



# Procedimiento de resolución del problema cinemático directo del hexápodo flexible 6-PFS

Mónica Urizar<sup>1</sup>, Oscar Altuzarra<sup>1</sup>, Kerman Bilbao<sup>1</sup>, Alfonso Hernández<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería de Bilbao, Universidad del País Vasco (UPV/EHU),  
(monica.urizar, oscar.altuzarra, kerman.bilbao, a.hernandez)@ehu.eus

---

*En los últimos años, están surgiendo cada vez más líneas de investigación en el ámbito de los manipuladores paralelos flexibles. Estos manipuladores flexibles comparten ciertas similitudes con sus homólogos rígidos, como pueden ser la multiplicidad de soluciones del problema cinemático directo, denominadas comúnmente modos de ensamblado. Si bien en los mecanismos flexibles planos ya existen métodos, en general numéricos, para obtener los modos de ensamblado del mecanismo, hasta ahora no se abordado esta problemática en el caso de los espaciales.*

*En este artículo, los autores presentan un procedimiento de resolución de los diferentes modos de ensamblado del hexápodo flexible 6-PFS. Dicho manipulador constituye la versión flexible de la clásica plataforma paralela Gough-Stewart, sustituyendo las cadenas cinemáticas prismáticas de la versión clásica, por unas barras esbeltas flexibles actuadas mediante guías lineales en su extremo inferior y conectadas a la plataforma móvil por pares esféricos en su extremo superior. La resolución del problema cinemático directo de este hexápodo flexible implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales que aseguran el cumplimiento de dos condiciones; por un lado, la condición de ensamblado geométrico, y por otro, la condición de equilibrio estático.*

*El procedimiento propuesto en este trabajo es un método de resolución de carácter numérico en el que se distinguen dos etapas. En una etapa inicial, imponiendo la condición de que las deformadas de cada barra se mantengan en su plano de referencia, se resolverán las soluciones posibles asociadas a la localización de la plataforma móvil mediante el modelo de deformación de Kirchhoff. En una etapa posterior, y utilizando como punto de partida cada una de las soluciones previamente obtenidas, se irá alterando la localización de la plataforma móvil y se buscará aquella solución para la cual las dos condiciones de ensamblado geométrico y equilibrio estático se cumplan. La fase de variación de la localización de la plataforma móvil se puede abordar a su vez de dos formas diferentes: o bien estableciendo una determinada trayectoria que debe trazar la plataforma móvil, o bien estableciendo una propagación radial automática desde la configuración centrada hasta el extremo de un radio de acción que el usuario establezca. El método propuesto en este trabajo nos permite obtener múltiples soluciones o modos de ensamblado del hexápodo flexible, objetivo que hasta ahora no se había conseguido en el campo de los manipuladores paralelos espaciales flexibles.*

---

## 1. Introducción

Los manipuladores paralelos flexibles (más conocidos como *Parallel Continuum Manipulators*, PCMs) son un tipo de robot paralelo que, a diferencia de los robots convencionales formados por elementos rígidos, incorporan elementos flexibles como barras flexibles, cables, o muelles para conectar el elemento terminal rígido a sus actuadores [1]. Estos manipuladores ofrecen una gran versatilidad a la vez que flexibilidad y precisión en la manipulación de objetos, por lo que tienen un gran potencial en diversos campos como la medicina, la industria aeroespacial y, en especial, en entornos colaborativos robot-humano, como es el caso de los llamados CoBots.

Los PCMs pueden tener diferentes configuraciones de diseño, constanding, en general, de una plataforma fija y una plataforma móvil conectadas por varios elementos flexibles, en una morfología de cadena cerrada típica de la cinemática paralela. En la referencia [2] se presenta una exhaustiva revisión bibliográfica de los trabajos existentes en el ámbito de los manipuladores paralelos flexibles, además de proponer una posible notación para sus diferentes tipologías. Hasta ahora, la mayoría de los trabajos se han centrado en manipuladores flexibles planos [3-6], y en el caso de los espaciales, el más estudiado ha sido el manipulador hexápodo flexible [1, 7-9] formado por seis barras esbeltas flexibles que conectan con la plataforma móvil, y cuya estructura cinemática tiene ciertas similitudes con la clásica plataforma paralela Gough-Stewart.

Si bien el análisis de la plataforma clásica Gough-Stewart ha sido abordado por múltiples autores desde hace varios años [10], tratando de resolver su cinemática directa al completo (varios autores han llegado a la conclusión de que la plataforma Gough-Stewart presenta un máximo de 40 soluciones), en el caso del manipulador hexápodo flexible todavía queda pendiente la resolución de su problema cinemático directo. En este trabajo, esta cuestión es precisamente la que abordaremos, proponiendo una metodología para obtener las distintas soluciones del problema directo del hexápodo flexible 6-PFS. Asimismo, se analizará la estabilidad de dichas soluciones, constatando el gran número de soluciones que, a pesar de ser posiciones de equilibrio, resultan ser inestables y, por tanto, no útiles en la práctica.

De entre los métodos existentes para analizar los manipuladores con barras flexibles, utilizaremos en este trabajo el modelizado en base a la teoría de Cosserat [11], en el cual la deformación de los elementos flexibles se expresa mediante un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales. La metodología de resolución se basa en un proceso numérico iterativo partiendo de un valor inicial de tanteo de ciertas variables de integración y minimizando un vector de residuos en el que se engloban el sistema de ecuaciones diferenciales que asegura la compatibilidad de las condiciones geométricas de montaje y el equilibrio del sistema en su conjunto.

