en contacto simultáneo en esa misma posición.

Si se calculan, mediante el procedimiento descrito en [16, 17], los valores de  $K_{Mmax}^*(z)$ ,  $\varepsilon_\alpha^{**}(z)$  (a partir del cual se calcula  $b_0(z)$  [16, 17], como se presenta más abajo) y  $\xi_m(z)$  para todas las secciones transversales, esto es, para todos los valores del intervalo  $-b/2 \leq z \leq b/2$ , y se representan en unos ejes coordenados, se obtienen los diagramas de la Fig. 5.



**Figura 5:** Parámetros para el cálculo de la curva de rigidez de la pareja de dientes en cada sección transversal.

Con estas curvas y los dominios de contacto de la Fig. 4 es posible obtener la rigidez de la pareja de dientes integrando la ec. (15) para cada valor de  $\xi$ , entre los límites  $z_{min}$  y  $z_{max}$  de cada  $\xi$ . No obstante, facilita mucho la labor obtener expresiones cerradas de estos parámetros, que puedan utilizarse para calcular las integrales. Y, afortunadamente, no resulta complicado. En la Fig. 5-izq. se puede apreciar que la rigidez unitaria  $K_{Mmax}^*$  se aproxima muy fielmente mediante una curva de tercer grado, que aparece representada en gris con línea de trazos, sobre la línea negra continua, obtenida mediante el procedimiento descrito en [16, 17]. En efecto, ambas curvas son casi idénticas, y el coeficiente de determinación  $R^2$  obtenido es prácticamente igual a 1. También las curvas de  $\xi_m$  y  $\varepsilon_\alpha^{**}$  se pueden aproximar con mucha precisión, la primera mediante una recta y la segunda mediante una curva de segundo grado, como se aprecia en la Fig. 5-dcha. También en este caso los coeficientes  $R^2$  obtenidos son prácticamente iguales a la unidad. Cabe destacar que, como se discutió en [17], con los valores obtenidos para  $\varepsilon_\alpha^{**}$ , el coeficiente  $b_0$  se calcula de forma inmediata con la ecuación:

$$b_0(z) = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_\alpha^{**}(z)}{2} + 1.11 \right)^2 - 1.17 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

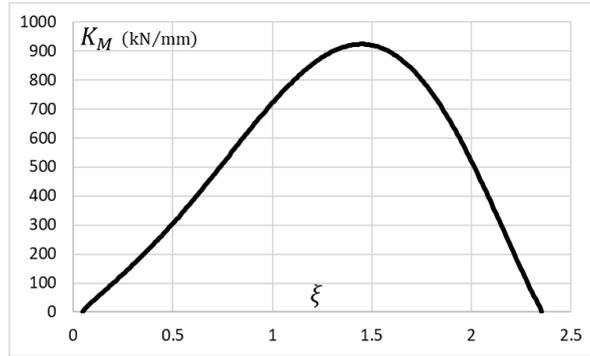
También las curvas de  $\xi_{inn}(z)$  y  $\xi_{out}(z)$  se pueden aproximar a dos tramos rectos cada una de ellas, como se ha representado en la Fig. 4. Ello permite obtener con gran facilidad las funciones inversas  $z(\xi_{inn})$  y  $z(\xi_{out})$ , que serán necesarias para la integración de la rigidez a lo largo de la línea de contacto. Se designará por  $z_{inn}^-(\xi)$  al tramo izquierdo de  $z(\xi_{inn})$ , es decir al que corresponde a las secciones transversales con engrane en vacío, y por  $z_{inn}^+(\xi)$  al tramo derecho de la misma curva. En la curva de  $z_{out}(\xi)$  no es necesaria esta distinción por tramos porque la relación  $z_{out}(\xi)$  es unívoca, es decir, sólo se puede encontrar un valor de  $z_{out}$  para cada valor de  $\xi$ .

