



Cálculo de la eficiencia en actuadores rotatorios de engranajes mediante el análisis teórico y computacional

Ignacio González Pérez¹, Alfonso Fuentes Aznar²

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica, Mat. y Fab., Universidad Politécnica de Cartagena, ignacio.gonzalez@upct.es

² Department of Mechanical Engineering, Rochester Institute of Technology, afeme@rit.edu

Hoy en día se está produciendo una transición hacia la electrificación en diversos sectores del transporte, fruto de un desarrollo en la tecnología de los motores eléctricos y en los sistemas de almacenamiento de energía eléctrica. Esto ha llevado a la necesidad de aplicar transmisiones mecánicas con elevada relación de transmisión, muy compactas y eficientes. Los actuadores rotatorios basados en engranajes son transmisiones epicicloidales donde se prescinde del brazo porta-satélites con el fin de conseguir una transmisión mecánica muy compacta y con una elevada relación de transmisión, encontrando aplicación en sistemas de actuación en aeronaves. La búsqueda de diseños factibles de este tipo de transmisiones supone un reto por las numerosas condiciones de diseño y montaje, y precisa de poder evaluar los mismos a través de diversas variables, entre las que se encuentra la eficiencia, para comparar las distintas soluciones entre sí. El presente trabajo presenta dos métodos, uno teórico y otro computacional, para evaluar la eficiencia en dichos actuadores y en particular en los de tipo de bisagra pivotante central con gran aplicación en el sector aeronáutico. Los resultados muestran una buena aproximación entre ambos métodos, así como con otros métodos existentes en la literatura especializada. Además de la eficiencia media, el método computacional, basado en la aplicación del método de los elementos finitos, permite evaluar la eficiencia a lo largo del ciclo de engrane, así como otras variables como la amplitud de la función de errores de transmisión bajo carga. Los resultados muestran una fluctuación mucho menor de la eficiencia y de los errores de transmisión bajo carga en las soluciones asíncronas (aquellas con planetas en diferentes fases del ciclo de engrane) que en las soluciones síncronas, siendo las primeras objeto de la recomendación propuesta para el diseño de este tipo de transmisiones mecánicas.

1. Introducción

Hoy en día se está produciendo una electrificación creciente en los sectores de la automoción y aeronáutico fruto de una tecnología en desarrollo de los motores eléctricos y de los sistemas de almacenamiento de energía. Este cambio en el tipo de fuente motor ha llevado a la necesidad de transmisiones mecánicas con mayores reducciones de velocidad, mejoras en su eficiencia y sistemas más compactos [1].

Los actuadores rotatorios basados en engranajes o GRAs por sus siglas en inglés, “Geared Rotary Actuators”, son transmisiones epicicloidales con una elevada relación de transmisión en las que se prescinde del brazo porta-satélites gracias al ajuste preciso de sus componentes, consiguiendo un tipo de transmisión mecánica muy compacta.

Entre los diferentes tipos de GRA, el tipo con función de bisagra pivotante central es uno de los más utilizados y se presenta como alternativa en sistemas de baja criticidad como en la apertura y cierre de puertas de aeronaves y más adelante en sistemas más críticos como en los mecanismos de control de vuelo [2], con lo que se produciría una reducción importante del peso de la aeronave al sustituir a los actuales sistemas hidráulicos.

La Figura 1 muestra un GRA típico con dos etapas de reducción. Por un lado, el movimiento entra por el eje del planeta, el cual engrana con los satélites centrales y éstos a su vez con la corona móvil por donde sale el movimiento. Cada satélite central se encuentra unido rigidamente con dos satélites laterales a través del eje de satélites. Los satélites laterales engranan con dos coronas laterales que están fijas a la carcasa de la transmisión mecánica, desempeñando dichas coronas una función como punto de apoyo de palanca. Por otro lado, los ejes de los satélites se mantienen a la distancia requerida del eje del planeta, a_w , mediante dos anillos rígidos y flotantes, evitando de esta manera la existencia de un brazo porta-satélites. Estos anillos flotantes son además fundamentales para conseguir el equilibrio de fuerzas tangenciales en cada uno de los ejes de los satélites y anular las componentes radiales de las fuerzas.