## 2. Bases del análisis cinemático del hexápodo flexible

### 2.1. Modelización de la deformación de barras según teoría de Cosserat

Para realizar el análisis de un mecanismo formado por elementos flexibles esbeltos, en nuestro caso las barras flexibles que conformarán las cadenas cinemáticas, es necesario disponer de un modelo cinemático que establezca la deformada de la barra cuando está sometida a un conjunto de cargas externas. El modelo de Cosserat es una forma clásica de abordar este problema, cuya expresión matemática difiere en función de si la barra se discretiza con elementos finitos [12] o si trabajamos con la expresión continua de la misma [13], siendo la segunda más precisa. Aquí se considera la simplificación para el caso cuasiestático.

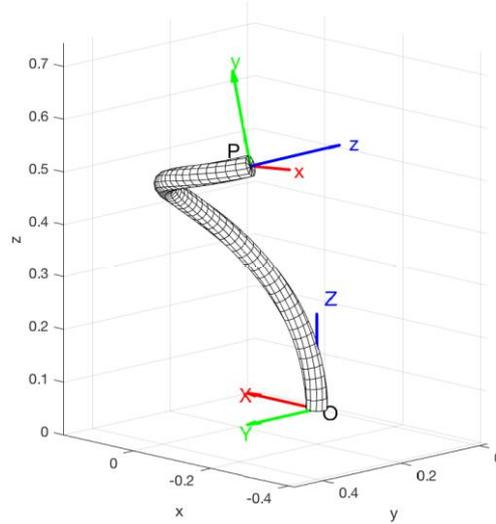
La deformada de una barra se define mediante una curva paramétrica en el espacio  $\mathbf{p}(s)$  que es función de la longitud de arco  $s$ , y por una matriz de rotación  $\mathbf{R}(s)$  que define la orientación de la sección trasversal (ver Fig. 1). Derivando ambas funciones respecto de  $s$ , se obtienen las variables que definen la deformación longitudinal,  $\mathbf{v}$ , y de curvatura,  $\mathbf{u}$ , entre secciones transversales de la barra:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}\mathbf{v} \quad (1)$$

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{u}} \quad (2)$$

Donde:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z(s) & u_y(s) \\ u_z(s) & 0 & -u_x(s) \\ -u_y(s) & u_x(s) & 0 \end{bmatrix}$$



**Figura 1:** Barra flexible según la teoría de Cosserat.

Las relaciones constitutivas son aquellas que expresan la relación que existe entre las deformaciones y las tensiones en un punto material. Dado que la modelización de Cosserat supone rígida la sección transversal, las relaciones constitutivas se pueden establecer entre los esfuerzos internos y las magnitudes  $\Delta \mathbf{v}$  y  $\Delta \mathbf{u}$ . Una descripción más detallada de las ecuaciones que aquí se obtienen se puede encontrar en [4].

$$\mathbf{n} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{SE} \Delta \mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{SE} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \quad (3)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{BT} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{BT} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{v}_0$  y  $\mathbf{u}_0$  son valores en la configuración libre de tensiones.

Aplicando las ecuaciones de equilibrio estático a una porción diferencial de longitud de la barra sometida a una fuerza y momento distribuidos,  $\mathbf{f}(s)$  y  $\mathbf{l}(s)$ , respectivamente, se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\mathbf{n}' + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\mathbf{m}' + \mathbf{p}' \times \mathbf{n} + \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Sustituyendo las Ecs. (3), (4) en (5), (6), reordenando, y considerando Ecs. (1) y (2) se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{R} \mathbf{v} \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{n}' &= -\mathbf{f} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{m}' = -\mathbf{p}' \times \mathbf{n} - \mathbf{l}$$

donde

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_{SE}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{n} + \mathbf{v}_0 \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_{BT}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{m} + \mathbf{u}_0 \quad (9)$$

Si no existen cargas aplicadas a lo largo de la barra, lo que es habitual en mecanismos paralelos flexibles, la barra está recta en estado libre de tensiones, y si el material tiene propiedades constantes, se obtienen varias simplificaciones (Ecs. (10)-(13)) definiendo el llamado modelo de Kirchhoff.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{R}' &= \mathbf{R}\hat{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{n}} &= \mathbf{0}\end{aligned}\tag{10}$$

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{K}_{BT}^{-1}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{K}_{BT}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{e}}_3\mathbf{R}^T\mathbf{n})$$

Mediante integración numérica se resuelve la deformada de la barra, así como la evolución de los esfuerzos internos. Se trata de un problema de contorno donde el valor de algunas variables se impone en el extremo inicial  $s = 0$ , y el valor de otras en el extremo opuesto  $s = L$ . Este problema, en general, no tiene solución única y requiere de un método numérico de resolución como el método de disparo o “shooting method”.

Es habitual usar cuaterniones unitarios  $\tilde{\mathbf{q}} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]$  para expresar la orientación de la sección transversal en el caso de barras espaciales, siendo entonces la matriz de rotación:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{|\tilde{\mathbf{q}}|^2} \begin{bmatrix} -q_2^2 - q_3^2 & q_1 q_2 - q_0 q_3 & q_1 q_3 + q_0 q_2 \\ q_1 q_2 + q_0 q_3 & -q_1^2 - q_3^2 & q_2 q_3 - q_0 q_1 \\ q_1 q_3 - q_0 q_2 & q_2 q_3 + q_0 q_1 & -q_2^2 - q_3^2 \end{bmatrix}\tag{11}$$

Por otro lado, la derivada del cuaternión unitario  $\tilde{\mathbf{q}}$  respecto a  $s$  resulta:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{ds} = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -u_x & -u_y & -u_z \\ u_x & 0 & u_z & -u_y \\ u_y & -u_z & 0 & u_x \\ u_z & u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}\tag{12}$$