Como se discutió más arriba, la línea de contacto en un diente viene representada en el diagrama del dominio de contacto de la Fig. 4 mediante una recta horizontal, de ordenada  $\xi$ . Esa línea de contacto está limitada por dos valores,  $z_{min}(\xi)$  y  $z_{max}(\xi)$ , definidos por la intersección de la recta horizontal con los límites del dominio de contacto. A la vista de la Fig. 4, se puede afirmar que:

$$\begin{aligned} z_{min}(\xi) &= \max(z_{inn}^-(\xi), z_{min}, z_{out}(\xi)) \\ z_{max}(\xi) &= \min(z_{inn}^+(\xi), z_{max}) \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $z_{min}$  y  $z_{max}$  son -15 mm y 15 mm, respectivamente, para el caso considerado. En consecuencia, se puede afirmar que la rigidez de una pareja de dientes en la posición de contacto definida por  $\xi$  se puede expresar como:

$$K_M(\xi) = \int_{z_{min}(\xi)}^{z_{max}(\xi)} dK_M(\xi, z) = \int_{z_{min}(\xi)}^{z_{max}(\xi)} K_{Mmax}^*(z) \cos(b_0(z)(\xi - \xi_m(z))) dz \quad (18)$$



**Figura 6:** Rigidez de la pareja de dientes de engranaje beveloide.

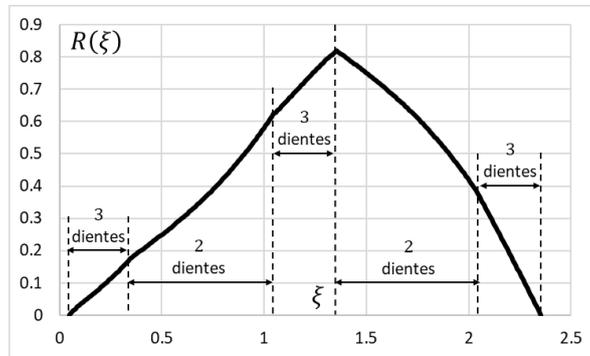
La Fig. 6 muestra la curva de rigidez de la pareja de dientes obtenida a partir de la ec. (18) para el engranaje beveloide considerado.

## 5. Reparto de carga

Como es bien sabido, el reparto de carga entre dientes en contacto simultáneo viene dado por la expresión:

$$R(\xi) = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_{Mj}(\xi)} \quad (19)$$

donde  $R(\xi)$  es el coeficiente de reparto de carga y el sumatorio está extendido a todas las parejas de dientes en contacto simultáneo en la posición de engrane definida por  $\xi$ . A partir de los datos obtenidos de la ec. (18) y representados en la Fig. 6, con la ec. (19) se obtiene una curva del coeficiente de reparto de carga como la de la Fig. 7.



**Figura 7:** Coeficiente de reparto de carga de engranaje beveloide.

Que la curva de  $R(\xi)$  se anule en los extremos del intervalo de contacto y alcance un máximo en la zona central no debe resultar extraño. Algo parecido, aunque con una forma diferente, ocurre con los engranajes cilíndrico-helicoidales que, como se ha indicado, presentan unas condiciones de contacto similares en muchos aspectos. En cambio, puede llamar la atención la brusquedad en el cambio de tendencia, creciente a decreciente, que se produce en torno al máximo.

El valor máximo de  $R(\xi)$  se alcanza para un valor de  $\xi$  igual a  $\xi_{max} - 1$ , es decir, justo en el instante en que la pareja de dientes anterior finaliza su engrane. En el caso que se está considerando,  $\xi_{max} = 2,352$  y, por tanto  $\xi_{Rmax} = 1,352$ . En el dominio de contacto de la Fig. 4 se aprecia que, para ese entorno de valores de  $\xi$ , la línea de contacto abarca el ancho de cara completo del engranaje. Por esa razón, la rigidez varía poco en ese entorno, como efectivamente se aprecia en la Fig. 6. A la izquierda del máximo  $\xi_{Rmax}$ , es decir, antes de alcanzarlo, además de la pareja de dientes considerada, están en contacto simultáneo la anterior y la siguiente. La pareja anterior, está en contacto en el punto de  $\xi$  ligeramente menor que 0,352, para el cual la línea de contacto está limitada por  $z_{min}$  y  $z_{in}^+(\xi)$ , por lo que su longitud aumenta con  $\xi$ , y la rigidez, consecuentemente, también. La pareja siguiente está en contacto en puntos de  $\xi$  ligeramente menor que 2,352, es decir, poco antes de finalizar el engrane, y en ese entorno las líneas de contacto están limitadas por  $z_{out}(\xi)$  y  $z_{max}$ . En este caso, la longitud de dichas líneas

