



Análisis cinemático mediante teoría de torsesores de un mecanismo de Jansen reconfigurable

Carmen Blanco Herrera¹, Jorge Dominguez Batuecas¹, Daniel Sanchez Garcia¹, Andres Sanz Garcia¹

¹Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Salamanca, cbh@usal.es, id00806654@usal.es, dasaga@usal.es, ansanz@usal.es

El mecanismo de Jansen es una cadena cinemática plana de ocho eslabones y un grado de libertad (GDL) diseñada por el escultor Theo Jansen para imitar el suave movimiento del caminar. Este trabajo analiza desde el punto de vista cinemático una transformación del mecanismo de Jansen en un mecanismo reconfigurable basado en longitudes de eslabones variables. El objetivo es producir un cambio en el ciclo de marcha y generar nuevas trayectorias que expandan el rango de aplicaciones en el campo de la robótica de andadores.

Se realizó un análisis de las opciones de reconfiguración del mecanismo de un GDL a partir de cambios en la longitud de uno o más eslabones. Se observaron patrones de marcha más adaptados a tareas completamente diferentes a las del diseño inicial como puede ser un movimiento de subir peldaños. Se llevó a cabo el análisis completo de velocidades y aceleraciones recurriendo a la teoría de torsesores para establecer la cinemática del mecanismo. La teoría de torsesores ha demostrado ser, desde hace más de tres décadas, una herramienta eficaz para resolver el análisis de primer y segundo orden de cadenas cerradas planas y espaciales. Se realizó una comparativa de los resultados obtenidos de las variables cinemáticas conforme a las diferentes configuraciones del mecanismo de Jansen y se comprobó utilizando procedimientos convencionales de cálculo. La cancelación de las tasas de velocidad y tasas de aceleración de las articulaciones pasivas fue una ventaja importante al emplear la teoría de torsesores recíprocos, debido a las propiedades de la forma de Klein.

El significado geométrico del álgebra de torsesores permitió la obtención de expresiones consistentes de claro significado físico que relacionan las propiedades cinemáticas del efector final impuestas por el eslabón motriz. Como trabajo futuro se ampliará el proceso de modelado de terrenos variables, se optimizarán las trayectorias y la reconfiguración de pata del andador y se comparará exhaustivamente con otras alternativas utilizando la teoría de torsesores para la resolución de la cinemática.

1. Introducción

Durante los últimos años el interés por los robots andadores de múltiples patas ha incrementado significativamente debido a su capacidad para implementar sus habilidades motoras en múltiples campos. La marcha aumenta la eficiencia de los desplazamientos y es la mejor opción para terrenos irregulares con pendiente (Figura 1). En la actualidad se han construido numerosas plataformas de andadores o marcha con cadena abierta en las que son necesarios actuadores en las caderas, rodillas y tobillos. Para simplificar el accionamiento y el sistema de control en una disposición con múltiples extremidades o patas se ha pensado en mecanismos de cadena cerrada con comparativamente menos grados de libertad (GDLs). Los mecanismos planos de cadena cerrada, como el mecanismo de Chebyshev [1], el mecanismo de Hoecken [2], el mecanismo de Klann [3] y el aquí estudiado mecanismo de Theo Jansen [4] [5]. Todos ellos están accionados por un solo motor generalmente y producen movimientos continuos y controlados que generan una marcha constante.

El presente artículo busca modificar el mecanismo de Theo Jansen con la intención de flexibilizar su capacidad de desplazamiento por terrenos irregulares, aumentar la estabilidad y la maniobrabilidad del andador en tales entornos. Debido a lo expuesto, es necesario estudiar los cambios producidos en el movimiento del mecanismo con motivo de la modificación de la longitud de sus eslabones, aumentando de esta manera los GDL. La reconfiguración del mecanismo [6] busca determinar si a partir de simples cambios en la geometría de un eslabón pueden encontrarse tareas o entornos completamente diferentes a las del diseño inicial, como, por ejemplo, subir escaleras, evitar obstáculos, etc.

Pocos estudios han estudiado los efectos de cambiar la longitud de los eslabones o los parámetros de los pares cinemáticos sobre la reconfiguración en mecanismos reconfigurables de un solo bucle. Es por ello importante estudiar la influencia de los cambios de las características de los parámetros geométricos en la reconfiguración para la aplicación práctica de los mecanismos reconfigurables [7].

El análisis cinemático del mecanismo reconfigurable se lleva a cabo aplicando la teoría de torsesores [8] en dos dimensiones (2D), como novedad, para el cálculo de las velocidades y aceleraciones del mismo. Esto se realizará mediante la utilización de los torsesores recíprocos y la forma de Klein. La teoría de torsesores da lugar a una fácil interpretación geométrica del movimiento dando lugar a un significado físico explícito del mecanismo. Esta teoría es muy utilizada para el análisis cinemático de mecanismos espaciales complejos porque permite, entre otras cosas, hacer un análisis de movilidad sencillo, y una obtención de la Jacobiana muy adecuada para el análisis de singularidades.



(a) Camino de barro con pendiente suave



(b) Pradera con inclinación moderada



(c) Superación de obstáculos



(d) Escaleras

Figura 1: Cuatro escenarios diferentes de terrenos irregulares.