Por tanto, tenemos el vector de variables dependientes  $\mathbf{y} = \{\mathbf{p} \ \tilde{\mathbf{q}} \ \mathbf{n} \ \mathbf{u}\}$  y la función no lineal  $f(s, \mathbf{y})$  de Ec. (10) definiendo un sistema de ecuaciones diferenciales que debe integrarse a lo largo de la variable  $s$  en  $[0, L]$ ,

$$\frac{d\mathbf{y}}{ds} = f = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}\mathbf{e}_3 \\ \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{BT}^{-1}(\hat{\mathbf{u}}\mathbf{K}_{BT}\mathbf{u} + \hat{\mathbf{e}}_3\mathbf{R}^T\mathbf{n}) \end{array} \right\}\tag{13}$$

## 2.2. Análisis del hexápodo flexible con barras de Cosserat

Consideremos a continuación un manipulador paralelo tipo hexápodo (ver Fig. 2a) formado por 6 barras flexibles  $A_i B_i$  que conectan la plataforma móvil a la base, controlando el movimiento de la plataforma móvil mediante un actuador lineal en cada una de las barras flexibles que desplaza su extremo  $A_i$ . Este manipulador bajo estudio es el hexápodo flexible 6-PFS, donde P y S hacen referencia a las juntas prismática y esférica respectivamente, y F indica la propia flexibilidad de la barra. Se puede apreciar cómo este manipulador tiene similitudes con la clásica plataforma paralela Gough-Stewart [10].

Asociando un sistema móvil a la plataforma móvil en un punto de referencia  $P$ , se puede definir su orientación mediante una matriz de rotación  $\mathbf{R}_{EE}$  o con un cuaternión unitario  $\tilde{\mathbf{e}}$ . El vector de posición de los puntos extremos distales  $B_i$ , expresado en el sistema móvil es  $\mathbf{r}_i$ . Por otro lado, el vector  $\mathbf{a}_i$  define, en el sistema fijo, la localización de los extremos ligados a los actuadores, puntos  $A_i$ . Al resolver el problema de posición de estos mecanismos flexibles, hay que tener en cuenta que para que una posición del mecanismo sea válida las deformadas de las barras deben cumplir dos condiciones: una configuración geométrica posible de la unión de dichas barras con la plataforma móvil, y que el sistema cumpla la condición de equilibrio estático. En relación a la primera condición, para localizar los puntos  $B_i$  se establece:

$$\mathbf{p}_P + \mathbf{R}_{EE}\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{p}_i(L_i) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (14)$$

Donde  $\mathbf{p}_i(L_i)$  define la localización del extremo distal  $B_i$ , partiendo del extremo proximal  $A_i$  y aplicando el modelo de deformación previamente descrito.

Además, se deben incluir las condiciones geométricas asociadas a la unión de los extremos de las barras con la plataforma móvil. En nuestro caso, la conexión es mediante juntas esféricas, lo que implica la condición de momento nulo en los extremos distales. Sabiendo que  $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{ET}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{m}$ , se puede establecer que la curvatura es:

$$\mathbf{u}_i(L_i) = 0 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (15)$$

Respecto a las condiciones de equilibrio estático, éstas deben establecerse para el mecanismo en su conjunto. El elemento terminal está sujeto a una carga externa  $\mathbf{F}_{ext}$  en el punto  $P$ , y a un momento aplicado  $\mathbf{M}_{ext}$ , así como reacciones y momentos en los extremos  $B_i$  debido a la deformación de las barras, que se denotan con  $\mathbf{n}_i(L_i)$  y  $\mathbf{m}_i(L_i)$  respectivamente. El equilibrio estático viene dado por el siguiente sistema de ecuaciones (16):

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i(L_i) - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^N [(\mathbf{a}_i + \mathbf{p}_i(L_i)) \times \mathbf{n}_i(L_i) + \mathbf{m}_i(L_i)] - \mathbf{p}_P \times \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{M}_{ext} = 0$$

Por tanto, el problema de posición engloba las condiciones geométricas de localización de los extremos distales (14), las condiciones geométricas de conexión con la plataforma móvil (15), y las condiciones de equilibrio estático del mecanismo (16). Teniendo  $N = 6$  barras, suponen  $6N + 6 = 42$  condiciones. Si, además, la orientación de la plataforma  $\mathbf{R}_{EE}$  se expresa mediante un cuaternión unitario  $\tilde{\mathbf{e}}$ , se debe añadir la condición de normalización (17), resultando en un total de 43 condiciones.

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (17)$$

Para la resolución, que sigue un proceso iterativo, se establece un vector de residuos  $\mathbf{g}_{res}$ , Ec. (18), en un orden específico para disminuir el coste computacional, que contiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{g}_{res} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}_i(L_i) - \mathbf{p}_P - \mathbf{R}_{EE}\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i \\ \mathbf{u}_i(L_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{n}_i(L_i) - \mathbf{F}_{ext} \\ \sum_{i=1}^N [(\mathbf{a}_i + \mathbf{p}_i(L_i)) \times \mathbf{n}_i(L_i) + \mathbf{m}_i(L_i)] - \mathbf{p}_P \times \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{M}_{ext} \\ e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 1 \end{array} \right\} \quad (18)$$