disminuye con  $\xi$ , al igual que la rigidez. Sin embargo, en la Fig. 4 se aprecia que la pendiente de la recta  $\xi_{inn}(z)$  es mayor que la de  $\xi_{out}(z)$ , lo que significa que la longitud de contacto, y por tanto la rigidez, de la pareja de dientes anterior disminuye más rápidamente que aumenta la de la pareja de dientes siguiente. Eso significa que el denominador de la expresión de  $R(\xi)$  de la ec. (19) decrece con  $\xi$ , con lo que  $R(\xi)$  crece en ese intervalo.

A la derecha de  $\xi_{Rmax}$ , es decir, una vez superado, se tienen sólo dos parejas de dientes en contacto: la considerada y la siguiente; la anterior ya lo ha finalizado. Sus respectivas líneas de contacto mantienen las mismas tendencias, por lo que la rigidez de la pareja considerada se mantiene más o menos constante, y la de la siguiente crece; la suma de ambas crece, con lo que  $R(\xi)$ , de acuerdo con la ec. (19), decrece. No es extraño, por tanto, que el coeficiente de reparto de carga máximo se presente exactamente en el punto en que la pareja de dientes anterior finaliza su engrane, es decir:

$$\xi_{Rmax} = \xi_{max} - 1 \quad (20)$$

como así, en efecto, se ha obtenido.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado un riguroso estudio de la geometría de los engranajes cónicos de evolvente, de dientes rectos y ejes paralelos. Se ha obtenido el dominio de contacto, es decir, la longitud y posición de las líneas de contacto en cada posición de engrane, teniendo en cuenta la aparición de penetración y apuntamiento en las secciones extremas de los dientes del piñón. Para facilitar este análisis, se han desarrollado ecuaciones aproximadas para el radio de apuntamiento y para el radio de cabeza que asegura un valor preestablecido del espesor del diente en la punta. Con todo ello, se ha presentado un procedimiento para la determinación del ángulo de cono máximo del rebaje de los dientes para evitar el apuntamiento.

A partir de esa geometría, se aplicó el principio de mínima energía potencial de deformación para el cálculo de la rigidez de cada sección transversal de la pareja de dientes, para a continuación calcular, por integración a lo largo de la línea de contacto, la rigidez total de la pareja. El resultado guarda cierto parecido con la curva de rigidez de una pareja de dientes cilíndrico-helicoidales, lo que se explica por el hecho de que, en ambos casos, el contacto entre dientes se inicia de manera progresiva en las distintas secciones transversales.

Por último, y a partir de la curva de rigidez de la pareja de dientes obtenida, se ha representado la curva del coeficiente de reparto de carga a lo largo del camino de contacto. Esta curva presenta un máximo, que se ha demostrado que se encuentra siempre en la posición de contacto correspondiente al instante en que finaliza el engrane de la pareja de dientes anterior.

Esta curva de reparto de carga constituirá el fundamento de posteriores estudios de cálculo resistente, a presión superficial y a rotura en la base, necesarios para el diseño de este tipo de transmisiones.

## Agradecimientos

Los autores agradecen a la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación del proyecto de investigación PID2022-142632OB-I00 “Modelo para la simulación del reparto de carga y el error de transmisión de engranajes planetarios”. Asimismo, desean expresar su agradecimiento al programa NextGenerationEU, a través del Plan Nacional de Recuperación y Resiliencia (PNRR) de Italia, Misión 4, Componente 2, Inversión 3.3 (DM 352/2022), y a Bonfiglioli SpA, por su soporte al proyecto CUP J33C22001480009 “Innovative gearboxes for robotic applications”.