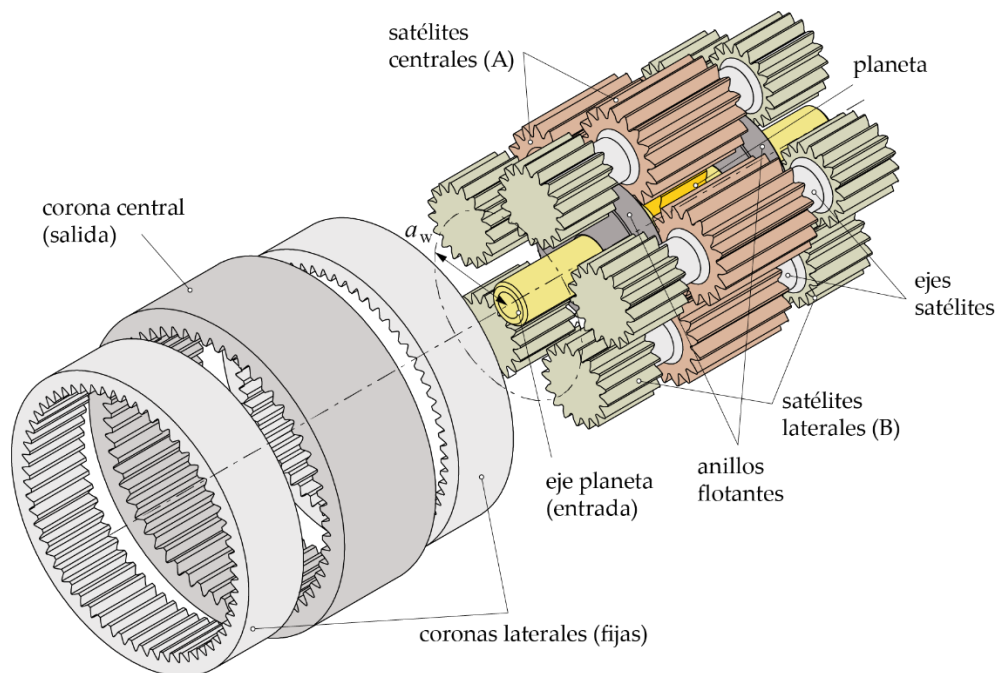


Figura 1: Ejemplo de GRA con función de bisagra pivotante central formado por cinco ejes de satélites (las coronas se han desplazado de su posición original para una mejor visualización de todos sus componentes).

El estudio del montaje de estos sistemas y la búsqueda de posibles soluciones para una relación de transmisión objetivo y un par y velocidad de giro de entrada dados supone un reto que ha sido abordado por los autores de este trabajo. La búsqueda de soluciones requiere por un lado de estrategias de diseño que tengan en cuenta todas las condiciones de diseño de estas transmisiones [3,4], entre las que se encuentran las condiciones de montaje, y por otro lado de la evaluación de distintas variables que permitan comparar cada una de dichas soluciones.

Entre las variables que permiten juzgar la bondad de una solución frente a otra se encuentra la eficiencia de la transmisión mecánica. El presente trabajo presenta un método teórico para determinar la eficiencia media de un GRA con función de bisagra pivotante central para ambas direcciones de transmisión, como reductora y como multiplicadora, a partir de las eficiencias medias de las parejas de engrane. El método teórico es además comparado con otros métodos presentes en la bibliografía [2,5] y es corroborado mediante un procedimiento computacional basado en los resultados del análisis de un modelo de elementos finitos 2D desarrollado para el análisis del GRA y que asume la existencia de un coeficiente de fricción medio.

Por otro lado, la convergencia de los análisis con el modelo de elementos finitos 2D puede suponer un problema debido a que la holgura circunferencial en este tipo de transmisiones puede requerir un giro considerable del planeta para que todas las superficies activas de los dientes entren en contacto. Se ha derivado igualmente una expresión analítica para determinar el giro inicial del planeta a partir de las holguras circunferenciales entre parejas de engrane y evitar de esta manera los problemas de convergencia del análisis por el método de los elementos finitos. En cualquier caso y con el fin de facilitar el proceso de convergencia, el análisis por el método de los elementos finitos se compone de tres fases: (i) aplicación de precarga (mediante el giro del planeta), (ii) aplicación de precarga y par torsor en el planeta, y (iii) aplicación de precarga y giro de la corona de salida mientras se mantiene aplicado el par torsor en el planeta. Antes de llegar a una fase es necesario haber tenido éxito de convergencia en la fase anterior.