Debido a la integración involucrada en cada barra, se trata de resolver un problema de contorno. El vector de variables dependientes se debe integrar a lo largo de la longitud de cada barra mediante Runge-Kutta, partiendo de los valores en el extremo  $s = 0$ ,  $\mathbf{y}_i(0) = \{\mathbf{p} \ \tilde{\mathbf{q}} \ \mathbf{n} \ \mathbf{u}\}$ . Mientras que  $(\mathbf{F}_{ext}, \mathbf{M}_{ext})$  son datos conocidos, las variables de salida  $(\mathbf{p}_P, \tilde{\mathbf{e}})$  serán conocidas o incógnitas a resolver dependiendo del problema cinemático que se esté abordando (problema inverso o directo). Se aplica un método de disparo, verificando en cada iteración el valor del vector de residuos,  $\mathbf{g}_{res}$ , repitiendo el proceso iterativamente y actualizando los datos de partida. El proceso finaliza cuando los valores del vector de residuos son menores a una cierta tolerancia. Es aconsejable la utilización del método de Newton en el cual un valor de partida conocido se puede usar al iniciar el proceso sirviendo como valor estimado para obtener la solución más cercana a una dada.

### 3. Resolución del PCD del hexápodo flexible

El Problema Cinemático Directo (PCD) consiste en, teniendo como datos los valores de entrada, es decir, la longitud de cada prismático  $\rho_i$ , determinar la localización del elemento terminal, esto es, posición  $\mathbf{p}_P$  del punto  $P$  de referencia y orientación de la plataforma móvil dada por el cuaternión unitario  $\tilde{\mathbf{e}}$ . También deben establecerse

como datos unos valores concretos de carga. En nuestro caso, por simplificar, se ha supuesto carga nula. Para comenzar el problema de valor de contorno del vector de residuos  $\mathbf{g}_{res}$  de la Ec. (18), se requieren valores de partida de las variables  $\mathbf{u}_i(0)$  y  $\mathbf{n}_i(0)$  de cada barra, así como valores estimados de la posición y orientación de la plataforma ( $\mathbf{p}_P$  y  $\tilde{\mathbf{e}}$ ), siendo un total de 43 valores a obtener con el sistema de 43 ecuaciones de (18).

El método de Newton utilizado en el método de disparo requiere la evaluación de la matriz Jacobiana de la función del vector de residuos respecto de las variables del problema, esto es, los valores de partida definidos en Ec. (19).

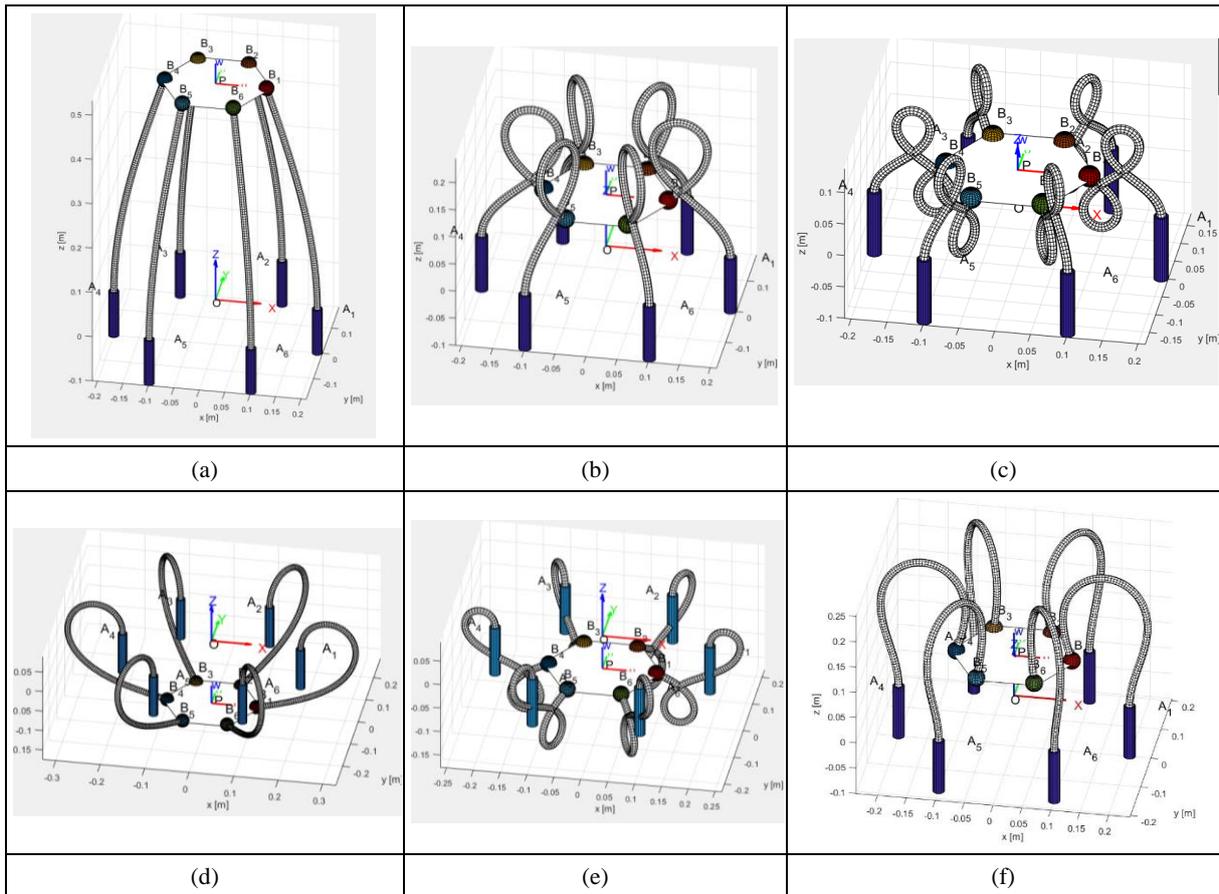
$$\mathbf{v}_{part} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i(0) \\ \mathbf{n}_i \\ \mathbf{p}_P \\ \tilde{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

En este proceso numérico, tras cada iteración  $j$ , los valores de partida se actualizan según:

$$\mathbf{v}_{part}^{j+1} = \mathbf{v}_{part}^j - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{g}_{res}^j \quad (20)$$

repetiendo el proceso hasta que  $\mathbf{g}_{res}$  sea menor a una tolerancia especificada.

