



Estudio teórico-experimental del comportamiento de perfiles rectangulares de pared delgada

David Rincón-Dávila¹, Enrique Alcalá Fazio¹, Ángel Martín López¹, Beatriz Valles Fernández¹, Joel Valenzuela Cuartero¹

¹ Instituto Universitario de Investigación del Automóvil Francisco Aparicio Izquierdo, Universidad Politécnica de Madrid, david.rincon@upm.es, enrique.alcala@upm.es, angel.martin@upm.es, b.valles@upm.es, joel.valenzuela@upm.es

Los perfiles rectangulares de pared delgada son ampliamente utilizados en la fabricación de estructuras de vehículos como elementos de absorción de energía, debido al buen compromiso entre peso y propiedades mecánicas. Durante décadas, los investigadores han estudiado el desempeño de este tipo de perfiles en escenarios de colisión, tales como el vuelco en estructuras de autobuses y autocares. En estos casos, el modo de colapso del perfil es la flexión con grandes deformaciones plásticas en zonas localizadas, denominadas rótulas plásticas. La formación de la rótula plástica fue estudiada por primera vez por Kecman en la década de los 70, mediante el ensayo de tubos a flexión variando las dimensiones de la sección, en un rango correspondiente al utilizado en las superestructuras de autobuses. De este estudio, Kecman propuso un modelo matemático basado en la geometría de la rótula plástica, y que permite obtener la curva característica de deformación del perfil a flexión con bastante efectividad. En la actualidad, este modelo sigue siendo el referente para la obtención de la curva Momento-Ángulo. Durante ensayos de perfiles a flexión realizados por los autores, se observó que el espesor del perfil tiene un impacto directo en la geometría de la rótula plástica, y, por tanto, en la curva característica Momento-Ángulo, provocando una desviación entre la curva obtenida por ensayo y la obtenida mediante el modelo de Kecman: los perfiles de pequeño espesor tienen un mecanismo de deformación que coincide con el modelo de Kecman, mientras que tubos con espesores superiores producen mecanismos de deformación con una forma menos pronunciada que la predicha por el modelo de Kecman. De hecho, variaciones del espesor de 2 mm a 4 mm conlleva a dos geometrías de la rótula plástica completamente diferentes. Sin embargo, el espesor es un parámetro que no está incluido en el cálculo de la geometría en dicho modelo. Basado en la evidencia en ensayos y posteriores simulaciones mediante software de elementos finitos, existe la necesidad de un estudio en profundidad de esta problemática y de conocer el error cometido con los modelos teóricos actuales. Este trabajo lleva a cabo un estudio minucioso del efecto de todos los parámetros dimensionales de la sección en la geometría de la rótula plástica y en la curva Momento-Ángulo, utilizando para ello ensayos físicos y modelos de elementos finitos. El objetivo final es proponer un modelo matemático que mejore la precisión de las curvas Momento-Ángulo en perfiles de gran espesor, así como predecir el tipo de rótula plástica que se va a producir en un perfil basado únicamente en las dimensiones de la sección: alto, ancho y espesor, combinados en un único parámetro adimensional, denominado por los autores como índice Q .

1. Introducción

Los perfiles rectangulares de pared delgada son ampliamente utilizados en estructuras de vehículos como elementos de absorción de energía, debido al buen compromiso entre peso y propiedades mecánicas. Durante décadas, los investigadores han estudiado el comportamiento de estos perfiles en escenarios de impacto, centrándose en dos mecanismos de deformación principalmente: compresión axial [1-3], y flexión [4-10]; también se han estudiado combinaciones de ambos debido a cargas oblicuas [11-14]. Los casos de flexión pura se asocian a cargas como las producidas en el vuelco de autobuses, donde el perfil absorbe la energía en áreas locales denominadas rótulas plásticas. Las rótulas plásticas son el resultado de un pandeo local en las paredes del tubo, siendo estudiadas por primera vez por Kecman, mediante ensayo de perfiles con diversas secciones dentro del rango utilizado habitualmente en la fabricación de autobuses y autocares [15,16]. Kecman propuso un modelo geométrico que ha sido utilizado de manera efectiva para predecir el comportamiento a flexión de perfiles rectangulares de pared delgada, mediante deformación en líneas plásticas concretas. Este modelo ha sido utilizado para optimizar el cálculo de modelos de elementos finitos del escenario planteado en el Reglamento 66 [17], implementando el comportamiento del modelo geométrico en elementos concretos de la estructura. Otros estudios han propuesto modelos teóricos para diferentes tipologías de perfiles basados en el modelo de Kecman, o modificaciones para mejorar las limitaciones del modelo.

Durante ensayos a flexión realizados por los autores en estudios anteriores, se observó que el espesor del perfil tiene un impacto directo en la geometría de la rótula plástica y, por tanto, en el comportamiento a flexión caracterizado por la curva Momento-Ángulo, causando que en algunos casos el resultado del ensayo se desvíe del modelo teórico de Kecman. Los perfiles de pared delgada tienen un mecanismo de deformación que coincide con el propuesto por Kecman, pero perfiles con un espesor mayor tienen un mecanismo con una deformación menos pronunciada, desviándose del modelo de Kecman. De hecho, variaciones de 2 a 4 mm de espesor conducen a dos mecanismos de deformación diferentes. Sin embargo, el espesor no es un parámetro que el modelo de Kecman utilice para predecir la geometría del modelo, si bien sí se utiliza en el cálculo de la energía de deformación. Basados en la evidencia de los ensayos realizados, se desarrolla este trabajo para generar conocimiento sobre las diferencias entre ambos mecanismos de deformación y cómo predecirlo, usando variaciones al modelo de Kecman.

2. Materiales y métodos

Este apartado se divide en dos partes: una validación del modelo de elementos finitos y una descripción del estudio paramétrico objeto de este trabajo.

2.1. Fase I: Validación del modelo de elementos finitos.

El modelo de elementos finitos es el propuesto y publicado en otros trabajos de los autores [18]. Si bien estos modelos ya han sido validados, en este caso se propone extender la validación del modelo a un amplio rango de secciones. Como método de validación, se utiliza la curva de comportamiento Momento-Ángulo.

En cuanto a los ensayos, se utilizan únicamente los realizados por Kecman en su tesis doctoral, y cuyas características se recogen en la Tabla 1:

Tabla 1: Dimensiones de los perfiles. Ensayos de Kecman.

Valores geométricos, ratios y valores del material								
ID	a (mm)	b (mm)	t (mm)	a/b	a/t	b/t	σ_p (MPa)	E_{tang} (MPa)
K1	45.0	15.0	1.30	3.0	34.6	11.5	277	308
K2	50.8	25.4	1.25	2.0	40.6	20.3	297	338
K3	50.8	25.4	1.44	2.0	35.3	17.6	283	297
K4	38.0	19.0	1.26	2.0	30.2	15.1	290	326
K5	54.0	28.5	1.60	1.9	33.8	17.8	267	300
K6	45.2	29.3	3.25	1.5	13.9	9.0	463	463
K7	38.1	25.4	1.62	1.5	23.5	15.7	352	363
K12	44.4	44.4	1.60	1.0	27.8	27.8	313	348
K13	38.4	38.4	1.60	1.0	24.0	24.0	374	390
K16	25.4	25.4	1.48	1.0	17.2	17.2	329	353
K17	25.4	25.4	2.00	1.0	12.7	12.7	418	418
K1	45.0	15.0	1.30	3.0	34.6	11.5	277	308

Todo el conjunto de ensayos proporciona un rango en las dimensiones de la sección y ratios entre las dimensiones de la sección suficiente como para considerar aceptable la validación. El uso de los ratios como método para definir y ordenar las secciones es común en la literatura científica, y, en este trabajo, se demuestra la importancia al observar que perfiles diferentes con los mismos ratios tienen comportamientos similares. Se establece la denominación de perfiles de pequeño espesor a aquellos con valores altos de los ratios a/t y b/t , y perfiles de gran espesor a aquellos con valores bajos de los ratios a/t y b/t . El límite entre valores altos y bajos se considera 20, si bien este límite se establece, por parte de los autores, en base a la observación y con el objetivo de poder discutir

los resultados. Existe, por tanto, la necesidad de generar un criterio robusto para separar ambos tipos de perfiles, y este se define en la Fase II.

La Figura 1: muestra un ejemplo de curva Momento-Ángulo, con la definición del punto de colapso y las diferentes zonas considerando si el comportamiento elástico o plástico es el único o el más relevante en dicha sección. Muestra además la denominación de las dimensiones en una sección rectangular en función de la dirección del momento flector aplicado.

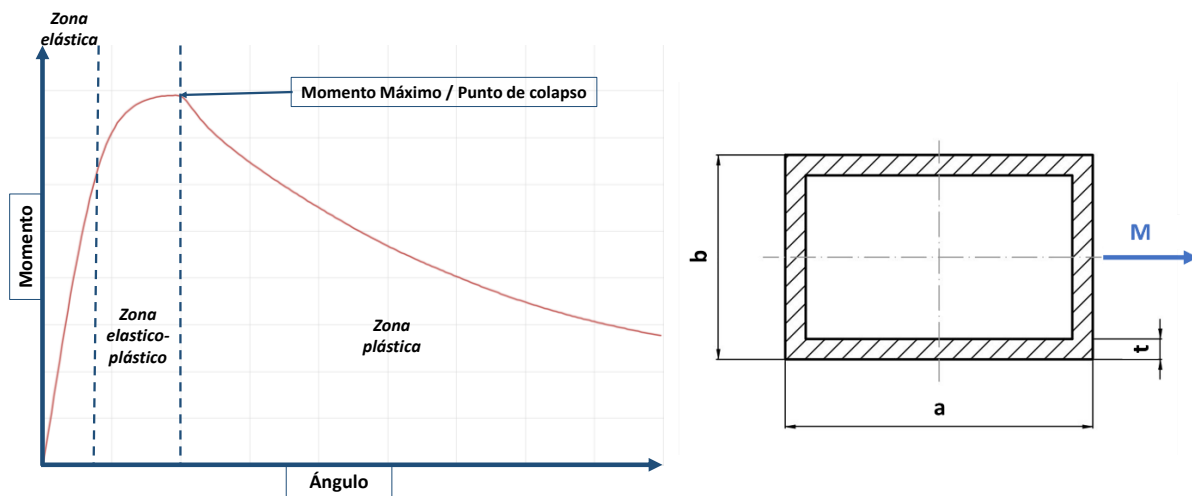


Figura 1: Ejemplo de curva Momento-Ángulo. Denominación de las dimensiones de los perfiles rectangulares.

En ambas fases del trabajo se comparan las deformadas en la zona de la rótula plástica entre modelos de elementos finitos y modelos teóricos de Kecman. La propuesta de comparación mediante geometría está basada en el modelo geométrico de Kecman. Kecman calcula los desplazamientos en Y y Z del punto A, tal y como se muestra en la Figura 2:. Después obtiene el resto de la geometría de la rótula a partir de la posición del punto A para cada ángulo deformado. El punto A es considerado como el punto más relevante de la geometría deformada, por tanto, una comparación entre el desplazamiento en la dirección Z entre ensayo, modelo de simulación y modelos teóricos puede llevar a una conclusión válida.