2. Descripción del mecanismo de Theo Jansen

El mecanismo de Theo Jansen representado en la Figura 2A, es una cadena cinemática plana de ocho eslabones y un GDL que imita el movimiento al caminar en la locomoción terrestre en los sistemas vivos. El mecanismo está compuesto por un total de 12 barras, una de las cuales es el bastidor (Z_1) y que se encarga de sustentar el resto de las barras. Existen dos sólidos rígidos con forma triangular formados, cada uno de ellos, por la unión de tres barras. Uno de estos sólidos contiene el punto de contacto del mecanismo con el suelo. La trayectoria descrita por este punto genera la geometría de la huella. El mecanismo está formado por siete barras binarias y un eslabón sólido ternario. Estos eslabones están conectados entre sí por 10 articulaciones.

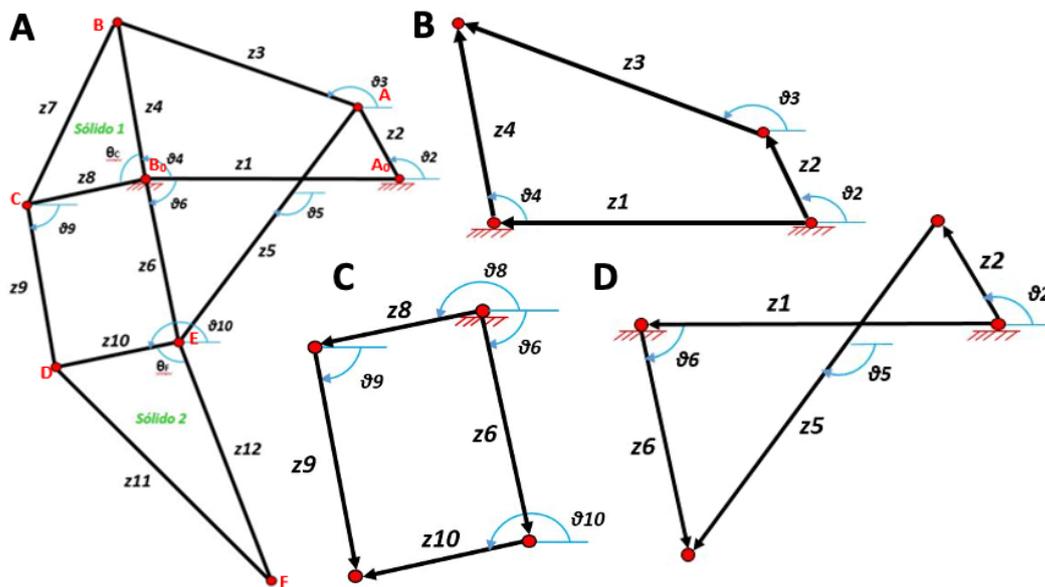


Figura 2: A. Nomenclatura utilizada para describir el mecanismo de Theo Jansen. B-D. División del mecanismo en 3 mecanismos de 4 barras (4R) independientes.

En la siguiente Tabla 1 se recoge la longitud, en centímetros, y la longitud normalizada de todos y cada uno de los eslabones que forman el mecanismo de Jansen estudiado, siendo la base del ejemplo numérico de este trabajo.

Tabla 1: Longitud de los eslabones del mecanismo estudiado.

	Z_i											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Longitud (cm)	15.00	4.17	20.33	12.00	20.33	12.00	11.14	10.00	11.89	10.00	26.11	19.00
Longitud normalizada	1.000	0.278	1.355	0.800	1.355	0.800	0.743	0.667	0.793	0.667	1.741	1.267

3. Reconfiguración del mecanismo.

La pata o mecanismo de Jansen de 1GDL mantiene invariables las relaciones de conexión, lo que hace que los movimientos y trayectorias de los eslabones y las articulaciones permanezcan sin cambios. Es necesario mejorar la adaptabilidad de la huella frente a diferentes obstáculos, ya sea variando su longitud o su altura. Para ello, en este trabajo se estudia la influencia de las longitudes de los eslabones en la geometría de la huella.

Cualquiera de los parámetros que define la geometría del modelo base puede considerarse para la reconfiguración, sin embargo, la selección del parámetro adecuado debe estar sujeta a algunos aspectos técnicos. En el caso del eslabón soporte (Z_1) y el eslabón impulsor (Z_2) por razones obvias descartamos su modificación. La influencia de la variación de las longitudes de los restante eslabones (Z_x) en la geometría de la huella es estudiada mediante una simulación gráfica.