Se presentan varios ejemplos donde el análisis computacional a partir de los resultados del análisis por el método de los elementos finitos permite la obtención de la eficiencia a lo largo del engrane y no sólo la eficiencia media de la solución analítica.

2. Cálculo teórico de la eficiencia en un GRA como reductor

La Figura 2 muestra el esquema cinemático de un GRA con función de bisagra pivotante central. Se observan dos partes o etapas: la etapa *A* formada por el planeta *p*, el satélite *sA* y la corona *cA*, y la etapa *B* formada por el satélite *sB* y la corona *cB*, estando esta última fija. Se observa además que el brazo porta-satélites *c*, aunque físicamente no existe, cinemáticamente cumple su función.

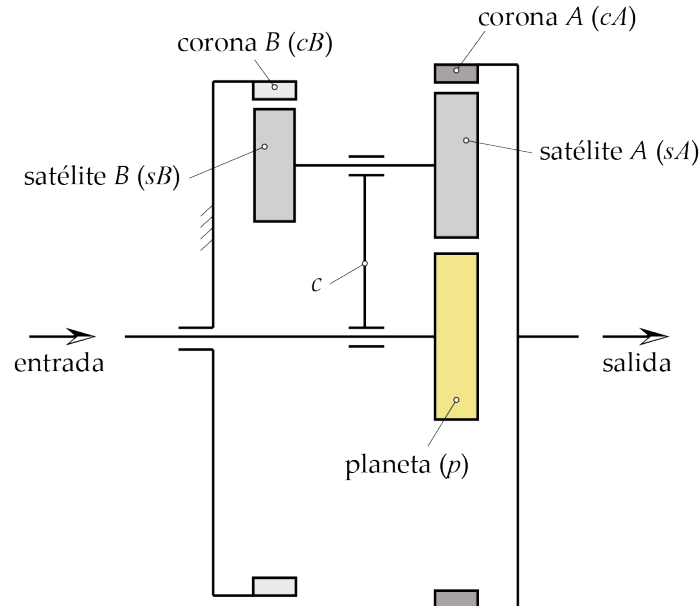


Figura 2: Esquema cinemático de un GRA con función de bisagra pivotante central (como reductor).

La aplicación de la fórmula de Willis [6] a dicho tren epicycloidal permite obtener la relación de transmisión del tren:

$$R = \frac{\omega_p}{\omega_{cA}} = \frac{1 + \frac{Z_{sA}Z_{cB}}{Z_{sB}Z_p}}{1 - \frac{Z_{sA}Z_{cB}}{Z_{sB}Z_{cA}}} \quad (1)$$

donde los símbolos ω y Z hacen referencia a velocidad angular y número de dientes, respectivamente, de los engranajes, utilizándose los subíndices *p*, *sA*, *sB*, *cA* y *cB* para cada uno de los engranajes según se indica entre paréntesis en la Figura 2.

Con el fin de facilitar el cálculo de la eficiencia de forma analítica, es preciso desacoplar el tren en dos trenes más simples. La Figura 3 muestra la descomposición de dicho tren en *I* y *II*. El tren *I* tiene el movimiento de entrada por el planeta *p* y la salida por el brazo porta-satélites *c* mientras que el tren *II* tiene el movimiento de entrada por el brazo *c* y la salida por la corona *cA*.