## Anexo I: Ecuación aproximada para el radio de apuntamiento

El espesor angular en la cabeza del diente es:

$$\gamma_o = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2(\theta_o - \operatorname{arctg} \theta_o) \quad (I.1)$$

donde:

$$\theta_o = \sqrt{\left(\frac{r_o}{r_b}\right)^2 - 1} \quad (I.2)$$

De acuerdo con ello, para el diente apuntado:

$$0 = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) - 2(\theta_o^* - \operatorname{arctg} \theta_o^*) \quad (I.3)$$

y, restando ambas ecuaciones:

$$(\theta_o^* - \arctg \theta_o^*) - (\theta_o - \arctg \theta_o) = \frac{\gamma_o}{2} \quad (I.4)$$

Desarrollando en serie de Taylor de la función  $(\theta_o^* - \arctg \theta_o^*)$  en torno a  $\theta_o$  y aproximando a los tres primeros términos del desarrollo, se tiene:

$$\begin{aligned} f(\theta_o^*) &= f(\theta_o) + f'(\theta_o)(\theta_o^* - \theta_o) + \frac{1}{2}f''(\theta_o)(\theta_o^* - \theta_o)^2 \\ f(\theta_o^*) - f(\theta_o) &= \frac{\gamma_o}{2} = \frac{\theta_o^2}{1 + \theta_o^2}(\theta_o^* - \theta_o) + \frac{1}{2} \frac{2\theta_o}{(1 + \theta_o^2)^2}(\theta_o^* - \theta_o)^2 \end{aligned} \quad (I.5)$$

ecuación de segundo grado en  $(\theta_o^* - \theta_o)$ , cuyas soluciones son:

$$(\theta_o^* - \theta_o) = \frac{1}{2}(1 + \theta_o^2) \left[ -\theta_o \pm \sqrt{\theta_o^2 + 2 \frac{\gamma_o}{\theta_o}} \right] \quad (I.6)$$

Si el valor de  $\gamma_o$  de partida es mayor que cero (lo que significa que el diente de partida no está apuntado), el parámetro  $\theta_o^*$  del radio de apuntamiento tiene que ser mayor que  $\theta_o$ , y por tanto  $(\theta_o^* - \theta_o) > 0$ , lo que obliga a tomar el signo positivo de la raíz, con lo que se obtiene:

$$\theta_o^* = \theta_o + \frac{(1 + \theta_o^2)}{2} \left[ \sqrt{\theta_o^2 + 2 \frac{\gamma_o}{\theta_o}} - \theta_o \right] \quad (I.7)$$

y, a partir de ello, el radio de apuntamiento, de acuerdo con la ec. (I.2), se calcula como:

$$r_o^* = r_b \sqrt{1 + \theta_o^{*2}} \quad (I.8)$$

## Anexo II: Ecuación aproximada para el radio de cabeza con espesor predefinido

Para imponer una condición de espesor en la cabeza del diente (algunas normas [15] marcan un valor mínimo de 0,3m) se desarrollará la función espesor  $e(\theta_o)$  en torno al punto de apuntamiento  $\theta_o^*$  –calculado en el Anexo I–, se aproximará a los tres primeros términos y se resolverá la ecuación de segundo grado resultante.

El espesor en la cabeza se puede expresar como:

$$e(\theta_o) = r_o \gamma_o = r_b \sqrt{1 + \theta_o^2} (\gamma_b - 2(\theta_o - \arctg \theta_o)) \quad (II.1)$$

donde  $\gamma_b$  es el espesor angular entre los perfiles de evolvente en la circunferencia de base:

$$\gamma_b = \frac{\pi}{Z} + \frac{4x}{Z} \operatorname{tg} \alpha_n + 2(\operatorname{tg} \alpha_t - \alpha_t) \quad (II.2)$$

Desarrollando la función  $e(\theta_o)$  en serie de Taylor en torno a  $\theta_o^*$  y aproximando a los tres primeros términos, se obtiene:

$$e(\theta_o) = -2r_b \frac{\theta_o^{*2}}{\sqrt{1 + \theta_o^{*2}}} (\theta_o - \theta_o^*) - \frac{1}{2} 4r_b \frac{\theta_o^*}{\sqrt{1 + \theta_o^{*2}}} (\theta_o - \theta_o^*)^2 \quad (II.3)$$

que, resuelta:

$$\theta_o = \frac{1}{2} \left( \theta_o^* + \sqrt{\theta_o^{*2} - 2 \frac{\sqrt{1 + \theta_o^{*2}}}{\theta_o^*} \frac{e(\theta_o)}{r_b}} \right) \quad (II.4)$$