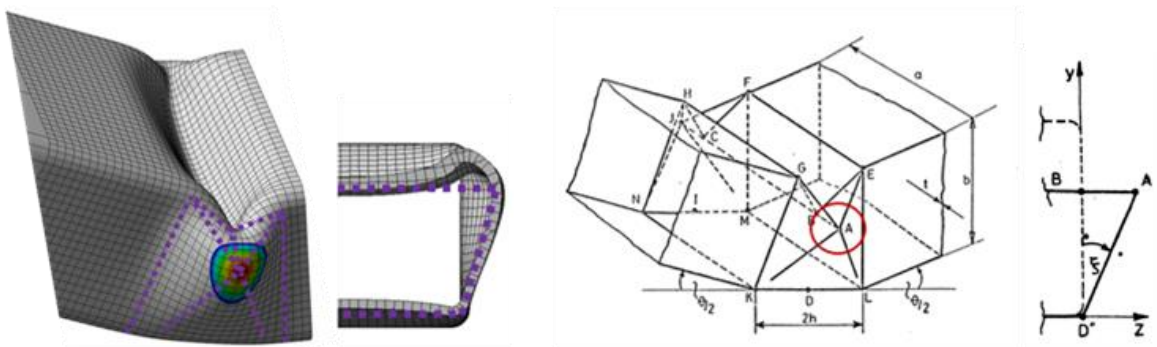


Figura 2: Punto A y líneas plásticas en los modelos de elementos finitos y Kecman.

El desplazamiento del punto A en z, de ahora en adelante $uz(A)$ puede obtenerse de manera directa del modelo de elementos finitos: los valores medidos de desplazamiento en Y, de ahora en adelante $uy(A)$, es una combinación de movimiento de sólido rígido en la dirección positiva del eje debida a la flexión del perfil más el desplazamiento en Y en sentido negativo debido a la formación de la rótula plástica.

Una vez que el modelo M.E.F. está validado, se realiza una comparación entre el modelo M.E.F. y el modelo de Kecman para comprobar la precisión con la que el modelo teórico de Kecman predice el comportamiento a flexión y reproduce la geometría de la rótula.

2.2. Fase II: Estudio paramétrico del comportamiento a flexión.

El objetivo de esta fase es establecer la correlación entre el comportamiento o forma de la curva Momento-Ángulo, la geometría de la rótula plástica y los ratios entre las dimensiones de la sección del perfil, así como cuantificar el error cometido al utilizar el modelo de Kecman.

Se propone realizar un estudio paramétrico utilizando los modelos M.E.F. validados en la fase anterior y el modelo de Kecman, para entender en profundidad este problema asociado a las dimensiones de la sección. Para ello se realiza un primer diseño de experimentos (DOE por sus siglas en inglés), así como un segundo DOE para aislar y cuantificar la influencia del material en la rótula plástica y la curva Momento-Ángulo.

La Tabla 2: muestra el primer DOE propuesto. Los valores de las dimensiones de la sección del tubo escogidas por los autores se enmarcan en el rango usado habitualmente en las estructuras de autobuses. De manera adicional, el rango de los ratios es suficientemente amplio para dichas estructuras: el ratio a/b varía entre 1 o secciones cuadradas a 2, secciones rectangulares con el ancho de la sección siendo el doble que la altura. Este último caso se considera el ratio más elevado conocido en el servicio técnico; altos valores de a/t y b/t , entre 20 y 30, representan tubos usados habitualmente en décadas anteriores, mientras que valores bajos, entre 10 y 20, representan la actualidad, debido a las sucesivas enmiendas de la reglamentación. El DOE se divide en grupos para aislar los efectos de los ratios y valores de las dimensiones, tal y como se explica a continuación:

- Hay cuatro grupos denominados con las letras O, A, B y C, con cuatro casos cada uno.
- El grupo O mantiene el ratio a/b y las dimensiones exteriores, pero varía el espesor y , por tanto, los ratios a/t y b/t .
- El grupo A (sección rectangular), y C (sección cuadrada), mantienen todos los ratios pero cambian los valores de las tres dimensiones dentro de un amplio rango.
- El grupo B mantiene los valores de b y t , pero cambia los ratios a/b y a/t .

Se resaltan en **negrita** aquellos parámetros que se mantienen constantes en cada grupo.

Tabla 2: Primer DOE basado en la geometría de la sección.

Valores geométricos y ratios						
ID	a (mm)	b (mm)	t (mm)	a/b	a/t	b/t
O1	60.0	40.0	1.50	1.50	40.0	26.7
O2	60.0	40.0	2.00	1.50	30.0	20.0
O3	60.0	40.0	3.00	1.50	20.0	13.3
O4	60.0	40.0	4.00	1.50	15.0	10.0
A1	28.2	18.8	1.20	1.50	23.5	15.7
A2	47.0	31.4	2.00	1.50	23.5	15.7
A3	70.6	47.0	3.00	1.50	23.5	15.7
A4	94.1	62.7	4.00	1.50	23.5	15.7
B1	25.4	25.4	1.62	1.00	15.7	15.7
B2	31.8	25.4	1.62	1.25	19.6	15.7
B3	38.1	25.4	1.62	1.50	23.5	15.7
B4	50.8	25.4	1.62	2.00	31.4	15.7
C1	25.4	25.4	2.00	1.00	12.7	12.7
C2	38.1	38.1	3.00	1.00	12.7	12.7
C3	50.8	50.8	4.00	1.00	12.7	12.7
C4	63.5	63.5	5.00	1.00	12.7	12.7

El análisis de los resultados del DOE, esto es, de las curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$, permitirá conocer la relación del comportamiento y la geometría de la rótula con los ratios a/b , a/t y b/t . Ratios a/t y b/t altos, superiores a 20, indican una sección tubular de pequeño espesor, mientras que ratios bajos indican una sección más cercana al perfil macizo. Sin embargo, cuando los ratios se encuentran en el entorno del límite 20, o siendo uno de ellos superior a 20 y otro inferior, es complicado inferir el comportamiento del perfil. El ratio a/b puede modificar el comportamiento que se deduce en base únicamente a los otros dos ratios, pues un ratio a/b igual a 1 también va a alterar el comportamiento hacia un perfil macizo, al contrario que un ratio a/b igual a 2.

Como el uso de tres ratios es complejo, se propone generar un único índice que diferencie entre ambos comportamientos encontrados: aquel de pared delgada similar al modelo de Kecman, y aquel de pared gruesa que diverge del modelo de Kecman. Además, este índice ordenaría los perfiles según su comportamiento, desde el comportamiento de perfil macizo al comportamiento de pared delgada. El índice buscado se debe definir en base a las siguientes ideas: debe ser únicamente función de los parámetros geométricos de la sección del perfil; los tubos con los mismos ratios deben tener el mismo índice; debe de ser un parámetro adimensional; debe existir un valor límite que divida a los tubos en los dos diferentes comportamientos.

Por otro lado, la diferencia en la geometría de la rótula plástica entre el modelo MEF y el modelo de Kecman se cuantifica con la métrica Sprague & Geers para cada ensayo del primer DOE. El valor de la métrica se grafica junto con el índice propuesto con el objetivo de observar si existe una tendencia entre ambos.

El segundo DOE (Tabla 3:), se basa en el material de los perfiles, y está diseñado para estudiar la influencia que el límite elástico y el módulo tangente tienen en la curva Momento-Ángulo y la geometría de la rótula. Estos parámetros de material no se tienen en cuenta en la definición del índice y, a priori, los resultados deberían confirmar y desestimar su influencia en la formación de una rótula con el comportamiento definido por el modelo de Kecman o con el comportamiento encontrado en perfiles con bajos ratios geométricos. Los grupos D y E parten cada uno de un ensayo ya estudiados en el primer DOE, y se altera el módulo tangente de manera proporcional hasta llegar a un valor superior a 1000 MPa como valor máximo, y se reduce hasta llegar a un valor en el entorno de los 200 MPa. Estos extremos acotan los valores encontrados habitualmente en este tipo de perfiles. De igual forma, en el grupo F se ha alterado el límite elástico para estudiar la variación en el entorno de un acero convencional y uno de alto límite elástico, también habituales en la industria.

Tabla 3: Segundo DOE basado en el material del perfil.

Valores geométricos, ratios y valores del material								
ID	a (mm)	b (mm)	t (mm)	a/b	a/t	b/t	σ_p (MPa)	E_{tang} (MPa)
D1	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	426	1340
D2	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	426	894
D3	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	426	447
D4	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	426	224
E1	38.1	25.4	1.62	1.5	23.5	15.7	359	1120
E2	38.1	25.4	1.62	1.5	23.5	15.7	359	746
E3	38.1	25.4	1.62	1.5	23.5	15.7	359	373
E4	38.1	25.4	1.62	1.5	23.5	15.7	359	187
F1	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	639	447
F2	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	533	447
F3	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	426	447
F4	38.1	38.1	3.00	1	12.7	12.7	320	447

El grupo D y F tienen bajos ratios y, por tanto, no se deberían comportar como define el modelo de Kecman, mientras que el grupo E sí debería hacerlo. El objetivo consiste en verificar que un cambio en el material no cambia el tipo de comportamiento que venía definido por los ratios y, en definitiva, por el índice único propuesto.

3. Resultados y discusión

3.1. Resultados Fase I: validación del modelo de elementos finitos.

La Figura 3: contiene la comparación de las curvas Momento-Ángulo y del desplazamiento del punto A entre el modelo de Kecman y los modelo M.E.F. de los casos ensayados por Kecman y que se muestran en la Tabla 16, así como la curva Momento-Ángulo del ensayo. Cada curva empieza en el punto de colapso, excepto las del ensayo K16, que empieza antes del colapso tal y como aparece en el artículo original.

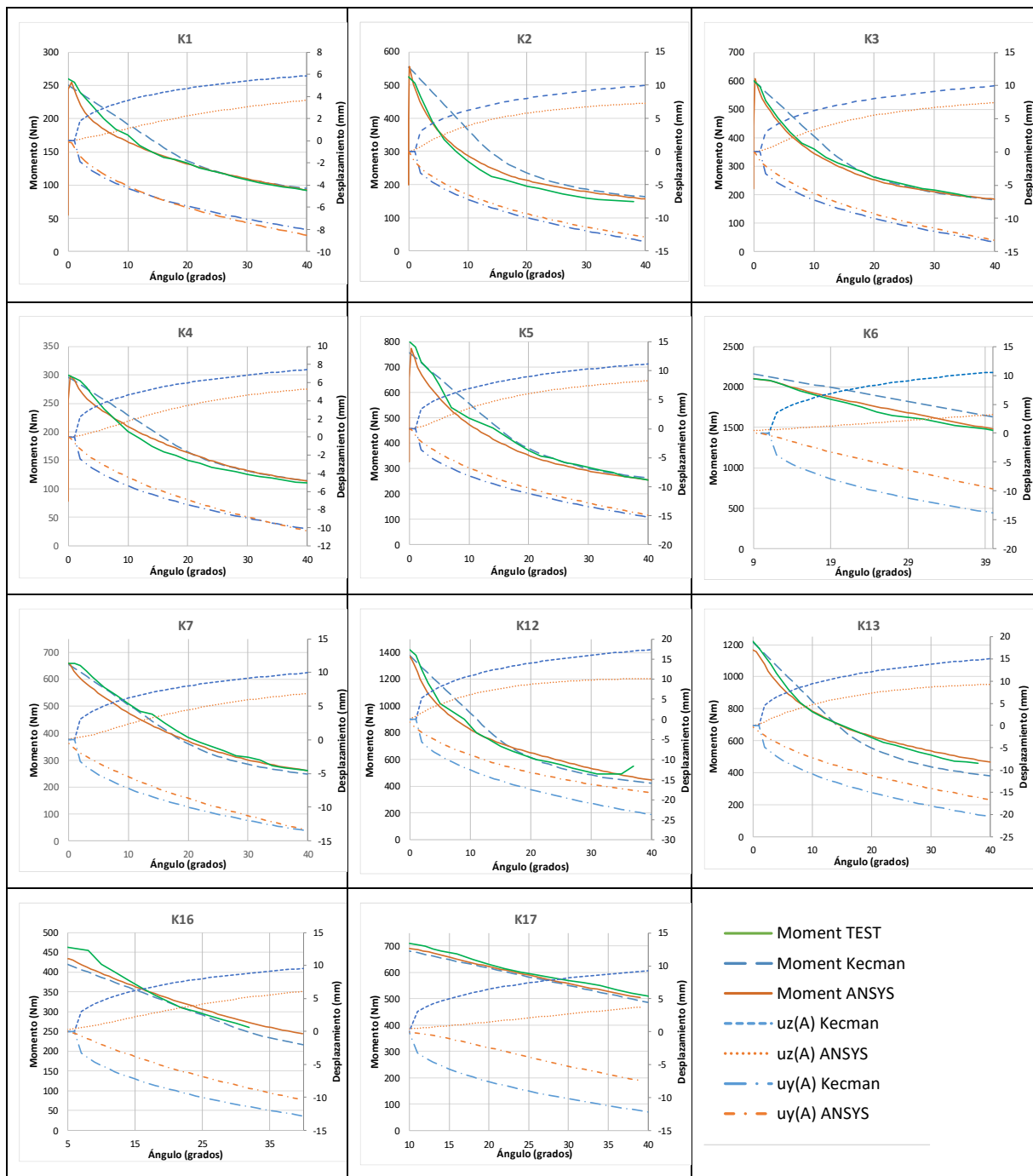


Figura 3: Modelo M.E.F. – Ensayos – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$.