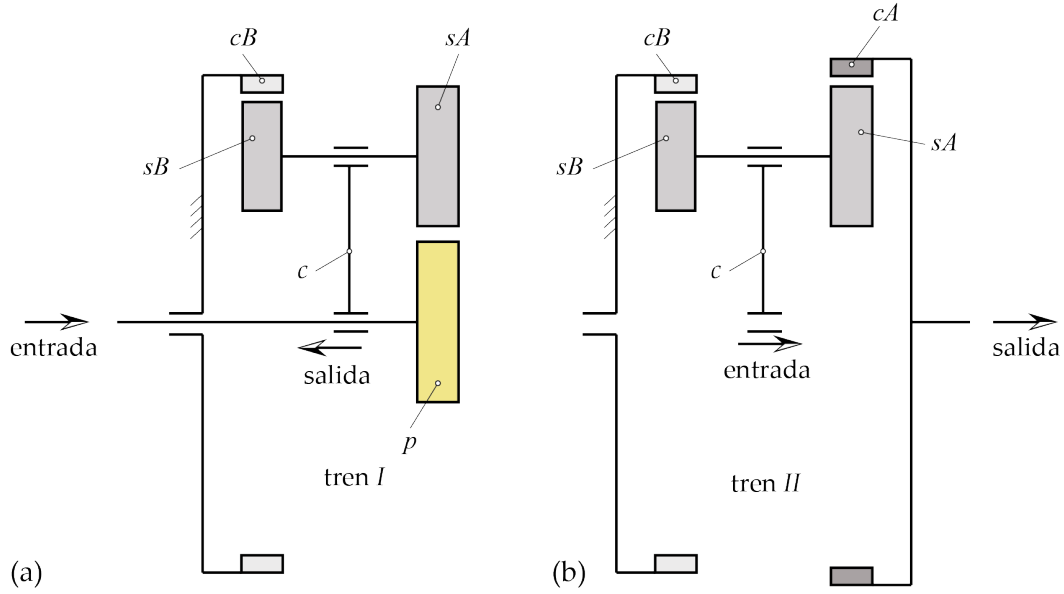


Figura 3: Esquema cinemático de los trenes I (a) y II (b) de un GRA (como reductor).

La aplicación de la fórmula de Willis a cada uno de los trenes proporciona las relaciones de transmisión de cada uno de ellos:

$$R_I = \frac{\omega_p}{\omega_c} = 1 + \frac{Z_{cB}Z_{sA}}{Z_pZ_{sB}} \quad (2)$$

$$R_{II} = \frac{\omega_c}{\omega_{cA}} = \frac{1}{1 - \frac{Z_{cB}Z_{sA}}{Z_{cA}Z_{sB}}} \quad (3)$$

El desacople del tren de la Figura 2 en los dos trenes de la Figura 3 es correcto dado que se cumple $R=R_I R_{II}$. Para el cálculo de la eficiencia en cada uno de los trenes I y II se aplica el procedimiento general expuesto en [7] de cálculo de la eficiencia en trenes epicicloidales.

2.1. Eficiencia del tren I (como reductor)

La eficiencia del tren I (véase la Figura 3a) con el engranaje p conduciendo a c con cB fijo se obtendría como

$$\eta_{p,c}^{(cB)} = \frac{T_p \omega_p - P_{perdidas}}{T_p \omega_p} \quad (4)$$

donde T_p es el par aplicado al planeta y ω_p es su velocidad angular. Aquí se asume que $T_p \omega_p > 0$ con $T_p > 0$ y $\omega_p > 0$. La potencia de pérdidas mecánicas $P_{perdidas}$ se asume que es la misma que la del tren ordinario equivalente con p conduciendo a cB con c fijo. Como $\omega_p > \omega_c > 0$ (véase la Ecuación (2)), resulta entonces que $T_p(\omega_p - \omega_c) > 0$ es potencia de entrada en el tren ordinario equivalente. Por tanto, la eficiencia en el tren ordinario equivalente se obtendría como

$$\eta_{p,cB}^{(c)} = \frac{T_p(\omega_p - \omega_c) - P_{perdidas}}{T_p(\omega_p - \omega_c)} \quad (5)$$

Por otro lado, asumiendo que $\eta_{p,cB}^{(c)} = \eta_{p,sA} \cdot \eta_{sB,cB}$ (producto de las eficiencias de p conduciendo a sA y de sB conduciendo a cB) y que las eficiencias $\eta_{p,sA}$ y $\eta_{sB,cB}$ son conocidas, se puede obtener la potencia de pérdidas mecánicas de la Ecuación (5) y sustituir su valor en la Ecuación (4). Finalmente, el rendimiento del tren I se obtiene como

$$\eta_{p,c}^{(cB)} = \frac{T_p \omega_p - T_p(\omega_p - \omega_c)(1 - \eta_{p,sA} \eta_{sB,cB})}{T_p \omega_p} \quad (6)$$