En el procedimiento propuesto en este trabajo se distinguen dos etapas. En una etapa inicial, imponiendo la condición de que la deformada de cada barra se mantenga en su plano de referencia, se obtienen, mediante el modelo de deformación de Kirchhoff explicado en la Sección 2.1, una serie de soluciones posibles (también llamadas modos de ensamblado). Dichas soluciones se muestran en la Fig. 2. Téngase en cuenta que algunas de estas soluciones están asociadas a deformaciones en las barras con modos de pandeo superior a 1 (hemos limitado a 3 el modo de pandeo máximo). Las soluciones mostradas se corresponden a un mismo valor en todas las entradas, que en este caso sería nulo. Por ello, se puede apreciar en la Fig. 2, que la plataforma móvil se mantiene horizontal y centrada en cada una de las soluciones posibles.



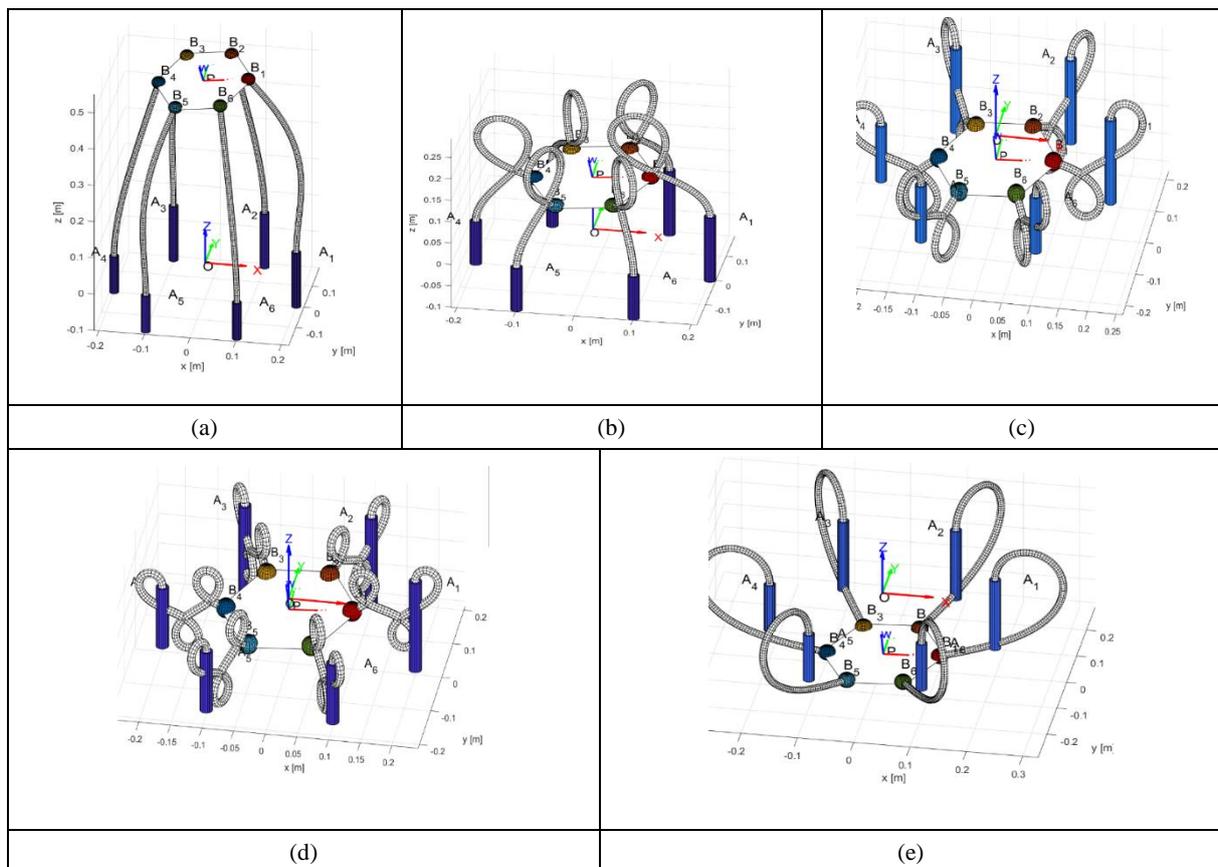
**Figura 2:** Soluciones del hexápodo flexible con barras deformadas en su plano de referencia (1ª etapa)

En el caso de imponer unas entradas con valores diferentes, el procedimiento se inicia exactamente igual, es decir, obteniendo en esta primera etapa el conjunto de soluciones para valores de entrada nulos que asegura que la deformada de las barras se mantenga en su plano. A continuación, se introducirían las entradas no nulas y se obtendrían, por ejemplo, las soluciones mostradas en la Fig. 3 con entradas:  $\rho_{1,2,3} = 0,05 \text{ m}$  y  $\rho_{4,5,6} = 0$ .