Todos los casos tienen una alta correlación entre ensayos y simulación, siendo únicamente el caso K16 con una correlación más baja; K16 fue realizado por Kecman y no hay suficiente información sobre el ensayo u otras incidencias relacionadas con el ensayo que expliquen este problema. Incluso considerando las diferencias encontradas en K16, el número de casos comparados y la variedad de secciones usadas en la comparación se consideran suficientes para validar el modelo M.E.F. propuesto en este trabajo sin necesidad de realizar más ensayos en otros perfiles.

La comparación entre el modelo de Kecman y los resultados del modelo M.E.F. validado, muestra en la Figura 3: una variedad en la correlación. En la mayoría de casos, la parte lineal del modelo de Kecman se encuentra por encima del modelo M.E.F., casos K1-5 y K12. En el caso K6, el momento del modelo de Kecman tiene una menor pendiente por lo que se sitúa por encima del modelo M.E.F., divergiendo ambos modelos. En los casos K7, K16 y K17 hay una alta correlación entre las curvas. En todos los casos, incluso en aquellos con error en magnitud, ambas curvas tienen la misma forma.

Considerando el desplazamiento del punto A, existen dos opciones: o ambas curvas tienen la misma forma y diferencias en magnitud únicamente en el desplazamiento en Z, como en los casos K1-5, K7, K12-13, o son

completamente diferentes en forma y magnitud, como en los casos K6, K16-17. Los tubos con mayor espesor o aquellos con ratios a/t y b/t más bajos se desvían del modelo de Kecman, por lo que la correlación es peor que en casos con ratios más altos.

Para terminar de realizar la comparación entre el modelo de elementos finitos y el modelo de Kecman, se han dibujado las líneas plásticas que define el modelo geométrico de Kecman sobre la rótula obtenida por el modelo de elementos finitos, para un caso con buena correlación (K5), y otro con peor correlación (K6). Para posicionar los puntos de la geometría de Kecman sobre el modelo, se han visualizado los elementos con mayor densidad de energía absorbida, colocando los puntos K, G, L, E, F, A, B, C y H donde corresponden, y trazando las líneas plásticas que unen dichos puntos. La Figura 4:a muestra un ejemplo de las líneas plásticas en el modelo con buena correlación entre el modelo de Kecman y el modelo M.E.F. (K5), mientras que la Figura 4:b muestra las líneas plásticas en el caso con peor correlación (K6). Ambas imágenes grafican la energía por alargamiento (strain energy) en una escala diferente por lo que el código de colores pese a ser representativo e ilustrar las diferencias, no son comparables entre ambos en valor. K5 tiene altos ratios a/t y b/t , por lo que se considera un perfil de pared delgada y las líneas plásticas del modelo de Kecman son representativas: en el flanco a compresión, solo los elementos que se encuentran en las líneas G-H, B-C y E-F del modelo de Kecman tienen una energía distinta de cero; lo mismo ocurre en los laterales con los elementos en las líneas G-K, E-L, y especialmente en A-B, A-G, A-E, B-G y B-E. El caso K6 tiene ratios bajos, con la mayoría de las líneas plásticas diferentes a las planteadas por el modelo de Kecman, lo que implica que la hipótesis de pared delgada puede no ser de aplicación en este caso con la precisión requerida: los elementos con energía de alargamiento distinta de cero no están repartidos en las líneas plásticas del modelo de Kecman, excepto en las líneas A-B y B-C, aunque incluso en estos casos, las áreas con energía distinta de cero son tan grandes que no pueden ser consideradas líneas.

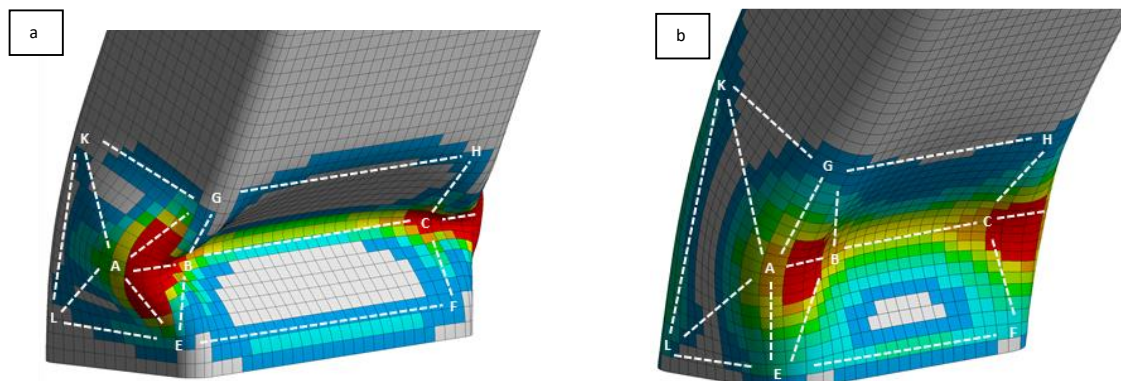


Figura 4: Líneas plásticas a los 25° tras el colapso. Strain energy contour. a: caso K5; b: caso K6.

Observando las diferencias entre las líneas plásticas de los casos con buena correlación en forma y magnitud (Figura 4:a), y aquellos con baja correlación (Figura 4:b), cabe destacar que las líneas plásticas en el primer grupo son idénticas a aquellas propuestas por Kecman en su modelo, siendo completamente diferentes a aquellas en el segundo grupo. Por tanto, los perfiles con altos ratios o de pared delgada tienen líneas plásticas similares a las del modelo de Kecman y una alta correlación de la deformada, mientras que en perfiles con ratios bajos o de pared gruesa, las líneas plásticas difieren del modelo de Kecman, además de presentar una baja correlación en la deformada. Aunque en todos los casos con altas diferencias en las curvas Momento-Ángulo existe una baja correlación con el modelo de Kecman para $u_y(A)$ y $u_z(A)$, el caso K17 tiene altos errores en la forma deformada que no llevan a un alto error en magnitud en la curva Momento-Ángulo; este tema se tratará en el próximo capítulo. Como la comparación con el modelo de Kecman ha demostrado no ser suficiente o fallida para casos con ratios bajos, este problema se ha abordado en la Fase II de este estudio.

3.2. Resultados Fase II: Estudio paramétrico del comportamiento a flexión.

Desde la Figura 5: a la Figura 8: se comparan las curvas Momento-Ángulo y de desplazamiento del punto A en el modelo de Kecman y en el modelo MEF para cada grupo del primer diseño de experimentos. La escala del eje vertical es diferente para cada gráfica para mejorar la comprensión dentro de cada uno de los grupos.

Tal y como se concluyó en los resultados de la Fase I, valores bajos de los ratios conllevan una desviación mayor del modelo de Kecman. Si los ratios se mantienen, la respuesta a flexión y la correlación con el modelo de Kecman son idénticas.

La Figura 5: muestra los resultados del grupo O:

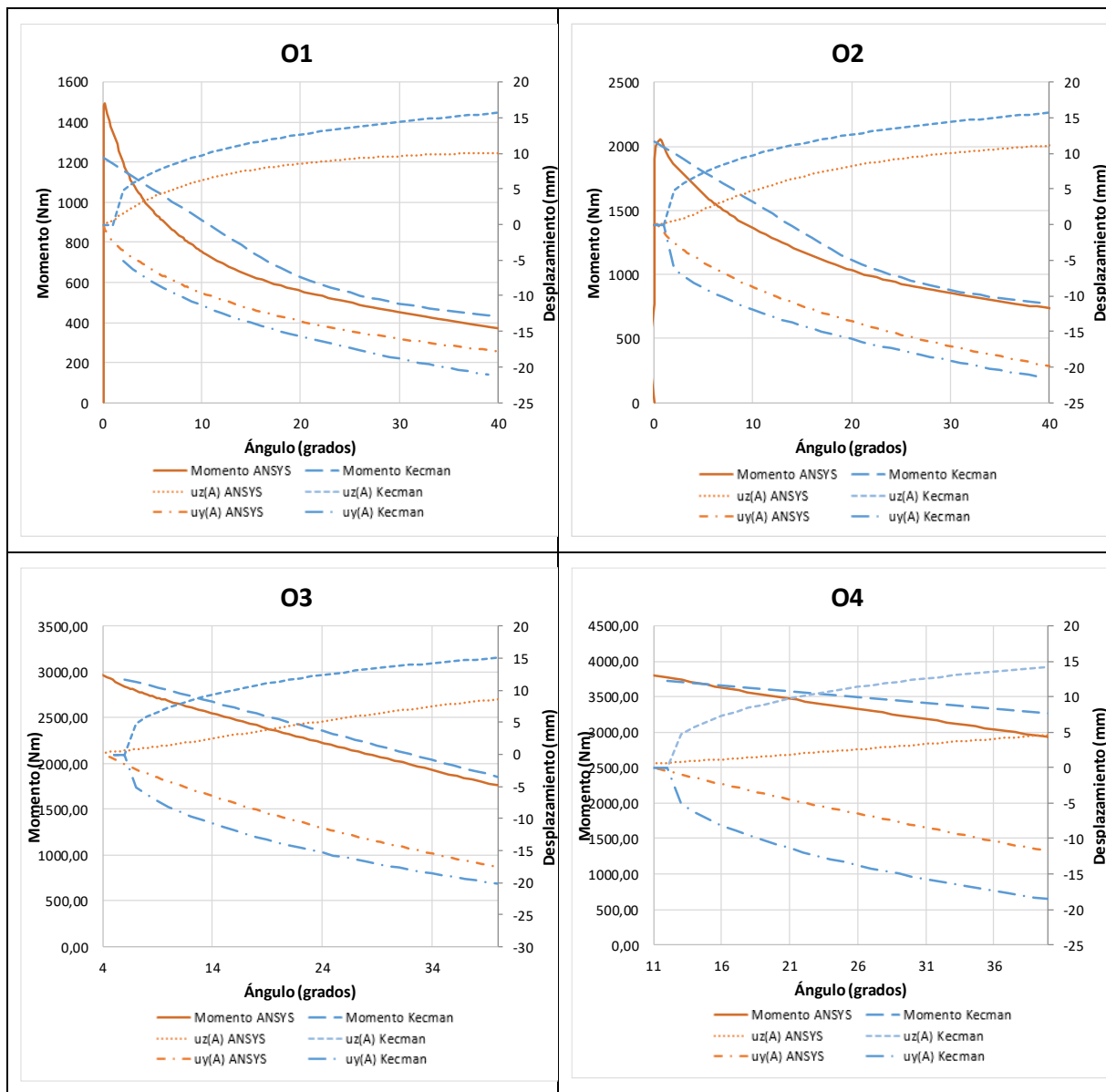


Figura 5: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$. Casos O.