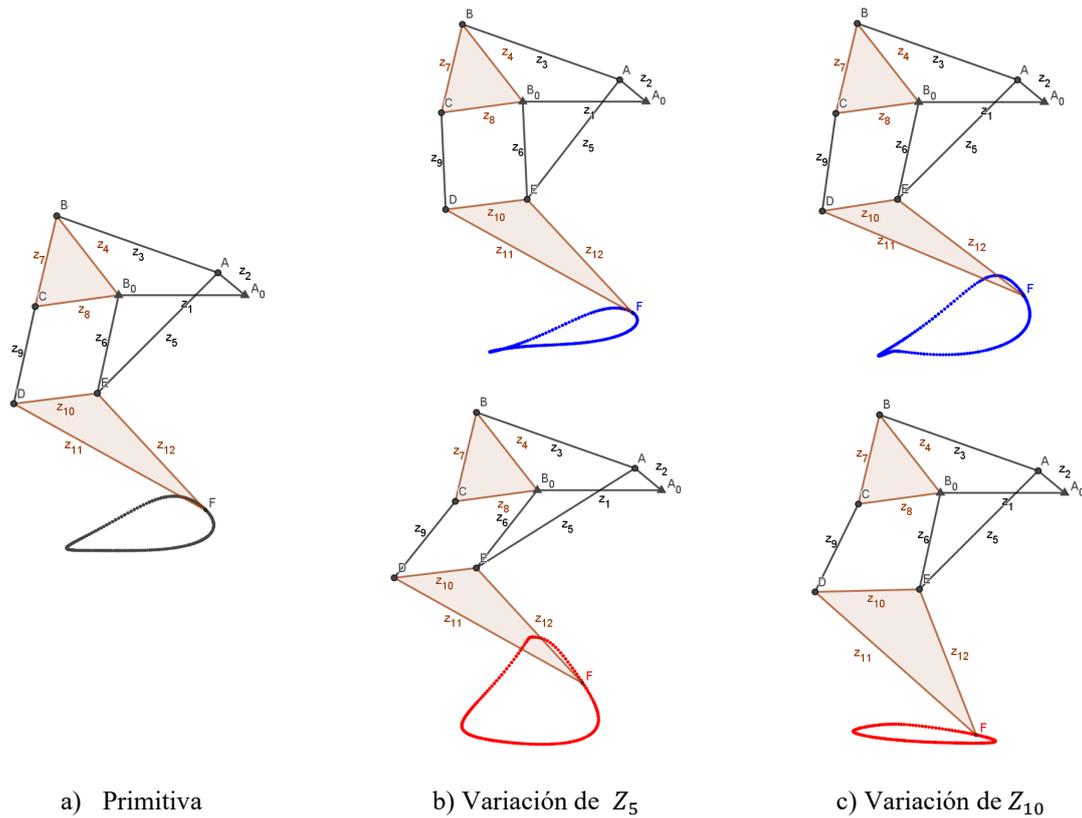


Figura 3: Diferentes huellas del mecanismo en función de las longitudes normalizadas de los eslabones: a) Primitiva, valores referenciados en la Tabla 1; b) Variación de Z_5 : color azul ($Z_5 = 1.233$), color rojo ($Z_5 = 1.513$); c) Variación de Z_{10} : color azul ($Z_{10} = 0.607$), color rojo ($Z_{10} = 0.840$).

En el estudio realizado se llega a la conclusión de que los eslabones Z_5 y Z_{10} son los elegidos, ya que generan los mayores cambios tanto en la longitud como en la altura de la trayectoria del punto F, según se aprecia en la Fig. 3, comparado con la huella obtenida al modificar de forma individual la longitud del resto de eslabones. Para las representaciones se han tomado los valores mínimos y máximos de los eslabones, Z_5 y Z_{10} , que permiten ensamblar el mecanismo.

4. Análisis cinemático del mecanismo por teoría de torses

Los bucles vectoriales de la Figura 2 B-D se formalizan en las siguientes tres ecuaciones:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_3 = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_6 - \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_5 = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{Z}_8 + \mathbf{Z}_9 - \mathbf{Z}_6 - \mathbf{Z}_{10} = 0 \quad (3)$$

que pueden descomponerse en dos ecuaciones a lo largo de los ejes x e y, respectivamente. En la Fig. 2A cada θ_i denota el ángulo desde la dirección positiva del eje x hacia el eslabón i correspondiente. La posición del mecanismo se resuelve en función de θ_2 que corresponde con el ángulo de entrada de la manivela del mecanismo. Una vez conocida la posición de cada eslabón se analiza la velocidad. Este análisis cinemático se realiza mediante la teoría de torses [9] y determina la relación entre el estado de velocidad del efector final Z_{10} y la velocidad angular del eslabón motor Z_2 . Dicha teoría de torses permite definir el movimiento generalizado de un cuerpo rígido con una sola rotación alrededor de una línea recta seguida de una sola traslación paralela a esa línea. Un torsor se define como un tipo particular de campo vectorial, el llamado campo vectorial helicoidal. Se fundamenta en la comprensión de las coordenadas de Plücker que representan una línea en el espacio con seis coordenadas: tres que representan la orientación de la línea, eje del torsor, y tres que representan el denominado momento, con respecto al sistema de referencia fijado en el punto A_0 .

En la Fig. 4 se representan los torses asociados a este análisis como pares cinemáticos del mecanismo plano. El proceso que se lleva a cabo es la descomposición en tres submecanismos: A_0ABB_0 , A_0AEB_0 y B_0CDE (Figura 2). Los cálculos de las velocidades ${}_1\omega_4$ y ${}_1\omega_6$ se realizan como paso intermedio a la obtención de ${}_1\omega_{10}$ para poder calcular las variables cinemáticas del efector final en el punto F.

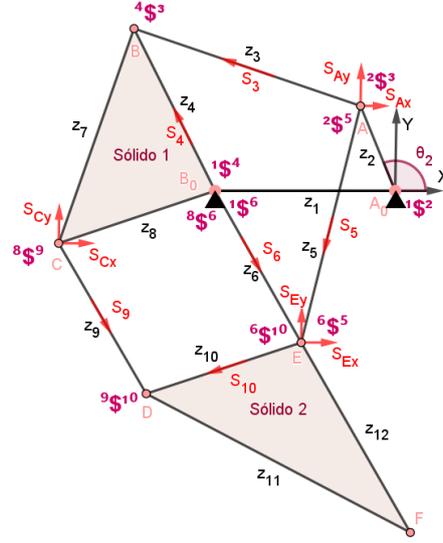


Figura 4: Definición de los torsores y las líneas recíprocas en el mecanismo Jansen.