En la segunda etapa, se tomará como punto de partida cada una de las soluciones obtenidas en la fase inicial, y se irá alterando la localización de la plataforma móvil hasta conseguir una nueva solución para la cual se minimice el vector de residuos  $\mathbf{g}_{res}$ . Para ello, supongamos que partimos de una posición  $P$  de la plataforma móvil y movemos ésta, trazando una trayectoria recta, hasta una nueva posición  $P'$ , manteniendo constante el valor de las entradas  $\rho_i$ . En la posición de partida  $P$ , conocemos: localización de la plataforma (posición,  $\mathbf{p}_p$ , y orientación,  $\tilde{\mathbf{e}}$ ); los valores  $\rho_i$  de cada entrada prismática; y las seis componentes de la carga  $\mathbf{F}_{ext}$  y  $\mathbf{M}_{ext}$  (de valor 0 puesto que suponemos carga nula). Según movemos la plataforma en línea recta hacia una nueva posición  $P'$ , manteniendo constantes las entradas  $\rho_i$ , se conocen en cada paso de discretización las coordenadas ( $x_p, y_p, z_p$ ) del punto central de la plataforma, se mantendrá el valor nulo en las tres componentes del momento  $\mathbf{M}_{ext}$ , y las incógnitas que se van obteniendo se corresponden con las tres componentes de la fuerza,  $\mathbf{F}_{ext}$ , así como la orientación de la plataforma,  $\tilde{\mathbf{e}}$ . Se puede decir que se va resolviendo un problema mixto de posición y carga. Durante este proceso, se va monitorizando el valor de la fuerza  $\mathbf{F}_{ext}$ , de manera que en el momento en que las tres componentes de dicha fuerza se anulen, la plataforma estará en una posición de equilibrio estático y habremos entonces obtenido una nueva solución. Al ser un proceso numérico, lo normal es obtener unos valores próximos a cero en la  $\mathbf{F}_{ext}$  según nos acercamos a la solución, y es entonces cuando el programa impone la condición de carga nula y se refina la posición hasta converger a aquella para la cual se cumple dicha condición.

De manera similar, se pueden establecer trayectorias de búsqueda de nuevas soluciones en las que se varía la orientación de la plataforma y se va resolviendo la posición central de ésta,  $\mathbf{p}_p$ , y el valor de  $\mathbf{M}_{ext}$ , o trayectorias que combinen una variación tanto lineal como angular de la plataforma cubriendo un volumen de búsqueda. Asimismo, se ha implementado en el procedimiento la posibilidad de realizar una propagación radial automática (ver Fig. 4), donde se establece un radio de acción para el barrido de posibles posiciones, y se va monitorizando la evolución de las cargas exteriores (en la Fig. 4, en la parte derecha, se muestra la evolución de la  $\mathbf{F}_{ext}$ ), hasta detectar soluciones para las cuales la carga se anula. A modo de ejemplo, se muestran en la Fig. 5, las distintas soluciones encontradas en esta 2ª etapa, habiendo tomado como solución de partida aquella mostrada en la Fig. 2f.

De esta manera, se han obtenido (habiendo considerado los tres primeros modos de pandeo), un total de 112 soluciones del problema directo para un valor en las entradas. Siendo un procedimiento numérico no certificado, no podemos asegurar que éste sea el máximo número de soluciones, pero da una idea del elevado número de soluciones posibles y de la complejidad asociada a la cinemática directa de este tipo de manipuladores flexibles espaciales.



**Figura 3:** Soluciones del hexápodo flexible con entradas diferentes (1ª etapa)

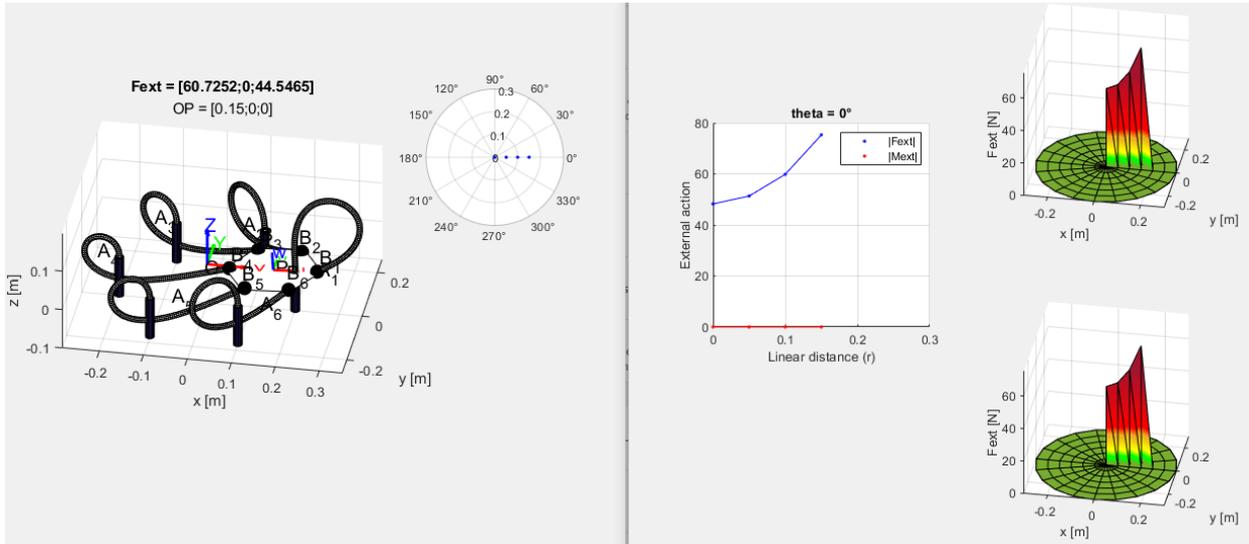


Figura 4: Proceso de propagación radial para búsqueda de soluciones en la 2ª etapa