El grupo O de simulaciones mantiene los mismos valores de ancho y altura de la sección, pero incrementa el espesor, disminuyendo los ratios a/t y b/t . Como se comentó, y uno de las limitaciones más relevantes del modelo de Kecman, es no considerar el espesor para calcular el desplazamiento del punto A. Por tanto, en todos los casos las curvas $u_z(A)$ y $u_y(A)$ son idénticas. En el modelo MEF validado, el espesor tiene una gran influencia en la deformada de la rótula plástica, caracterizada mediante el desplazamiento del punto A; además, aumentando el espesor varía la forma de la curva Momento-Ángulo, enderezándolas y alcanzando valores menores para el mismo ángulo.

Los resultados para O1 y O2 son prácticamente idénticos en cuanto a la deformada, pero de O2 a O4 pueden observarse diferencias: esto sugiere que el espesor tiene que ser considerado para algunos valores de ratios, pero no para valores más bajos.

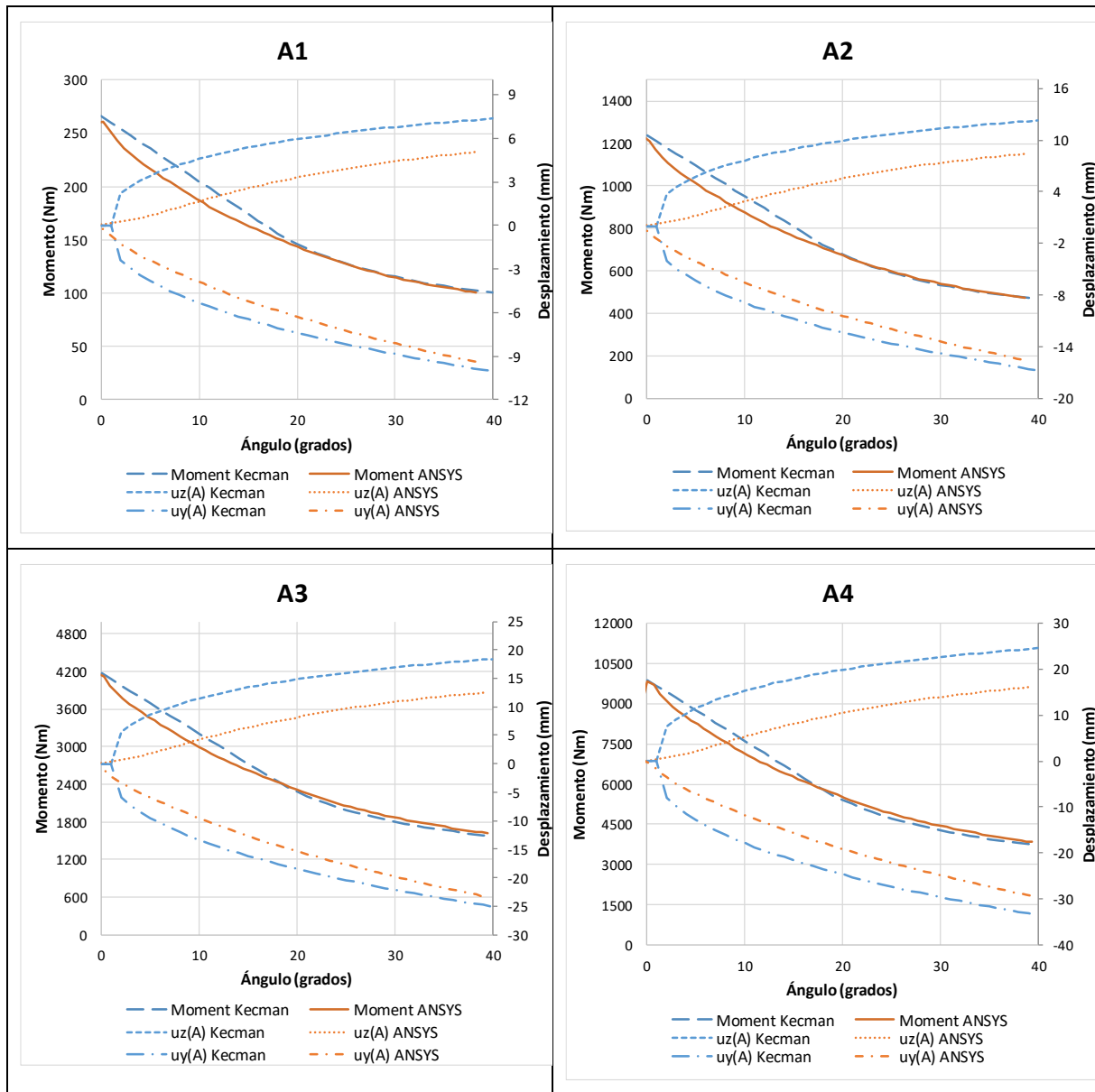


Figura 6: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$. Casos A.

En los grupos A y C el espesor varía en un amplio rango, pero manteniendo los ratios a/t y b/t , Figura 6: y Figura 8:. En todos estos casos, la forma en el modelo M.E.F. es idéntica en cada curva del mismo grupo, y o bien sigue la curva marcada por el modelo de Kecman, como en el grupo A, o no coinciden como en los casos C: esto sugiere que los valores de altura, ancho y espesor de la sección afectan en magnitud a las curvas, pero la forma únicamente depende los ratios a/t y b/t .

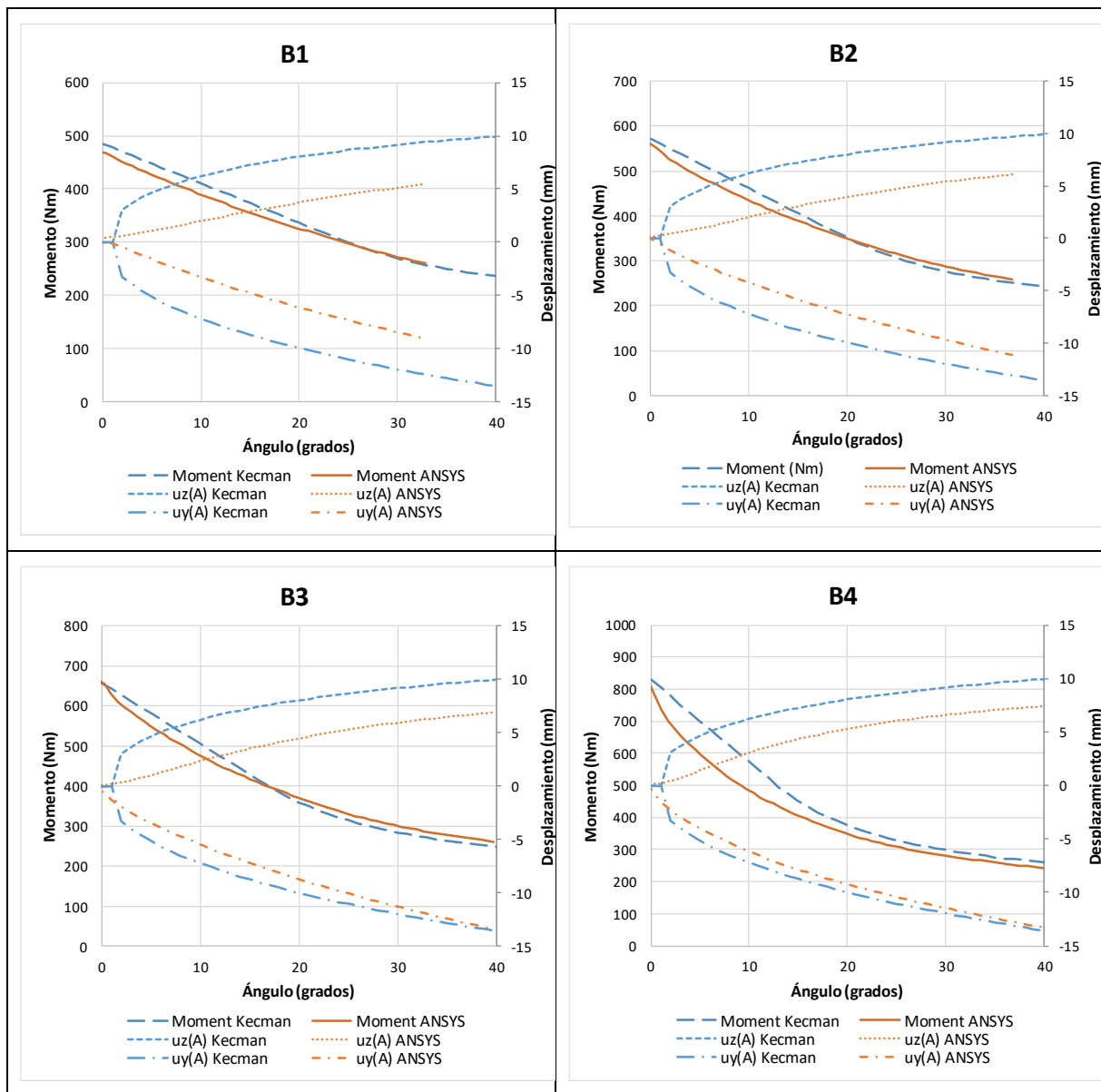


Figura 7: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$. Casos B.

El grupo B incrementa el valor de a para variar el ratio a/b de 1, sección cuadrada, a secciones rectangulares hasta un valor de $a/b=2$. En estos casos, la Figura 7: muestra los mismos resultados que para el grupo O, donde B3 y B4 tienen altos valores de ratios a/b y a/t , siendo las curvas similares a aquellas obtenidas en el modelo de Kecman; los casos B1 y B2 tienden a divergir a medida que los ratios disminuyen.

En estos dos casos, las curvas no alcanzan los 40 grados debido a que sólo se ha graficado la parte de la curva a partir del punto de colapso. Estos dos perfiles tienen una parte de curva correspondiente a la región elasto-plástica o meseta previa al colapso, que por motivos de comparación con Kecman se han eliminado. En la ampliación del modelo de Kecman se introducirá esta parte de la curva.