Sustituyendo en la Ecuación (6) la relación de transmisión dada por la Ecuación (2), se llega a

$$\eta_{p,c}^{(cB)} = 1 - \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{Z_{cB}Z_{sA}}{Z_pZ_{sB}}} \right] (1 - \eta_{p,sA} \eta_{sB,cB}) \quad (7)$$

2.2. Eficiencia del tren II (como reductor)

La eficiencia del tren II (véase la Figura 3b) con c conduciendo a cA con cB fijo se obtendría como

$$\eta_{c,CA}^{(cB)} = \frac{-T_{cA}\omega_{cA}}{-T_{cA}\omega_{cA} + P_{perdidas}} \quad (8)$$

dato que $T_{cA}\omega_{cA} < 0$ es potencia de salida del tren epicicloidal II. En este momento es preciso distinguir dos casos atendiendo a las variables que aparecen en la relación R_{II} de la Ecuación (3).

Caso 1: $Z_{cA}Z_{sB} > Z_{cB}Z_{sA}$. En este caso, $T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c) > 0$ y será potencia de entrada del tren ordinario equivalente, por lo que

$$\eta_{cA,cB}^{(c)} = \frac{T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c) - P_{perdidas}}{T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c)} \quad (9)$$

Asumiendo que $\eta_{cA,cB}^{(c)} = \eta_{cA,sA} \cdot \eta_{sB,cB}$ es conocido, se puede obtener la potencia de pérdidas de la Ecuación (9) y sustituir en la Ecuación (8):

$$\eta_{c,CA}^{(cB)} = \frac{-T_{cA}\omega_{cA}}{-T_{cA}\omega_{cA} + T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c)(1 - \eta_{cA,sA}\eta_{sB,cB})} \quad (10)$$

Sustituyendo en la Ecuación (10) la relación de transmisión dada por la Ecuación (3), se llega a

$$\eta_{c,CA}^{(cB)} = \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{1}{\frac{Z_{cB}Z_{sA}}{1 - \frac{Z_{cB}Z_{sA}}{Z_{cA}Z_{sB}}}} \right] (1 - \eta_{cA,sA}\eta_{sB,cB})} \quad (11)$$

Caso 2: $Z_{cA}Z_{sB} < Z_{cB}Z_{sA}$. En este caso, $T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c) < 0$ y será potencia de salida del tren ordinario equivalente, por lo que

$$\eta_{cB,CA}^{(c)} = \frac{-T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c)}{-T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c) + P_{perdidas}} \quad (12)$$

Asumiendo que $\eta_{cB,CA}^{(c)} = \eta_{cB,sB} \cdot \eta_{sA,CA}$ es conocido, se puede obtener la potencia de pérdidas de la Ecuación (12) y sustituir en la Ecuación (8):

$$\eta_{c,CA}^{(cB)} = \frac{-T_{cA}\omega_{cA}}{-T_{cA}\omega_{cA} + T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c) \left[1 - \frac{1}{\eta_{cB,sB}\eta_{sA,CA}} \right]} \quad (13)$$

Sustituyendo en la Ecuación (13) la relación de transmisión dada por la Ecuación (3), se llega a

$$\eta_{c,CA}^{(cB)} = \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{1}{\frac{Z_{cB}Z_{sA}}{1 - \frac{Z_{cB}Z_{sA}}{Z_{cA}Z_{sB}}}} \right] \left[1 - \frac{1}{\eta_{cB,sB}\eta_{sA,CA}} \right]} \quad (14)$$

2.3. Eficiencia teórica del GRA como reductor

Finalmente, la eficiencia del tren mostrado en la Figura 2 se obtiene como producto de las relaciones mostradas en la Ecuación (7) y, o bien en la Ecuación (11) para el Caso 1, o bien en la Ecuación (14) para el Caso 2.

$$\eta_{p,CA}^{(cB)} = \eta_{p,c}^{(cB)} \eta_{c,CA}^{(cB)} \quad (15)$$

3. Cálculo teórico de la eficiencia de un GRA como multiplicador

La Figura 4 muestra el desacople de un GRA como multiplicador de velocidad donde el movimiento entra por la corona cA y sale por el planeta p . El desacople da lugar a las mismas relaciones de transmisión mostradas en las Ecuaciones (2) y (3).