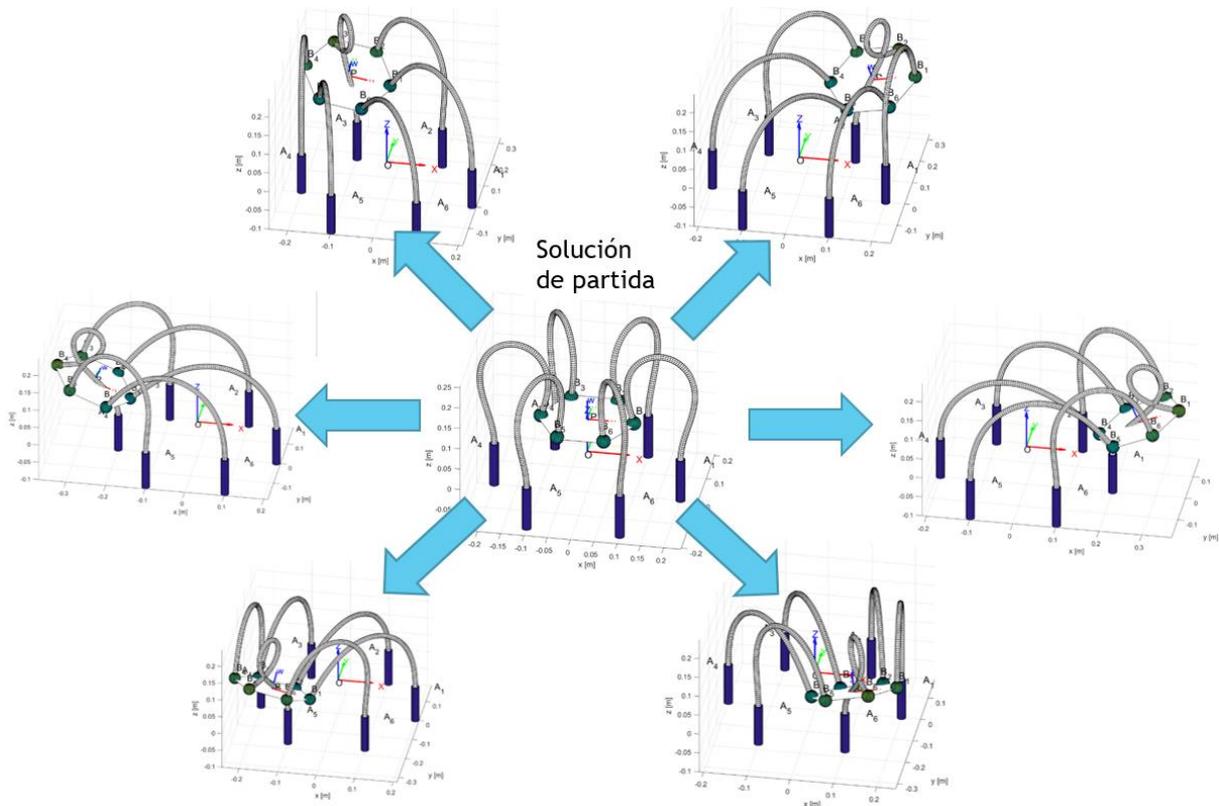


Figura 5: Distintas soluciones del PCD obtenidas en la 2ª etapa

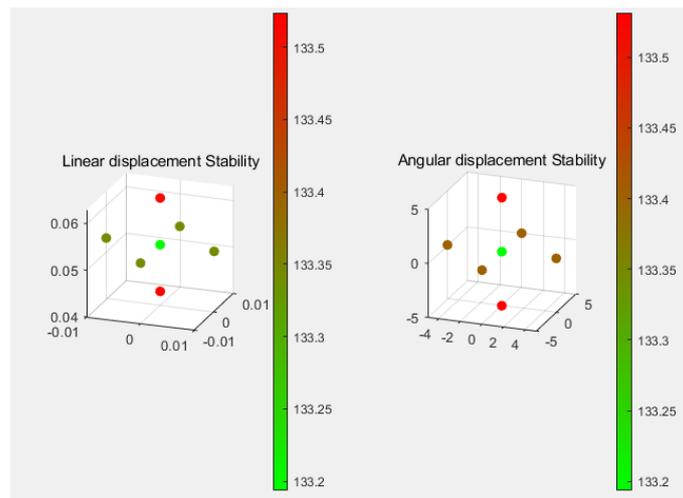
#### 4. Análisis de estabilidad de las soluciones

Es importante resaltar que no todas las soluciones obtenidas son soluciones efectivas en la práctica. La solución obtenida es una solución de equilibrio estático de un sistema elástico, y es necesario comprobar si ese equilibrio es estable o no. En este tipo de manipuladores flexibles muchas de ellas son soluciones inestables, de forma que ante una pequeña perturbación no son capaces de mantener su configuración y pueden dar lugar a cambios bruscos de posición. Por tanto, es necesario evaluar la estabilidad de las soluciones obtenidas.

Para ello, hemos realizado dos comprobaciones. Una de ellas basada en el cálculo de la matriz de rigidez, de forma que, para cada configuración analizada, se impone una pequeña variación de la carga (fuerza o momento) y teniendo en cuenta el desplazamiento generado (lineal o angular) se puede obtener la rigidez correspondiente.