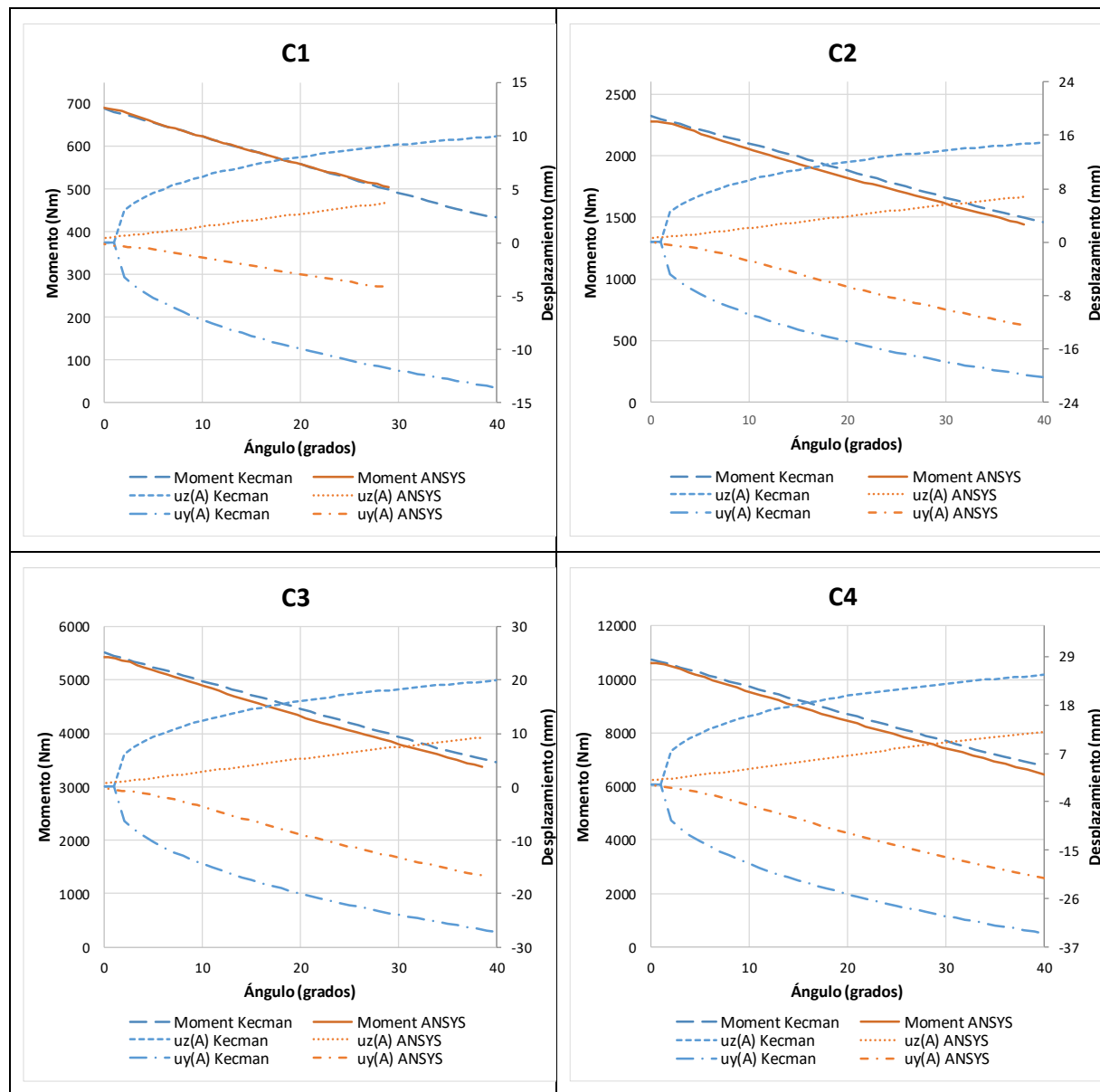


Figura 8: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$. Casos C.

Como se comentó en la metodología de esta fase, se ha propuesto un índice que ordene los perfiles según su comportamiento, en base a los resultados presentados. El comportamiento varía entre perfil tubular a perfil macizo, por tanto, el índice debe relacionar la inercia a flexión del perfil y el área de la sección. Para adimensionalizar el coeficiente, se incluye el espesor al cuadrado, pues este parámetro es el más relevante a la hora de variar entre ambos tipos de comportamiento, y que afecta a los ratios a/t y b/t . Por último, se incluye directamente el ratio a/b , que como se comentó en el capítulo anterior, altera el comportamiento predicho únicamente usando los otros dos ratios.

La ecuación siguiente define este índice, denominado índice Q, mediante los parámetros físicos y geométricos ya comentados, y se ha reescrito utilizando únicamente los ratios a/b , a/t y b/t :

$$Q = \frac{I_x}{A} \cdot \frac{a/b}{t^2} = a/b \frac{0.25(a/t)(b/t)^2 - 0.5(a/t)(b/t) + 0.33(a/t) + 0.083(b/t)^3 - 0.5(b/t)^2 + (b/t) - 0.67}{\frac{a}{t} + \frac{b}{t} - 2}$$

Donde I_x es el segundo momento de área y A es el área de la sección.

El índice Q se ha calculado para cada uno de los casos y se presenta en la Tabla 4:. Tal y como se anticipó, el error cometido al usar el modelo de Kecman para obtener la geometría de la rótula plástica ha sido calculado. Con este objetivo, la métrica de $u_y(A)$, $u_z(A)$ y la curva Momento-Ángulo se ha graficado con respecto al índice Q en la Figura 9:. El valor de error graficado se ha obtenido para un giro de 30° de deformación plástica desde el punto de colapso, ya que el modelo de Kecman solo puede aplicarse a partir de dicho punto. El valor de $Q=50$ se ha marcado como divisor del gráfico en dos zonas, siendo este punto el valor crítico donde se produce un cambio drástico en

el valor de la métrica. Las escalas en la Figura 9:a y Figura 9:b son el mismo, mientras que en la Figura 9:c se ha ajustado para una mejor visualización de los datos.

Tabla 4: Casos simulados: ratios e índice Q.

ID	a/b	a/t	b/t	Q	ID	a/b	a/t	b/t	Q
1	1.00	11.3	11.3	18	O2	1.50	30.0	20.0	100
2	1.75	23.3	13.3	51	O3	1.50	20.0	13.3	42
3	1.75	17.5	10.0	27	O4	1.50	15.0	10.0	23
K1	3.00	34.6	11.5	70	A1	1.50	23.5	15.7	60
K2	2.00	40.6	20.3	146	A2	1.50	23.5	15.7	60
K3	2.00	35.3	17.6	108	A3	1.50	23.5	15.7	60
K4	2.00	30.2	15.1	78	A4	1.50	23.5	15.7	60
K5	1.90	33.8	17.8	104	B1	1.00	15.7	15.7	36
K6	1.50	13.9	9.0	19	B2	1.25	19.6	15.7	48
K7	1.50	23.5	15.7	60	B3	1.50	23.5	15.7	60
K12	1.00	27.8	27.8	120	B4	2.00	31.4	15.7	85
K13	1.00	24.0	24.0	88	C1	1.00	12.7	12.7	23
K16	1.00	17.2	17.2	44	C2	1.00	12.7	12.7	23
K17	1.00	12.7	12.7	23	C3	1.00	12.7	12.7	23
O1	1.50	40.0	26.7	182	C4	1.00	12.7	12.7	23

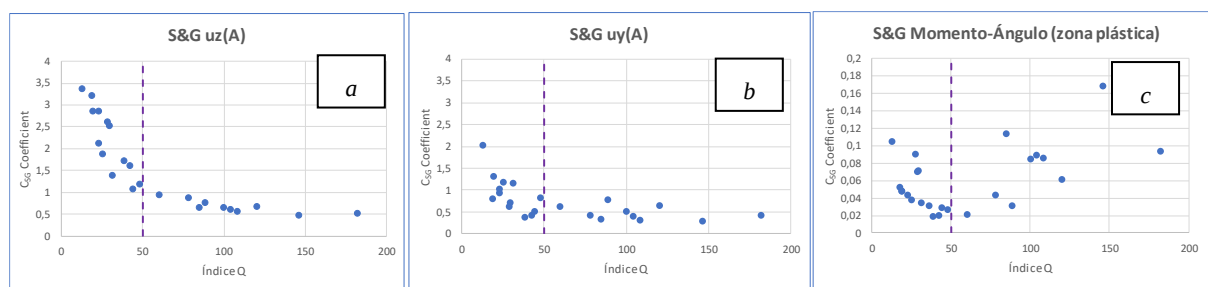


Figura 9: Error S&G vs índice Q: a) $u_z(A)$; b) $u_y(A)$; c) Momento-Ángulo.

Bajos ratios conllevan a su vez un índice Q bajo. En los párrafos previos ya se ha comentado que en los grupos A y C, los mismos ratios producen el mismo comportamiento y las mismas divergencias cuando son comparados con el modelo de Kecman: estos casos tienen el mismo índice Q. En el caso de tener el mismo índice Q pero diferentes ratios, el resultado es igualmente la misma forma y la misma divergencia en las curvas: un ejemplo de este resultado es el caso de comparar cualquiera de los perfiles del grupo A con B3, todos ellos con índice Q con valor de 60, y los ensayos C con O4, con índice Q de valor 23. Otras comparaciones entre casos con similar índice llevan a la misma conclusión. Tras examinar los resultados de las simulaciones considerando el valor de índice Q, altos valores significa que la geometría de la rótula plástica obtenida con el modelo de Kecman es suficientemente precisa, mientras que bajos valores de Q tienden a incrementar el error. Cuando se grafica dicho error en función del índice Q, se comprueba que el error está relacionado con el índice. En ambos casos, $u_y(A)$ y $u_z(A)$, el error se encuentra en el entorno del 50% para índices superiores a 50, viéndose incrementado de manera drástica para valores inferiores hasta alcanzar errores superiores al 100%. Este cambio en el error obtenido por la métrica a partir de $Q=50$ justifica la definición de dicho índice, pues fácilmente puede determinar el tipo de comportamiento de un perfil basado en las características geométricas de la sección, si se comporta como el modelo de Kecman para lo que se puede denominar perfiles de pequeño espesor, o se comportan como perfiles de gran espesor.

El error en la curva Momento-Ángulo se encuentra siempre por debajo del 18%, alcanzando su valor mínimo en $Q=50$. Kecman desestimó la zona elasto-plástica de la curva Momento-Ángulo, hipótesis que se cumple en perfiles de pequeño espesor. Esto significa que el modelo de Kecman no predice el comportamiento del tubo anterior al colapso que aparece en los perfiles con espesores grandes, pero el error en estos casos no puede ser cuantificado en este estudio ya que el modelo de Kecman no aporta una solución para esta parte de la curva. Por tanto, la métrica solo ha cuantificado el error tras el punto de colapso, es decir, para los tubos de gran espesor, la zona elasto-plástica de la curva Momento-Ángulo es obviada y no influye en el valor de error. Esto explica los bajos valores de C_{sg} para este tipo de perfiles, aunque sí existe la tendencia a aumentar el error a medida que disminuye el índice Q. Otra limitación del modelo de Kecman es que sobreestima la primera etapa tras el colapso en la curva Momento-Ángulo, por lo que Kecman propone usar una aproximación lineal en lugar de los valores obtenidos por su modelo. La Figura 3:, en concreto los casos desde el K1 al K13, muestra que incluso cuando se usa esta aproximación lineal para la primera etapa, la curva Momento-Ángulo del ensayo está por debajo del modelo de Kecman. Modelo y ensayo son prácticamente iguales para la segunda etapa del colapso, es decir, la parte no lineal de la curva. El error en la Figura 9:c para tubos de pequeño espesor es el error producido en esa primera etapa lineal del colapso, y es menor al 12% excepto en un caso que asciende al 17%, por lo que se considera una correlación alta. A medida

que el índice Q aumenta, también lo hace la sobreestimación de la parte lineal, lo que conlleva un aumento del error.

Algunos ejemplos para entender el índice Q y sus implicaciones se enuncian a continuación tras el análisis de los casos de este estudio. Observando al grupo B de nuevo, los casos B3 y B4 tienen un comportamiento similar incluso teniendo diferente índice Q , 60 y 85 respectivamente, ambos por encima del límite de 50; el caso B2, con $Q=48$, tiene un error más elevado pero al estar cerca del valor límite, el modelo de Kecman puede seguir siendo una aproximación buena, si bien no excelente; B1, con $Q=36$, se encuentra lo suficiente alejado del valor límite como para considerar al modelo de Kecman una buena aproximación de la geometría deformada.