3.1. Eficiencia del tren I (como multiplicador)

La eficiencia del tren I con c conduciendo a p con cB fijo (véase la Figura 4b) se obtendría como

$$\eta_{c,p}^{(cB)} = \frac{-T_p\omega_p}{-T_p\omega_p + P_{perdidas}} \quad (16)$$

dato que $T_p\omega_p < 0$ se considera potencia de salida del tren I.

Como tanto si se está en el Caso 1 (R positiva) o en el Caso 2 (R negativa) comentados en el Apartado 2.2, se asume $\omega_{cA} > 0$ y resulta $|\omega_p| > |\omega_c|$ con $T_p < 0$ en el Caso 1 y $T_p > 0$ en el Caso 2, se tendrá entonces que $T_p(\omega_p - \omega_c) < 0$ es potencia de salida del tren ordinario equivalente independientemente del Caso 1 o 2. La eficiencia del tren ordinario equivalente del tren I vendrá dada entonces como

$$\eta_{cB,p}^{(c)} = \frac{-T_p(\omega_p - \omega_c)}{-T_p(\omega_p - \omega_c) + P_{perdidas}} \quad (17)$$

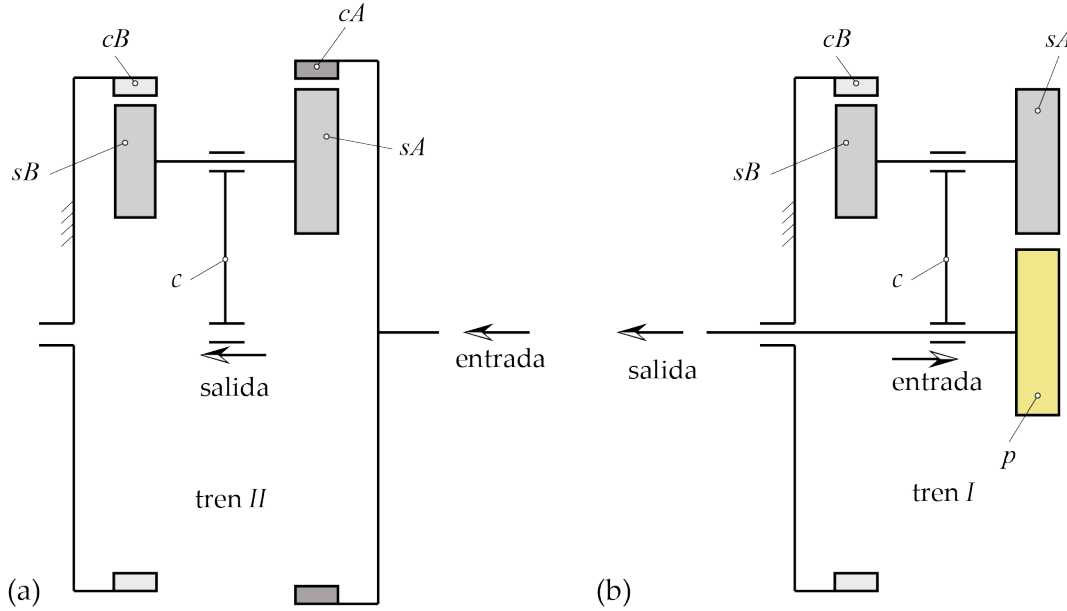


Figura 4: Esquema cinemático de los trenes II (a) y I (b) de un GRA (como multiplicador).

Assumiendo que $\eta_{c,p}^{(c)} = \eta_{cB,sB} \cdot \eta_{sA,p}$ es conocido, entonces las pérdidas mecánicas se pueden despejar de la Ecuación (17) y sustituir en la Ecuación (16)

$$\eta_{c,p}^{(c)} = \frac{-T_p \omega_p}{-T_p \omega_p + T_p (\omega_p - \omega_c) \left[1 - \frac{1}{\eta_{cB,sB} \eta_{sA,p}} \right]} \quad (18)$$

Sustituyendo en la Ecuación (18) la relación de transmisión de la Ecuación (2) se llega finalmente a

$$\eta_{c,p}^{(c)} = \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{Z_{cB} Z_{sA}}{Z_p Z_{sB}}} \right] \left[1 - \frac{1}{\eta_{cB,sB} \eta_{sA,p}} \right]} \quad (19)$$