Según puede observarse en la Figura 3 las uniones entre los distintos eslabones son juntas cinemáticas de revolución. Además, debido a que es un mecanismo plano, las seis coordenadas de Plücker de cada torsor se reducen a tres: una componente para la parte primaria (\hat{k}) y dos componentes para la parte dual (\hat{l}, \hat{j}).

Se define el estado de velocidad ${}^1V_{A_0}^3$ en la cadena cinemática cerrada A_0ABB_0 como

$${}^1V_{A_0}^3 = {}_1\omega_2 \ 1\$^2 + {}_2\omega_3 \ 2\$^3 = {}_1\omega_4 \ 1\$^4 + {}_4\omega_3 \ 4\$^3 \quad (4)$$

y se define la línea recíproca S_3 , dado que la parte primaria de S_3 interseca las partes primarias de $2\3 y $4\3 al aplicar la forma de Klein, $\{^* ; *\}$, entre S_3 y estos torsores da $\{2\$^3 ; S_3\} = \{4\$^3 ; S_3\} = 0$. Con lo cual obtendremos,

$${}_1\omega_4 = \frac{\{1\$^2 ; S_3\}}{\{1\$^4 ; S_3\}} {}_1\omega_2 \quad (5)$$

Se define de esta manera el coeficiente de primer orden

$$G_{{}_1\omega_4} = \frac{\{1\$^2 ; S_3\}}{\{1\$^4 ; S_3\}} \quad (6)$$

y el estado de velocidad ${}^1V_{A_0}^5$ en la segunda cadena cinemática cerrada A_0AEB_0 se establece como

$${}^1V_{A_0}^5 = {}_1\omega_2 \ 1\$^2 + {}_2\omega_5 \ 2\$^5 = {}_1\omega_6 \ 1\$^6 + {}_6\omega_5 \ 6\$^5 \quad (7)$$

Se define la línea recíproca S_5 , de igual manera que en el caso anterior obtendremos

$${}_1\omega_6 = \frac{\{1\$^2 ; S_5\}}{\{1\$^6 ; S_5\}} {}_1\omega_2 \quad (8)$$

Para la resolución de la tercera cadena cinemática cerrada B_0CDE ya conocemos ${}_1\omega_4 = {}_1\omega_8$ y ${}_1\omega_6$, definimos el estado de velocidad ${}^8V_{B_0}^{10}$ como

$${}^8V_{B_0}^{10} = {}_8\omega_6 \ 8\$^6 + {}_6\omega_{10} \ 6\$^{10} \quad (9)$$

Por otro lado, consideramos tres líneas recíprocas S_{E_x}, S_{E_y}, S_9 . Aplicando sistemáticamente la forma de Klein a la ecuación (9) y reduciendo términos obtenemos

$$\{^8V_{B_0}^{10} ; S_{E_x}\} = -z_6 \ 8\omega_6 \ \sin\theta_6; \quad \{^8V_{B_0}^{10} ; S_{E_y}\} = z_6 \ 8\omega_6 \ \cos\theta_6; \quad \{^8V_{B_0}^{10} ; S_9\} = 0 \quad (10)$$

Si se expresan las ecuaciones en forma matricial-vectorial

$$J^T \Delta \ 8V_{B_0}^{10} = \mathbf{q} \quad (11)$$

donde $J = [S_{E_x} \ S_{E_y} \ S_9]$ es la matriz jacobiana del submecanismo; Δ es un operador de polaridad y q se denomina vector conductor de primer orden.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} \{ {}^8V_{B_0}^{10}; S_{E_x} \} \\ \{ {}^8V_{B_0}^{10}; S_{E_y} \} \\ \{ {}^8V_{B_0}^{10}; S_9 \} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Una vez se obtiene ${}_8\omega_{10}$ como la parte primaria de ${}^8V_{B_0}^{10}$, y se obtiene la velocidad del eslabón que contiene el punto F en contacto con el suelo de la siguiente forma, ${}_1\omega_{10} = {}_1\omega_8 + {}_8\omega_{10}$.

Aplicando el mismo procedimiento se puede calcular las velocidades de las articulaciones pasivas ${}_1\omega_3, {}_1\omega_5, {}_1\omega_9$, con sus respectivas líneas recíprocas $S_{A_x}, S_{A_y}, S_4; S_{A_x}, S_{A_y}, S_6; S_{C_x}, S_{C_y}, S_{10}$.

El estudio de la aceleración del mecanismo Jansen consiste en determinar la relación entre la aceleración angular del efector final Z_{10} y la aceleración angular del eslabón motor Z_2 .