La Figura 10: muestra las líneas plásticas para tres casos con diferente índice Q . Estos tres casos son ejemplos de tubos con un valor diferente del índice Q , de manera que: un caso se sitúa en el valor límite de $Q=50$, y los otros dos por encima y debajo de dicho límite. Los elementos en rojo y naranja tienen un valor elevado de energía de deformación comparado con los elementos en azul o bajo valor de energía, siendo los elementos en gris aquellos con deformación mínima o nula. Un alto valor de energía de deformación significa que dichos elementos tienen una gran relevancia en el total de energía absorbida por la rótula plástica, y, por tanto, son relevantes para la curva Momento-Ángulo. En tubos con alto valor de Q , las líneas plásticas son similares a aquellas definidas en el modelo de Kecman, siendo las más relevantes A-B, A-G, A-E, B-G y B-E en las paredes laterales, y la línea B-C en el flanco a compresión. Los tubos con un valor de Q bajo tienen algunas líneas plásticas diferentes de aquellas definidas en el modelo de Kecman, siendo las más relevantes A-B en el lateral y B-C en el flanco a compresión. La energía absorbida por las líneas A-G, A-E, B-G y B-E disminuye a medida que el índice Q disminuye.

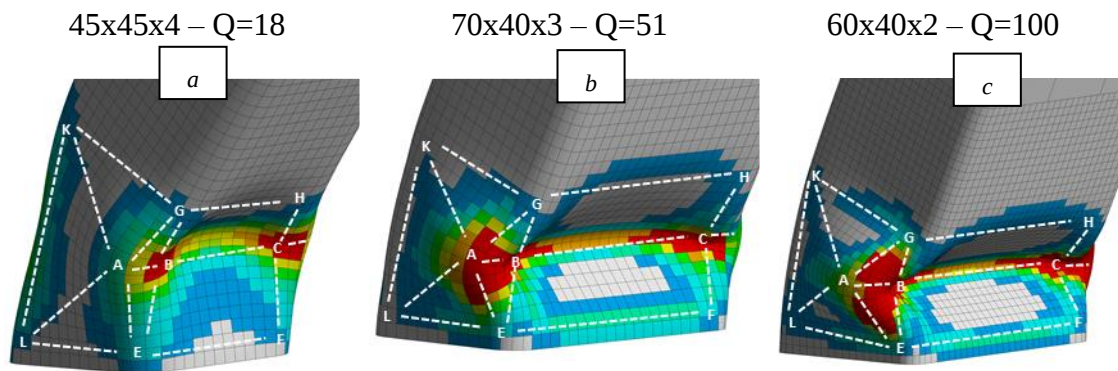


Figura 10: Líneas plásticas a 25° tras el colapso. “Strain energy”.

Los casos con Q por encima del valor límite producen las mismas líneas plásticas que las establecidas por Kecman en su modelo geométrico (Figura 10:b y Figura 10:c); los casos con Q por debajo del límite tienen líneas de plasticidad y una geometría de la rótula diferentes a las del modelo de Kecman (Figura 10:a). De acuerdo con el modelo de Kecman y las simulaciones con Q superior a 50, las líneas plásticas de los laterales tienen mayores valores de energía y por tanto son las más influyentes en la curva Momento-Ángulo. A medida que el índice Q disminuye, las líneas plásticas de los laterales pierden importancia y las líneas en los flancos pueden llegar a convertirse en las más relevantes; esta tendencia no se observa en el modelo de Kecman, en el que los laterales son siempre la parte más influyente en la curva Momento-Ángulo. En tubos con Q inferior a 50, el modelo de Kecman sobreestima la deformación de las paredes laterales, y por tanto la curva Momento-Ángulo es sobreestimada (por ejemplo, el caso ID=K6); por otro lado, es cierto que el modelo subestima la contribución del flanco a compresión, lo que en algún caso puede compensar la sobreestimación de los laterales. Esto puede explicar por qué en algunos casos la curva Momento-Ángulo tiene una buena correlación entre simulación y el modelo de Kecman a pesar de la baja correlación en las curvas $u_z(A)$ y $u_y(A)$, como por ejemplo en el caso ID=K17 y todos los casos del grupo C.

La Figura 11: muestra la absorción de energía de cada pared de la rótula en la zona no lineal del modelo de Kecman, es decir, a partir de la aproximación lineal que realiza para los primeros ángulos de deformación y hasta el ángulo denominado θ_T : como ya se explicó, la energía en esos primeros ángulos de giro está sobreestimada y Kecman propone obviar los resultados de energía calculado por su modelo, por lo que no tiene sentido ponerlos en la gráfica. En este caso, la aproximación lineal se extiende durante los primeros 16° de giro. En los perfiles con índice Q inferior a 50, la aproximación lineal se extiende prácticamente hasta los 40°, razón por la cual no se presenta ninguna gráfica comparando los resultados para un perfil $Q < 50$.

Se ha agrupado, en el caso del modelo de Kecman, el cálculo de energía de las líneas pertenecientes a cada pared, y en el caso del modelo de elementos finitos, agrupando los elementos de cada pared y sumando la energía de dichos elementos.

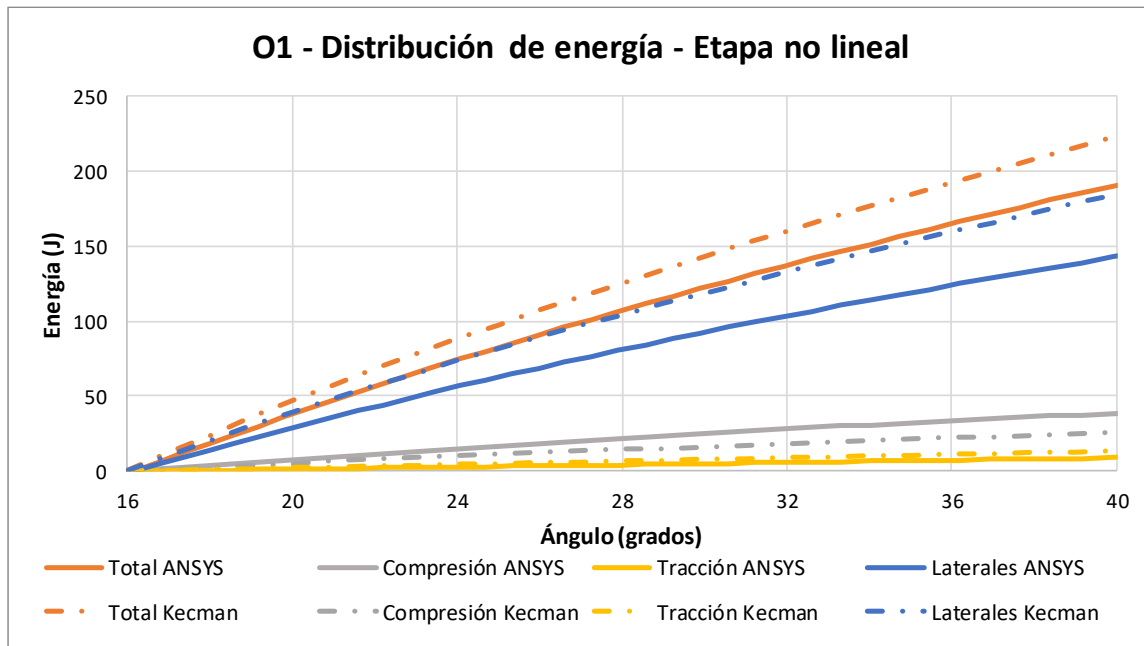


Figura 11: Distribución de la absorción de energía en las paredes de la rótula. ID=O1. Simulación y Kecman.

El caso representado en la Figura 11: es el O1, un perfil con Q por encima de 50, y, por tanto, cuyo comportamiento puede ser explicado mediante el modelo de Kecman. Por otro lado, al tener un $Q=182$, el error cometido en la primera etapa de la rótula es más elevado que para perfiles más cercanos a $Q=50$, por lo que la energía absorbida está a su vez sobreestimada. Esta sobreestimación, visible especialmente en la diferencia entre Kecman y modelo de elementos finitos para las curvas de energía total, es la explicación de que las curvas entre el modelo de Kecman y de elementos finitos no sean idénticas en magnitud, pero tengan un reparto en la absorción de energía por paredes muy similar. La energía es absorbida prácticamente en su totalidad por las paredes laterales, siendo el flanco a tracción apenas partícipe.

En la Figura 12: se muestra el reparto de energía por paredes para los casos O1, con $Q=182$, y el caso O4, con $Q=23$. Ambos casos se encuentran alejados del valor límite $Q=50$, y representan la diferencia en el reparto de energías entre ambos tipos de comportamiento: en perfiles con índice Q bajo, la energía absorbida por las paredes laterales decae en detrimento de los flancos a compresión y, en especial, del flanco a tracción. La forma de las curvas de energía también es diferente, más recta en el caso de perfiles con Q inferior a 50, dando lugar a una curva Momento-Ángulo más cercana a un valor constante, al ser ésta la derivada de la curva de energía.

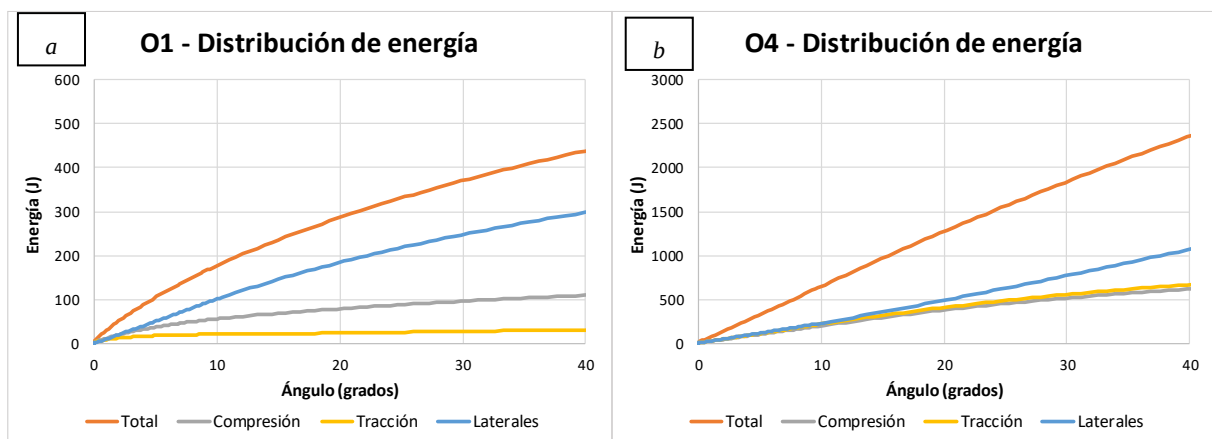


Figura 12: Distribución de la absorción de energía en las paredes de la rótula. a) ID=O1; b) ID=O4.

Según lo visto hasta ahora, la deformada de la rótula en el caso de perfiles con Q superior a 50 es acorde al modelo de Kecman, y, por tanto, también lo es la energía en las paredes laterales. En perfiles con Q por debajo de 50, la geometría de la rótula no es tan pronunciada y se desvía del modelo de Kecman, por lo que la energía en las paredes laterales es menor que la obtenida en el modelo de Kecman.

A continuación, se realiza el análisis del segundo DOE, en relación con la variación de los parámetros que definen el material. En las figuras siguientes el eje de abscisas es el ángulo plástico, pero solo se muestra a partir del punto de colapso, por lo que la zona de meseta anterior al colapso e inicio de la rótula plástica se omite.