3.2. Eficiencia del tren II (como multiplicador)

La eficiencia del tren II con cA conduciendo a c con cB fijo (véase la Figura 4a) se obtendría como

$$\eta_{cA,c}^{(c)} = \frac{T_{cA} \omega_{cA} - P_{perdidas}}{T_{cA} \omega_{cA}} \quad (20)$$

donde se asume que $T_{cA} \omega_{cA} > 0$ es potencia de entrada al tren II con $T_{cA} > 0$ y $\omega_{cA} > 0$. De nuevo es necesario distinguir dos casos de acuerdo con las relaciones entre las variables que aparecen en la relación R_{II} de la Ecuación (3).

Caso 1: $Z_{cA} Z_{sB} > Z_{cB} Z_{sA}$. En este caso, $T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c) < 0$ será potencia de salida del tren ordinario equivalente, por lo que

$$\eta_{cA,cB}^{(c)} = \frac{-T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c)}{-T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c) + P_{perdidas}} \quad (21)$$

Assumiendo que $\eta_{cA,cB}^{(c)} = \eta_{cA,sA} \cdot \eta_{sB,cB}$ es conocido, se puede obtener la potencia de pérdidas de la Ecuación (21) y sustituir en la Ecuación (20).

$$\eta_{cA,c}^{(c)} = \frac{T_{cA} \omega_{cA} - T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c) \left[1 - \frac{1}{\eta_{cA,sA} \eta_{sB,cB}} \right]}{T_{cA} \omega_{cA}} \quad (22)$$

Sustituyendo en la Ecuación (22) la relación entre variables de la Ecuación (3) se llega finalmente a

$$\eta_{cA,c}^{(c)} = 1 - \left[1 - \frac{1}{1 - \frac{Z_{cB} Z_{sA}}{Z_{cA} Z_{sB}}} \right] \left[1 - \frac{1}{\eta_{cA,sA} \eta_{sB,cB}} \right] \quad (23)$$

Caso 2: $Z_{cA} Z_{sB} < Z_{cB} Z_{sA}$. En este caso, $T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c) > 0$ será potencia de entrada del tren ordinario equivalente, por lo que

$$\eta_{cA,cB}^{(c)} = \frac{T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c) - P_{perdidas}}{T_{cA} (\omega_{cA} - \omega_c)} \quad (24)$$

Asumiendo que $\eta_{cA,cB}^{(c)} = \eta_{cA,sA} \cdot \eta_{sB,cB}$ es conocido, se puede obtener la potencia de pérdidas de la Ecuación (24) y sustituir en la Ecuación (20).

$$\eta_{cA,c}^{(cB)} = \frac{T_{cA}\omega_{cA} - T_{cA}(\omega_{cA} - \omega_c)(1 - \eta_{cA,sA}\eta_{sB,cB})}{T_{cA}\omega_{cA}} \quad (25)$$

Sustituyendo en la Ecuación (25) la relación entre variables de la Ecuación (3) se llega finalmente a

$$\eta_{cA,c}^{(cB)} = 1 - \left[1 - \frac{1}{\frac{z_{cB}z_{sA}}{1 - \frac{z_{cB}z_{sA}}{z_{cA}z_{sB}}}} \right] (1 - \eta_{cA,sA}\eta_{sB,cB}) \quad (26)$$

3.3. Eficiencia teórica del GRA como multiplicador

Finalmente, la eficiencia del tren mostrado en la Figura 4 se obtiene como producto de las relaciones mostradas en la Ecuación (19) y, o bien en la Ecuación (23) para el Caso 1, o bien en la Ecuación (26) para el Caso 2.

$$\eta_{cA,p}^{(cB)} = \eta_{c,p}^{(cB)} \eta_{cA,c}^{(cB)} \quad (27)$$

4. Cálculo computacional de la eficiencia mediante el método de los elementos finitos

El análisis computacional de la eficiencia requiere la implementación de un modelo de elementos finitos 2D del GRA completo. Dicho modelo tiene en cuenta la deformación de las superficies de contacto bajo carga y la debida a la flexión de los dientes, considerando de esta manera el reparto real de carga entre los distintos engranajes satélite. Se trata de un modelo que incluye la fricción entre las superficies de contacto mediante la consideración de un coeficiente de fricción medio y estimado para el GRA completo.