A partir de la cadena cinemática cerrada A_0ABB_0 obtenemos el siguiente estado de aceleración

$${}_1\alpha_2 \ 1\$^2 + {}_2\alpha_3 \ 2\$^3 + {}_3\alpha_4 \ 3\$^4 + {}_4\alpha_1 \ 4\$^1 + L_{1234} = 0 \quad (13)$$

En esta ecuación L_{1234} es el torsor de aceleración de Lie, donde los subíndices de L indican los eslabones implicados, que se define como

$$L_{1234} = \begin{bmatrix} {}_1\omega_2 \ 1\$^2 & {}_2\omega_3 \ 2\$^3 + {}_3\omega_4 \ 3\$^4 + {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \\ {}_2\omega_3 \ 2\$^3 & {}_3\omega_4 \ 3\$^4 + {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \\ {}_3\omega_4 \ 3\$^4 & {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_2\omega_3 \ 2\$^3 & {}_3\omega_4 \ 3\$^4 + {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \\ {}_3\omega_4 \ 3\$^4 & {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Del análisis de la velocidad se deduce

$$-{}_1\omega_2 \ 1\$^2 = {}_2\omega_3 \ 2\$^3 + {}_3\omega_4 \ 3\$^4 + {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \quad (15)$$

Por tanto

$$\begin{bmatrix} {}_1\omega_2 \ 1\$^2 & {}_2\omega_3 \ 2\$^3 + {}_3\omega_4 \ 3\$^4 + {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1\omega_2 \ 1\$^2 & -{}_1\omega_2 \ 1\$^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

Entonces

$$L_{1234} = \begin{bmatrix} {}_2\omega_3 \ 2\$^3 & {}_3\omega_4 \ 3\$^4 + {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \\ {}_3\omega_4 \ 3\$^4 & {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}_3\omega_4 \ 3\$^4 & {}_4\omega_1 \ 4\$^1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Para calcular la aceleración del eslabón conducido se aplica la forma de Klein de S_3 a ambos lados de la ecuación (17), teniendo en cuenta que S_3 es recíproca a $2\$^3, 3\$^4, \{2\$^3; S_3\} = \{3\$^4; S_3\} = 0$, y se obtiene

$${}_1\alpha_2 \ 1\$^2 + {}_4\alpha_1 \ 4\$^1 + L_{1234} = 0 \quad (18)$$

donde aplicando la forma de Klein, se transforma en la siguiente ecuación

$${}_1\alpha_2 \ {1\$^2; S_3} + {}_4\alpha_1 \ {4\$^1; S_3} + \{L_{1234}; S_3\} = 0 \quad (19)$$

que finalmente despejando la variable obtenemos

$${}_1\alpha_4 = \frac{{}_1\alpha_2 \ {1\$^2; S_3} + \{L_{1234}; S_3\}}{\{4\$^1; S_3\}} \quad (20)$$

A partir de la cadena cinemática cerrada A_0AEB_0 , procediendo de la misma manera que en la cadena A_0ABB_0 , calculando L_{1256} y puesto que la línea S_5 es recíproca a $2\5 y $5\6 , se obtiene el siguiente resultado

$${}_1\alpha_6 = \frac{{}_1\alpha_2 \ {1\$^2; S_5} + \{L_{1256}; S_5\}}{\{6\$^1; S_5\}} \quad (21)$$

De esta manera tenemos las variables de entrada para la tercera cadena cinemática cerrada B_0CDE , donde ejecutando el mismo razonamiento, calculando L_{89106} y con la línea S_9 recíproca a $8\9 y $9\10 , resulta

$${}_6\alpha_{10} = \frac{{}_6\alpha_8 \ {6\$^8; S_9} + \{L_{89106}; S_9\}}{\{6\$^{10}; S_9\}} \quad (22)$$

Donde obtendremos la aceleración angular del efector final ${}_1\alpha_{10}$ despejándola de la siguiente expresión

$${}_6\alpha_{10} = {}_6\alpha_1 + {}_1\alpha_{10} + {}_1\omega_{10} \times {}_6\omega_1 \tag{23}$$

siendo el producto de las velocidades angulares nulo al ser un caso de movimiento en dos dimensiones.

5. Resultados y discusión

Los parámetros geométricos del mecanismo en el ejemplo numérico estudiado quedan reflejados en la Tabla 1. A continuación se muestran gráficamente los resultados obtenidos en la geometría de la huella y los parámetros cinemáticos, velocidades y aceleraciones.

En la Fig. 5 se aprecia la evolución de la geometría de la huella conforme aumenta la longitud de los eslabones estudiados, Z_5 y Z_{10} .

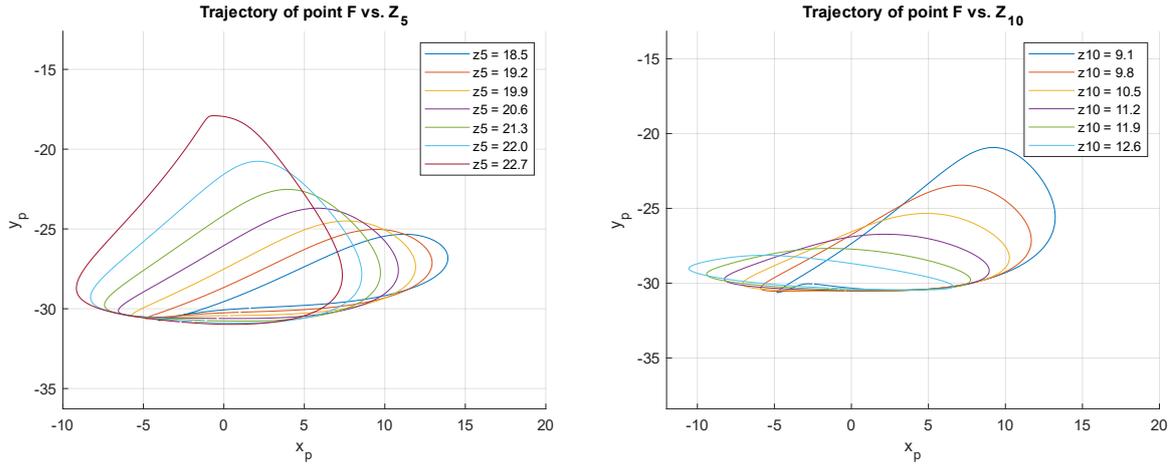


Figura 5: Geometría de la huella en función de la longitud de los eslabones estudiados. Izqda.: Eslabón Z_5 (cm). Dcha.: Eslabón Z_{10} (cm).