La Figura 13: muestra los resultados del grupo D, donde en cada caso hay un módulo tangente inferior al anterior.

La correlación de la curva Momento-Ángulo es correcta, si bien en los casos extremos, D1 y D4, hay un cierto error en la magnitud de los valores, pero con un error en forma (pendiente de la curva), cercano a nulo. En cuanto a la geometría de la rótula, no se ve influida por el módulo tangente, como puede comprobarse, siendo idéntica en todos los casos. Por tanto, la variación del módulo tangente no cambia el comportamiento en perfiles con Q inferior a 50, como es el caso, y mantiene la divergencia en la geometría de la rótula.

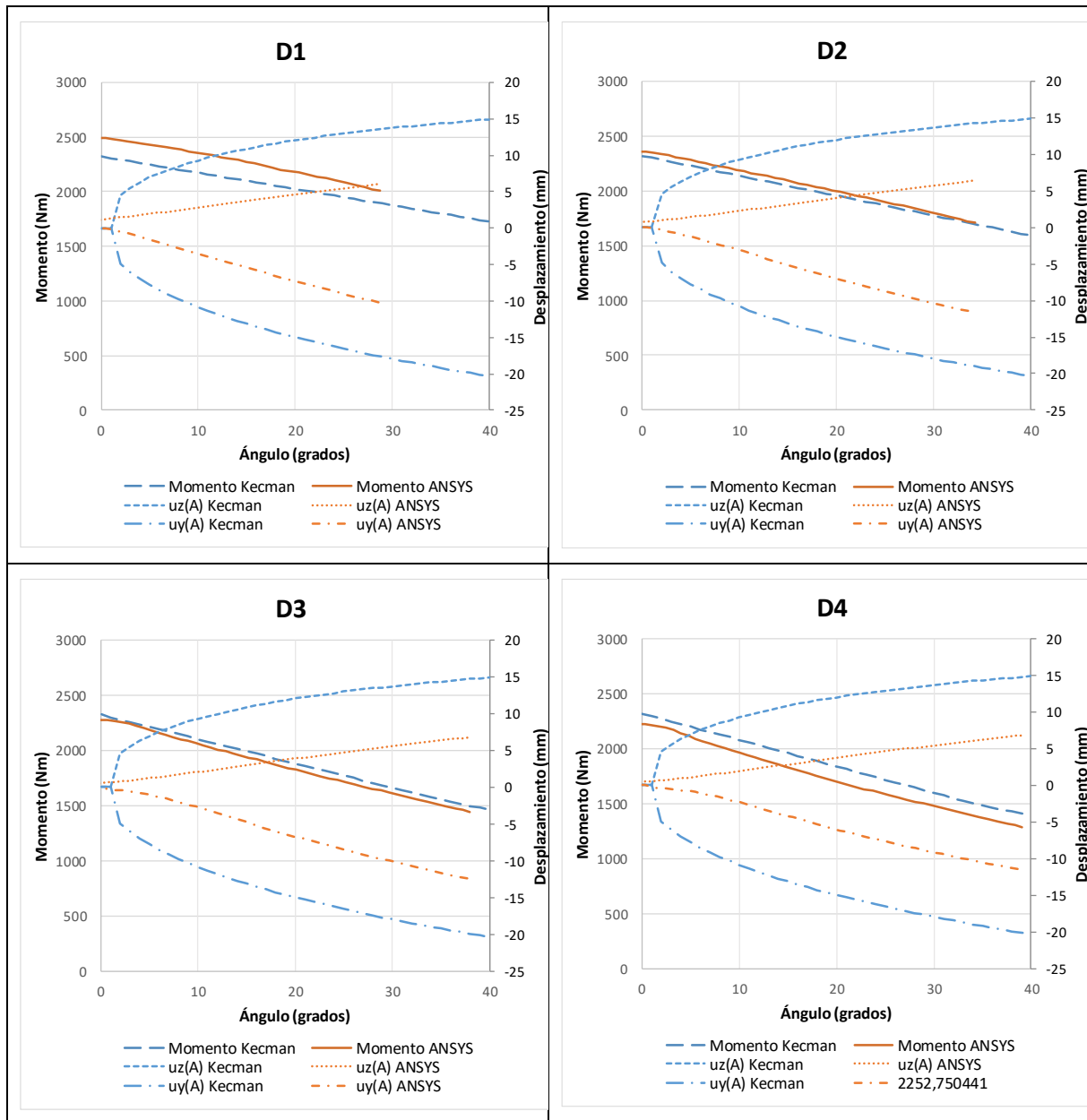


Figura 13: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, uy(A) y uz(A). Casos D.

En la Figura 14: se muestran los resultados correspondientes al grupo E de simulaciones con cambio en el módulo tangente pero, y al contrario que en el caso anterior, para un perfil con Q superior a 50.

En relación con la curva Momento-Ángulo, la correlación es buena, si bien hay una sobreestimación por parte del modelo de Kecman en la parte lineal (casos E3 y E4), o una subestimación en la parte no lineal (casos E1 y E2). El modelo de Kecman varía la pendiente de la curva en función del módulo tangente, pero no en la misma magnitud que los modelos. En cuanto a la geometría de la rótula, se llega a la misma conclusión que para perfiles con Q inferior a 50: el módulo tangente no influye en la geometría de la rótula.

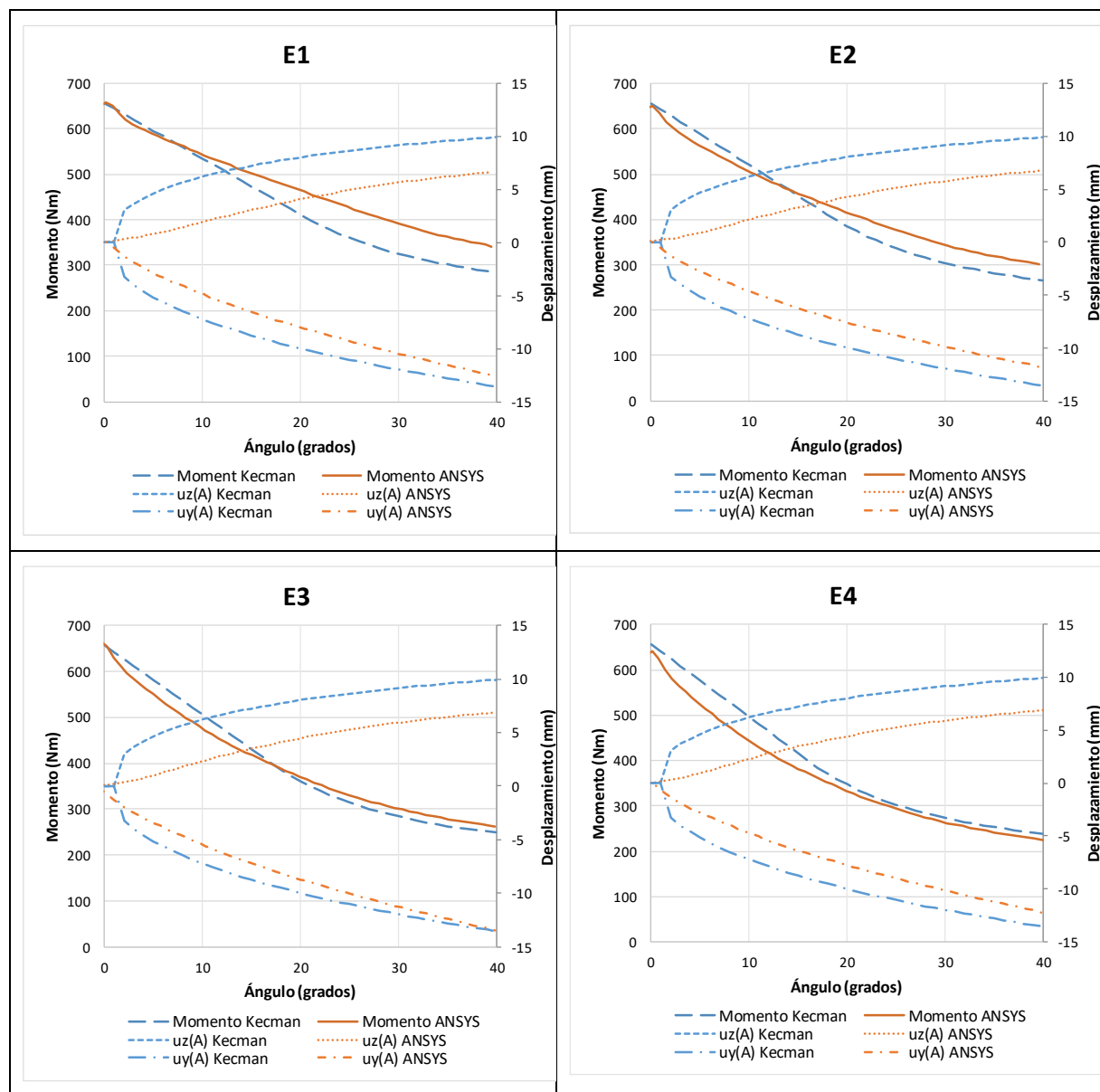


Figura 14: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$. Casos E.

En la Figura 15: se muestran los resultados para el grupo F, donde hay una variación en el límite elástico para un perfil con Q inferior a 50. En este conjunto de simulaciones, se ajusta la escala del eje vertical primario, debido a que el momento máximo disminuye con la minoración del límite elástico. La correlación de las curvas de momento es buena con el modelo de Kecman, aunque es ligeramente subestimada o sobreestimada para cada caso. El error producido no es excesivo, 150 Nm en el peor caso, teniendo en cuenta que la variación del límite elástico entre cada caso y el siguiente supone una disminución del momento máximo superior a 500 Nm.

En cuanto a la geometría de la rótula, y al igual que con el módulo tangente, no varía por la variación del límite elástico. Los cuatro casos son análogos, manteniéndose el tipo de comportamiento definido mediante el índice Q .