Analizando los términos de la matriz de rigidez, tendremos una solución estable si los términos de su diagonal son no nulos y a su vez el determinante de la matriz es mayor a cero. Por otro lado, la segunda comprobación se ha realizado con el cálculo de la energía elástica de las barras. En este caso, se ha comparado el valor de la energía elástica de una configuración bajo estudio, con aquellas soluciones adyacentes a ella, de forma que la configuración analizada será estable si tiene asociada un valor mínimo de la energía elástica, tal y como se muestra en la Fig. 6, donde la solución analizada se corresponde con el valor mínimo de energía (punto verde central representa el valor de dicha energía, en comparación con los puntos adyacentes que son los valores para las soluciones próximas).

Cuando ambos criterios, tanto el de rigidez como energía elástica, se cumplen podemos asegurar que dicha solución será estable. Cabe resaltar que la gran mayoría de las soluciones que se obtienen son inestables. En concreto, del total de 112 soluciones obtenidas, sólo 9 han resultado ser estables. Intuitivamente puede tener su lógica puesto que numerosas soluciones obtenidas son configuraciones con barras muy “retorcidas”, de forma que ante una pequeña perturbación es previsible que cambiasen de manera brusca a otro modo de pandeo para el cual las barras estén más extendidas.



**Figura 6:** Análisis de estabilidad mediante el criterio de mínima energía elástica

## 5. Conclusiones

En este trabajo, se ha presentado un procedimiento numérico para la resolución del problema cinemático directo de manipuladores paralelos flexibles tipo hexápodo, haciendo uso del hexápodo flexible 6-PFS como ejemplo ilustrativo. Basándonos en la modelización de barras flexibles de Cosserat, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales compuesto por las condiciones necesarias que aseguran que una determinada configuración se corresponda con una determinada solución de la cinemática directa, esto es, verifica la condición de ensamblado geométrico y, adicionalmente, cumple la condición de equilibrio estático. La metodología de resolución propuesta, basada en un proceso numérico iterativo de minimización de un vector residual, se divide en dos etapas principales: la primera de ellas, obtiene una serie de soluciones del problema directo que aseguran que la deformación de cada una de las barras flexibles se mantenga en su plano de referencia; la segunda etapa, hace uso de las soluciones previamente obtenidas, de manera que usando éstas como punto de partida y manteniendo constante el valor de las entradas, realiza una búsqueda de nuevas soluciones al ir alterando la localización de la plataforma móvil y obteniendo aquellas configuraciones para las cuales la condición de equilibrio estático se cumple. Posteriormente, se evalúan las soluciones obtenidas de cara a extraer aquellas soluciones que son estables. Este procedimiento nos ha permitido obtener un total de 112 soluciones del problema directo, verificando que sólo 9 de ellas son soluciones estables. Al ser un proceso numérico no certificado, no podemos asegurar que 112 sea el número máximo de soluciones que se puede llegar a obtener, pero sí nos permite vislumbrar la elevada cantidad de soluciones que presenta este tipo de manipuladores, además de constatar cómo la gran mayoría de éstas no son soluciones estables y, por tanto, no son efectivas en la práctica.

## 6. Agradecimientos

Los autores desean agradecer el apoyo financiero recibido del Gobierno Español a través del Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto PID2020-116176GB-I00) financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, y el apoyo al grupo de investigación a través del Proyecto IT1480-22 financiado por el Departamento de Educación del Gobierno Vasco.

## 7. Referencias

- [1] C. E. Bryson, D. C. Rucker, Toward parallel continuum manipulators, *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Hong Kong, China, 2014, pp. 778-785.
- [2] S. Lilge, K. Nuelle, J. A. Childs, K. Wen, D. C. Rucker and J. Burgner-Kahrs, Parallel-Continuum Robots: A Survey, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 40, pp. 3252-3270, 2024.
- [3] B. Mauzé et al., Nanometer precision with a planar parallel continuum robot, *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 5 (3), pp. 3806–3813, 2020.
- [4] O. Altuzarra, M. Urizar, M. Cichella, V. Petuya, Kinematic Analysis of three degrees of freedom planar parallel continuum mechanisms, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 185, p. 105311, 2023.
- [5] X. Duan, W. Yan, G. Chen, and H. Wang, Analysis and validation of a planar parallel continuum manipulator with variable cartesian stiffness, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 177, p. 105030, 2022.
- [6] O. Altuzarra and J. P. Merlet, Certified kinematics solution of 2-DOF planar parallel continuum mechanisms, *Proc. IFToMM World Congress*, Mechanisms Mach. Sci., 2019, pp. 197–208.
- [7] C. B. Black, J. Till and D. C. Rucker, Parallel Continuum Robots: Modeling, Analysis, and Actuation-Based Force Sensing, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 34, no. 1, pp. 29-47, 2018.
- [8] J. Till, C. E. Bryson, S. Chung, A. Orekhov and D. C. Rucker, Efficient computation of multiple coupled Cosserat rod models for real-time simulation and control of parallel continuum manipulators, *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Seattle, WA, USA, 2015, pp. 5067-5074.
- [9] J. Till and D. C. Rucker, Elastic Stability of Cosserat Rods and Parallel Continuum Robots, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 33, no. 3, pp. 718-733, 2017.
- [10] B. Dasgupta, T.S. Mruthyunjaya, The Stewart platform manipulator: a review, *Mechanism and Machine Theory*, vol. 35(1), pp. 15-40, 2000.
- [11] S.S. Antman. Problems in nonlinear elasticity. *Nonlinear Problems of Elasticity*, pp. 513–584, Springer, 2005.
- [12] H. Lang, J. Linn and M. Arnold, Multi-body dynamics simulation of geometrically exact Cosserat rods, *Multibody System Dynamics*, vol. 25, (3), pp. 285-312, 2011.
- [13] J. Till and D. C. Rucker, Elastic rod dynamics: Validation of a real-time implicit approach, *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Vancouver, BC, Canada, 2017.