Respecto al primer eslabón estudiado, Z_5 , la longitud del eslabón puede variar en el intervalo [18.5, 22.7] (cm). El resultado obtenido indica que conforme la longitud del eslabón Z_5 aumenta, la altura de la huella también aumenta pasando de 5 a 14 cm, aproximadamente, mientras que la longitud disminuye en menor medida. El incremento de la longitud de la barra Z_5 es claramente beneficioso para poder evitar obstáculos, piedras o subir escaleras.

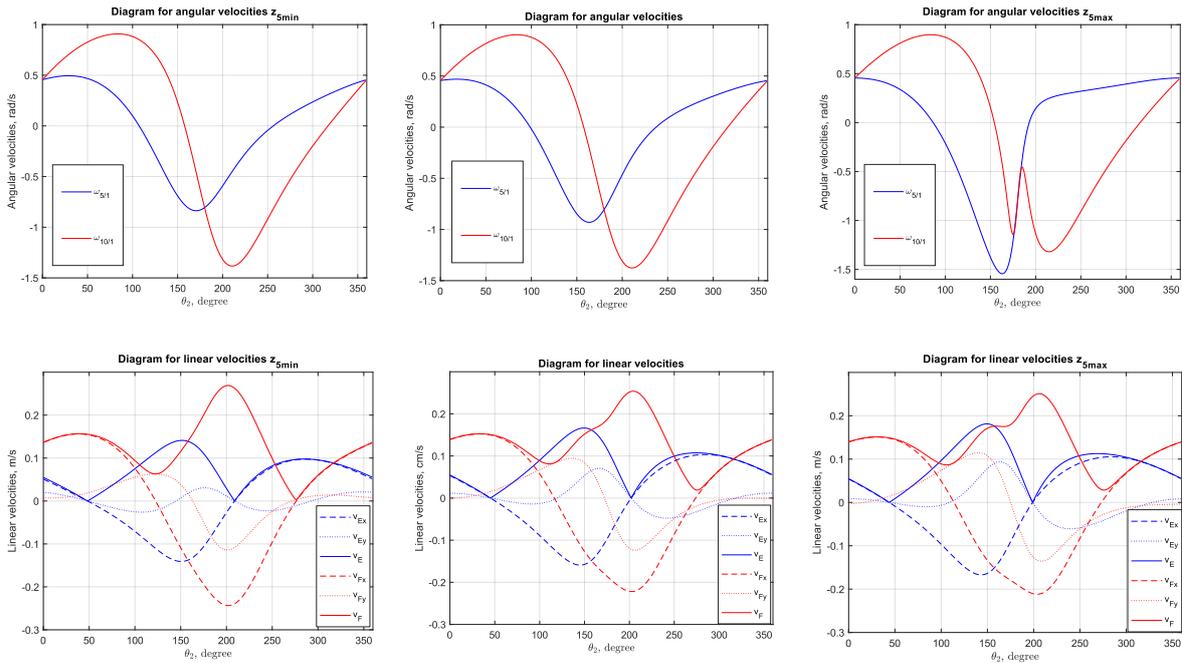


Figura 6: Análisis cinemático de primer orden de mecanismo Jansen para Z_5 variable

En cuanto al segundo eslabón analizado, Z_{10} , su longitud puede oscilar entre 9.1 y 12.6 cm. Los resultados obtenidos indican que, a medida que la longitud del eslabón Z_{10} aumenta, la altura de la huella disminuye dramáticamente de unos 10 cm a alrededor de los 3 cm, mientras que su longitud experimenta un leve incremento. Por tanto, disminuir la longitud de la barra Z_{10} podría ser ventajoso para sortear obstáculos o subir escaleras con mayor facilidad.

Las Figuras 6 y 7 reflejan los resultados obtenidos en el análisis cinemático de primer orden para la variación de la longitud del eslabón Z_5 y Z_{10} , respectivamente, entre su valor mínimo (izquierda) y máximo (derecha). La gráfica central se corresponde con los valores referenciados en la Tabla 1. En ambas figuras se representan las velocidades angulares de las barras 5 y 10 en función de la variable θ_2 para un valor $\omega_2 = 120^\circ/s$, así como la velocidad del punto E y F.