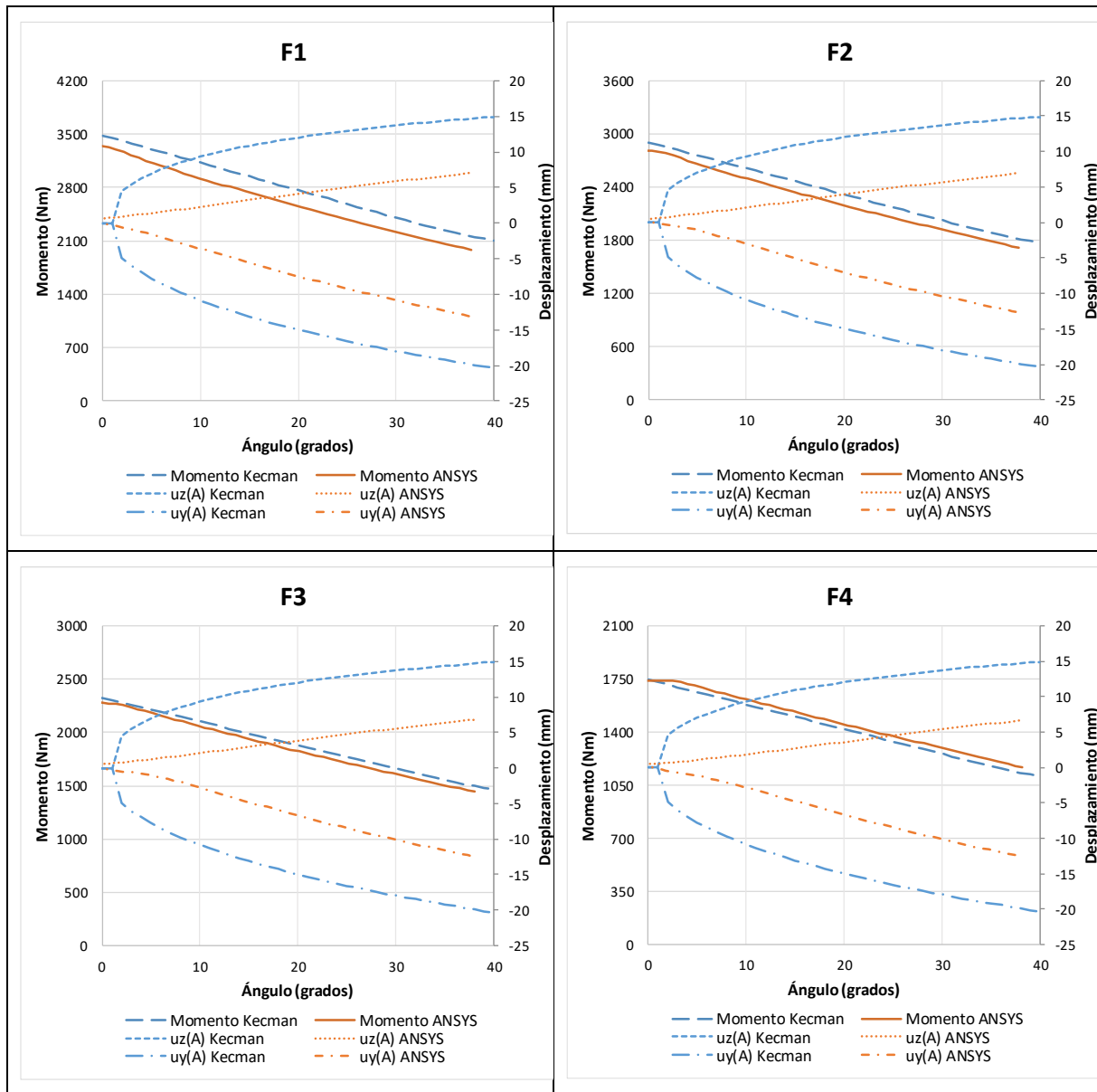


Figura 15: Modelo MEF – Modelo Kecman. Curvas Momento-Ángulo, $u_y(A)$ y $u_z(A)$. Casos F.

De manera adicional para las simulaciones del segundo DOE, se han graficado las curvas Momento-Ángulo en la Figura 16:. En estas gráficas se puede comprender de una manera más clara la variación en el comportamiento debida a cambios en la definición del material. Además, se puede ver el comportamiento anterior a la formación de la rótula plástica.

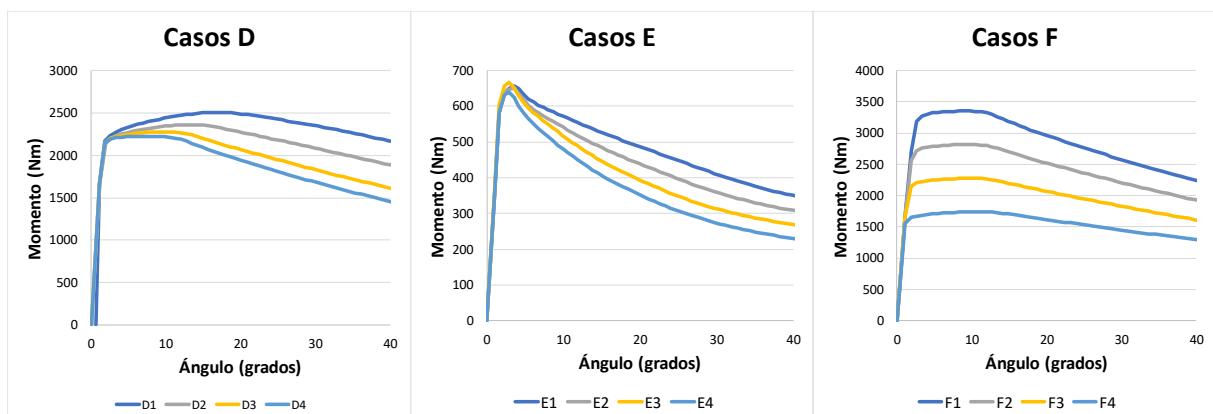


Figura 16: Modelo MEF. Curvas Momento-Ángulo pre y post-colapso. Casos D, E y F.

Un aumento del módulo tangente supone, para perfiles con Q inferior a 50, un aumento de la zona elasto-plástica anterior al colapso, e incluso un aumento del momento máximo para módulos tangente elevados (Casos D). En el caso de perfiles con Q superior a 50, no hay un aumento de la zona elasto-plástica por muy elevado que sea el valor de módulo tangente (Casos E). Un aumento del límite elástico supone un aumento del momento máximo y, por tanto, de toda la curva, pero manteniendo la zona elasto-plástica constante (Casos F).

En base a los resultados del segundo DOE, un cambio en el material no produce variaciones en la geometría de la rótula plástica y, aunque produzca alguna variación en la curva Momento-Ángulo, mantiene el comportamiento de manera inalterada: o puede predecirse con el modelo de Kecman, $Q > 50$, o dicho modelo produce un error cuya tendencia es aumentar a medida que disminuye el índice Q , en los casos en los que Q sea inferior a 50. Por tanto, la definición del índice Q en base únicamente a los parámetros geométricos se considera justificada.

4. Conclusiones

En este trabajo, se han llevado a cabo simulaciones numéricas junto a análisis teóricos, para investigar las diferencias en el comportamiento a flexión de perfiles de pared delgada en función de los tres parámetros dimensionales de la sección rectangular. El modelo de elementos finitos propuesto se ha validado en un amplio rango de secciones mediante la curva Momento-Ángulo. La medición del desplazamiento del punto A se ha demostrado como una elección correcta para cuantificar con un único punto la deformada de la rótula, así como utilizar métricas para obtener el error cometido entre ensayos, simulaciones y modelos numéricos.

La definición del índice Q ordena los perfiles de acuerdo con el comportamiento a flexión y mecanismo de deformación en dos grupos, siendo el valor límite entre ambos grupos $Q=50$: aquellas secciones con un valor superior se comportarán como establece el modelo de Kecman con un error máximo del 50% para la deformada, caracterizada mediante las curvas $u_y(A)$ y $u_z(A)$; aquellas secciones con valores inferiores a 50 se comportarán con un mecanismo de deformación diferente, incrementando la importancia de las líneas plásticas del flanco a compresión y tracción con detrimento de los laterales. Este último comportamiento diverge del establecido por el modelo de Kecman, con errores del 50% hasta más del 100% a medida que el índice Q tiende a 1. El índice Q se define únicamente en base a los ratios entre las tres dimensiones de la sección, sin tener en cuenta los parámetros del material: si bien la calidad del acero varía los valores de la curva Momento-Ángulo, no altera el mecanismo de deformación ni la geometría de la rótula.

Debido al error cometido al aplicar el modelo de Kecman para predecir el comportamiento de perfiles con $Q < 50$, debería usarse un modelo MEF como el presentado en este trabajo, o bien desarrollar un modelo diferente para esta tipología de perfiles teniendo en cuenta las diferencias en el mecanismo de formación de la rótula plástica.

Es importante destacar que la mayoría de los perfiles usados en los últimos años tienen un índice Q cercano al valor límite o inferior, mientras que anteriormente se utilizaban perfiles con índice Q por encima del valor límite. Esta tendencia sugiere la necesidad creciente de mejorar la predicción en modelos con Q inferior a 50, a la vez que explica la razón de las divergencias con modelos teóricos validados como el de Kecman, en cuyo alcance había una mayoría de perfiles con alto valor de Q .

5. Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias a la financiación del proyecto Segvauto.5G-CM TEC-2024/ECO-277, subvencionado por la Consejería de Educación, Ciencia y Universidades de la CAM, convocatoria correspondiente al año 2024 de ayudas a proyectos de I+D realizados en colaboración entre grupos de investigación pertenecientes a las universidades y organismos de investigación de la Comunidad de Madrid.

6. Referencias

- [1] N.K. Gupta, Venkatesh, A study of the influence of diameter and wall thickness of cylindrical tubes on their axial collapse, *Thin-Walled Struct.* 44 (3) (2006)
- [2] S.P. Santosa, T. Wierzbicki, A.G. Hanssen, M. Langseth, Experimental and numerical studies of foam-filled sections, *Int. J. Impact. Eng.* 24 (5) (2000) 509–534, 2000.
- [3] X. Zhang, H. Zhang, Crush resistance of square tubes with various thickness configurations, *Int. J. Mech. Sci.* 107 (Supplement C) (2016) 58–68, 2016.
- [4] S.J. Cimpoeu, N.W. Murray, The large-deflection pure bending properties of a square thin-walled tube, *Int. J. Mech. Sci.* 35 (3–4) (1993) 247–256, 1993 MAR-APR.
- [5] K. Chang, W. Pan, K. Lee, Mean moment effect on circular thin-walled tubes under cyclic bending, *Struct. Eng. Mech.* 28 (5) (2008) 495–514, MAR 30.

- [6] M. Avalle, G. Belingardi, R. Montanini, in: Allison I. (Ed.), *Strain Field Measurements in the Bending Collapse of Thin-Walled Tubes*, 1998.
- [7] R. Pavazza, On the load distribution of thin-walled beams subjected to bending with respect to the cross-section distortion, *Int. J. Mech. Sci.* 44 (2) (2002) 423–442, 2.
- [8] G. Belingardi, L. Peroni, Experimental investigation of plastic collapse of aluminium extrusions in biaxial bending, *Int. J. Mech. Sci.* 49 (5) (2007) 554–566, 5.
- [9] N. Guerrero, M.E. Marante, R. Picón, J. Flórez-López, Model of local buckling in steel hollow structural elements subjected to biaxial bending, *J. Constr. Steel Res.* 63 (6) (2007) 779–790, 6.
- [10] X. Zhang, H. Zhang, W. Ren, Bending collapse of folded tubes, *Int. J. Mech. Sci.* 117 (Supplement C) (2016) 67–78, 2016.
- [11] W. Wang, X. Qiu, An analytical study for global buckling of circular tubes under axial and oblique compression, *Int. J. Mech. Sci.* 126 (Supplement C) (2017) 120–129, 2017.
- [12] D.C. Han, S.H. Park, Collapse behavior of square thin-walled columns subjected to oblique loads, *Thin-Walled Struct.* 35 (3) (1999) 167–184, 11.
- [13] A. Reyes, M. Langseth, O.S. Hopperstad, Crashworthiness of aluminum extrusions subjected to oblique loading: experiments and numerical analyses, *Int. J. Mech. Sci.* 44 (9) (2002) 1965–1984, 2002.
- [14] C. Fang, F. Zhou, C. Luo, Cold-formed stainless steel RHSs/SHSs under combined compression and cyclic bending, *J. Constr. Steel Res.* 141 (2018) 9–22.
- [15] D. Kecman, *Bending Collapse of Rectangular Steel Tubes in Relation To the Bus Rollover Problem* (dissertation), Cranfield Institute of Technology, 1979.
- [16] D. Kecman, Bending collapse of rectangular and square section tubes, *Int. J. Mech. Sci.* 25 (9) (1983) 623–636, 1983.
- [17] UNECE regulation N° 66 01 series, uniform technical prescriptions concerning the approval of large passenger vehicles with regard to the strength of their superstructure, 2005.
- [18] D. Rincon-Davila, E. Alcala, A. Martin, Theoretical-experimental study of the repair of steel bus structures after rollover, *J. Constr. Steel Res.* 162 (2019) 105734, UNSP.