En particular, para respetar el valor mínimo del espesor del diente en la punta establecido por las normas, el punto de cabeza tiene que cumplir la condición:

$$\theta_o \leq \frac{1}{2} \left( \theta_o^* + \sqrt{\theta_o^{*2} - 2 \frac{\sqrt{1 + \theta_o^{*2}}}{\theta_o^*} \frac{0,3m}{r_b}} \right) \quad (II.5)$$

y con ello, el radio de apuntamiento deberá ser:

$$r_o \leq r_b \sqrt{1 + \theta_o^2} \quad (II.6)$$

## Referencias

- [1] Chen Q., Song C., Zhu C., et al., “Manufacturing and contact characteristics analysis of internal straight beveloid gear pair”, *Mechanism and Machine Theory* **114**, 60–73 (2017).
- [2] Brecher C., Brumm M., Henser J., “Calculation of the tooth root load carrying capacity of beveloid gears”, *Gear Technology* **6/2014**, 50–61 (2014).
- [3] Wen J., Yao H., Yan Q., You B., “Research on time-varying meshing stiffness of marine beveloid gear system”, *Mathematics* **11**(23), 4774 (2023).
- [4] Zhu C., Song C., Lim T. C., Vijayakar S., “Geometry design and tooth contact analysis of crossed beveloid gears for marine transmissions”, *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **25**(2), 328–337 (2012).
- [5] Innocenti C., “The kinematics of conical involute gear hobbing”, *Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 1327–1339, Seattle, WA (2007).
- [6] Song C., Zhou S., Zhu C., et al., “Modeling and analysis of mesh stiffness for straight beveloid gear with parallel axes based on potential energy method”, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* **12**(7), 1–10 (2018).
- [7] Childs P. R. N., “Bevel gears”, *Mechanical Design Engineering Handbook*, 2<sup>a</sup> ed., Butterworth-Heinemann (2019).
- [8] Cao B., Alessandro F., Li G., et al., “A computerized method of contact pressure and load distribution for crossed beveloid gears”, *Mechanism and Machine Theory* **175**, 104943 (2022).
- [9] Shen Y., Sun J., “Parametric analysis of gear mesh and dynamic response of loaded beveloid gear systems”, *Mechanism and Machine Theory* **46**(8), 1189–1202 (2011).
- [10] Liu C. C., Chen Y. C., Lin S. H., “Contact stress analysis of straight concave conical involute gear pairs with small intersected angles”, *Proceedings of the International Multiconference of Engineers and Computer Scientists 2010*, Vol III, Hong Kong, China (2010).
- [11] Sciarra G., Mottola G., Casamenti G., Carricato M., “An innovative low-backlash Wolfrom gearbox with beveloid gears for robotic applications”, *New Trends in Mechanism and Machine Science, Proceedings of EuCoMeS 2024*, 337-346, Padova, Italia (2024).
- [12] Pedrero J. I., Artés M., Fuentes A., “Modelo de distribución de carga en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica* **3**(1), 31-43 (1999).
- [13] Pedrero J. I., Pleguezuelos M., Artés M., Antona J. A., “Load distribution model along the line of contact for involute external gears”, *Mechanism and Machine Theory* **45**(5), 780-794 (2010).
- [14] Pedrero J. I., Artés M., García-Masiá C., “Determination of the effective path of contact of undercut involute gear teeth”, *Journal of Mechanical Engineering Science* **218**(7), 751-760 (2004).
- [15] AGMA Information Sheet 908-B89, “Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth”, American Gear Manufacturers Association, Alexandria, VA, 1989.
- [16] Sánchez M. B., Pleguezuelos M., Pedrero J. I., “Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears”, *Meccanica* **48**(3), 527-543 (2013).
- [17] Sánchez M. B., Pleguezuelos M., Pedrero J. I., “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects”, *Mechanism and Machine Theory* **109**, 231-249 (2017).