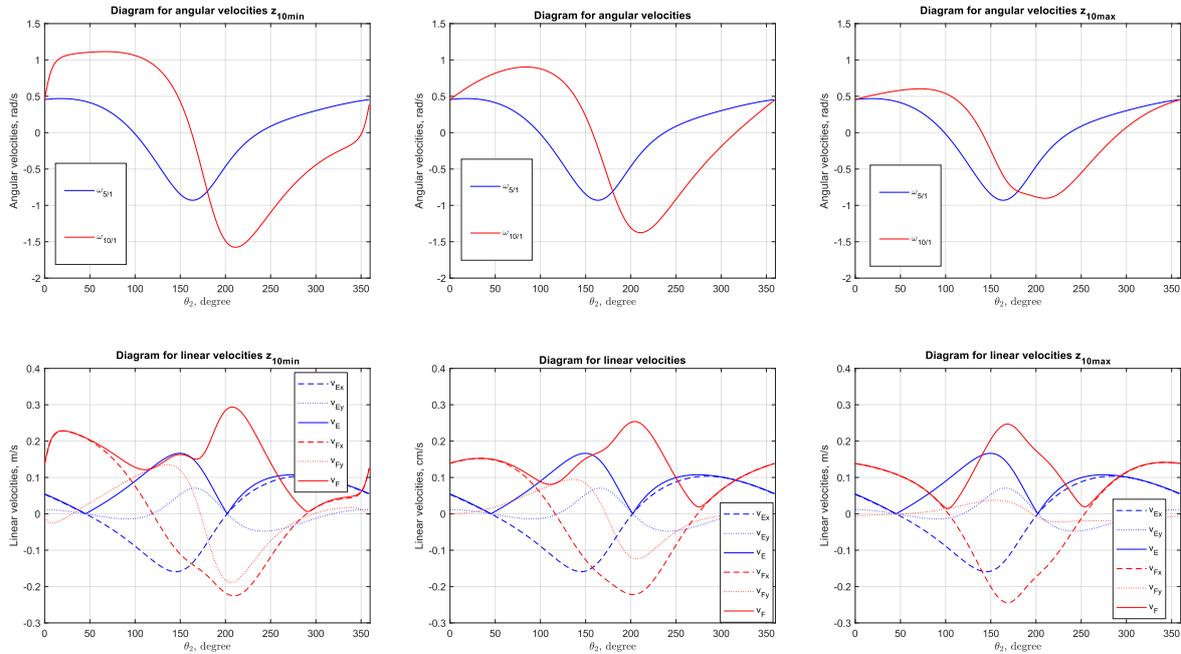


Figura 7: Análisis cinemático de primer orden de mecanismo Jansen para Z_{10} variable

Las Figuras 8 y 9 muestran los resultados del análisis cinemático de segundo orden para distintos valores de la longitud del eslabón Z_5 y Z_{10} , desde su mínimo (izquierda) hasta su máximo (derecha). La gráfica central representa los valores especificados en la Tabla 1.

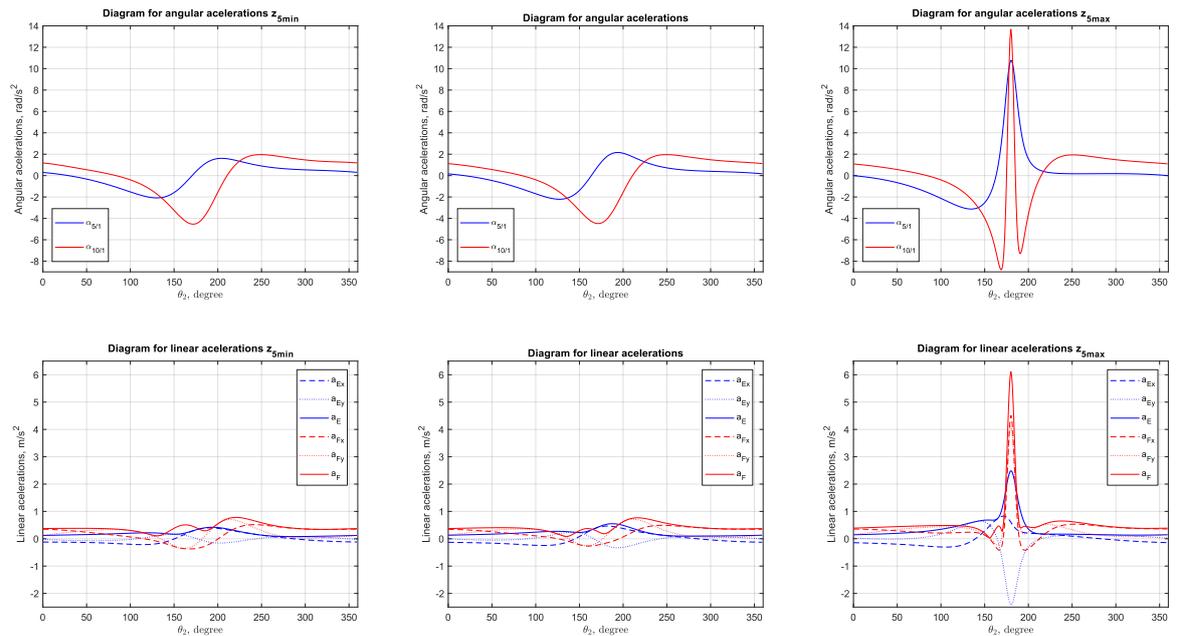


Figura 8: Análisis cinemático de segundo orden de mecanismo Jansen para Z_5 variable.

Se observa que las fluctuaciones en las variables cinemáticas, velocidad y aceleración, van aumentando a medida que aumenta la altura de la huella o trayectoria del punto F. En el caso del eslabón Z_5 se corresponde con su máxima longitud y para Z_{10} con su longitud límite mínima, como puede apreciarse en la Fig. 5.

Esto nos indica que el límite superior y límite inferior de las longitudes de los eslabones Z_5 (Fig. 3b rojo) y Z_{10} (Fig. 3c azul), respectivamente, aunque son geoméricamente factibles, nos generan tal variación en la velocidad y aceleración de las barras 5 y 10 que es mejor no alcanzar.

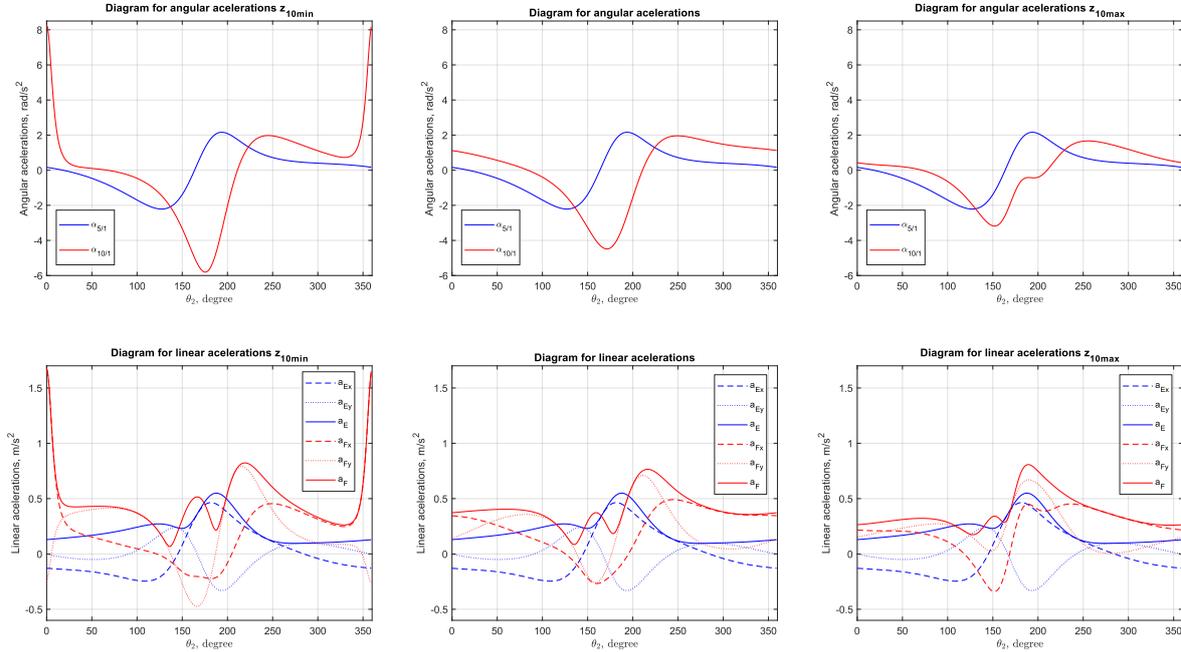


Figura 9: Análisis cinemático de segundo orden de mecanismo Jansen para Z_{10} variable.

6. Conclusiones

En este trabajo se presenta la reconfiguración de un mecanismo de Jansen cuya aplicación es adaptar su uso a superficies o terrenos de orografía complicada. Para ello se modifica la longitud de dos de los eslabones constituyentes del mecanismo de forma independiente y se ve la influencia en la trayectoria del punto de contacto con el suelo.

El estudio de la pata del mecanismo andador se ha realizado llevando a cabo tanto el análisis de posición como el análisis cinemático de primer y segundo orden, y como novedad, siendo realizado el análisis cinemático a cabo aplicando la teoría de tórsos 2D. Se ha comprobado que se alcanza el mismo resultado numérico que utilizando el método clásico, validando la aplicación de la teoría de tórsos. Además, se demuestra que la teoría de tórsos 2D resultó ser un método intuitivo basado en la geometría y de fácil aplicación. La teoría de tórsos ha resultado ser una herramienta de análisis fácil de implementar matemáticamente. Una vez obtenidos los tórsos de cada una de las articulaciones por inspección visual, la obtención de las velocidades y aceleraciones del sistema fue inmediata.

7. Referencias

- [1] C. Liang, M. Ceccarelli, and Y. Takeda, "Operation analysis of a Chebyshev-Pantograph leg mechanism for a single DOF biped robot," *Frontiers of Mechanical Engineering*, vol. 7, pp. 357-370, 2012.
- [2] D. Fedorov, and L. Birglen, "Analysis and design of a two degree of freedom Hoeckens-pantograph leg mechanism." p. V05BT08A079.
- [3] H. Kim, J. Choi, T. Seo, and K. Jeong, "Optimal Design of Klann-based walking Mechanism for Water-running Robots." pp. 559-564.
- [4] A. Aan, and M. Heinloo, "Analysis and synthesis of the walking linkage of Theo Jansen with a flywheel," 2014.
- [5] L. Patnaik, and L. Umanand, "Kinematics and dynamics of Jansen leg mechanism: A bond graph approach," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 60, pp. 160-169, 2016.

- [6] S. Nansai, N. Rojas, M. R. Elara, R. Sosa, and M. Iwase, "On a Jansen leg with multiple gait patterns for reconfigurable walking platforms," *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 7, no. 3, pp. 1687814015573824, 2015.
- [7] D. Giesbrecht, "Design and optimization of a one-degree-of-freedom eight-bar leg mechanism for a walking machine," 2010.
- [8] R. S. Ball, *A Treatise on the Theory of Screws*: Cambridge university press, 1998.
- [9] J. Gallardo-Alvarado, "The Klann mechanism: kinematic analysis and force balancing," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 46, no. 5, pp. 293, 2024.