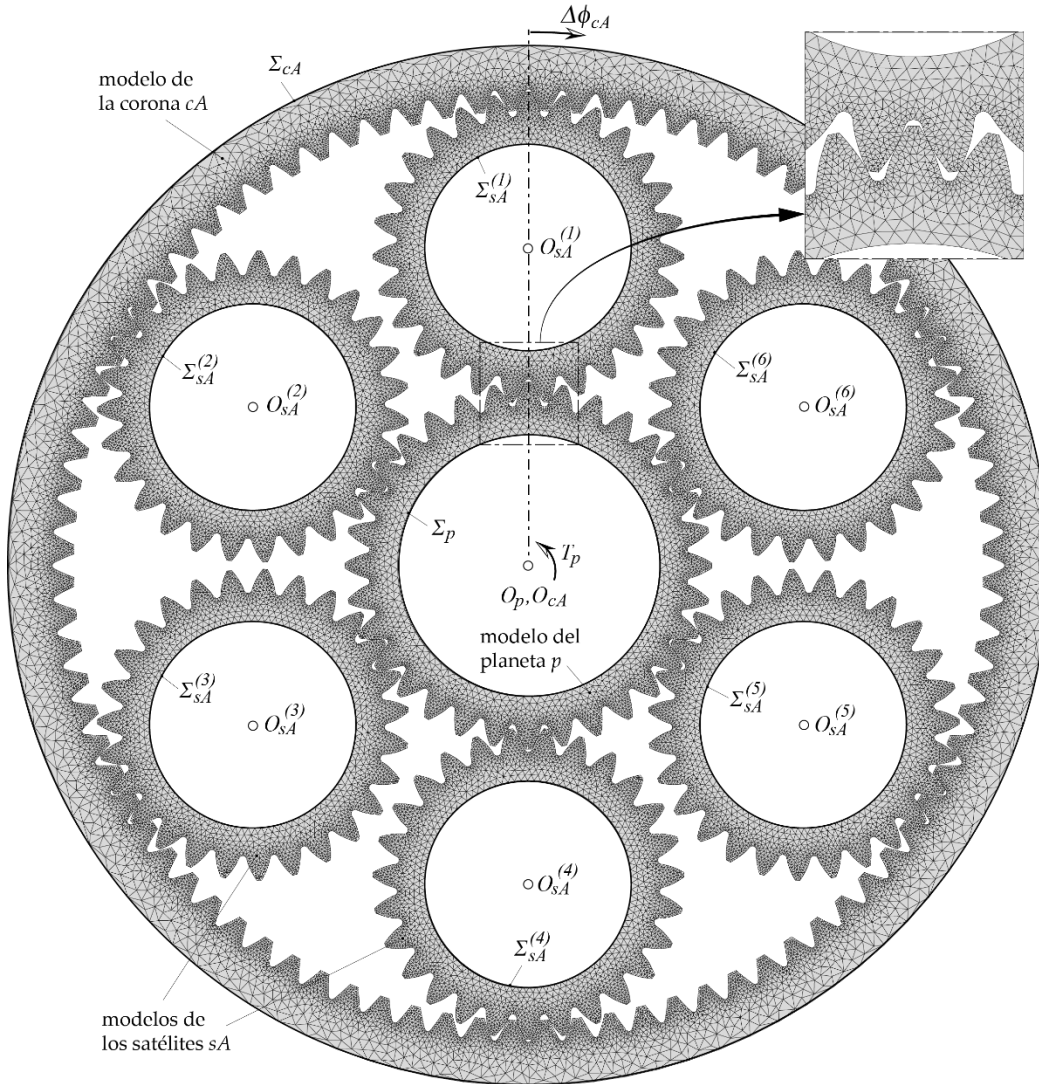


Figura 5: Modelo de elementos finitos 2D de la etapa A de un GRA.

La Figura 5 muestra el modelo de elementos finitos de la etapa *A* de un GRA con seis engranajes satélite mientras que la Figura 6 muestra el modelo correspondiente a la etapa *B*. Esta representación en figuras separadas se hace para facilitar la visualización dado que en realidad ambas etapas se superponen en el modelo.

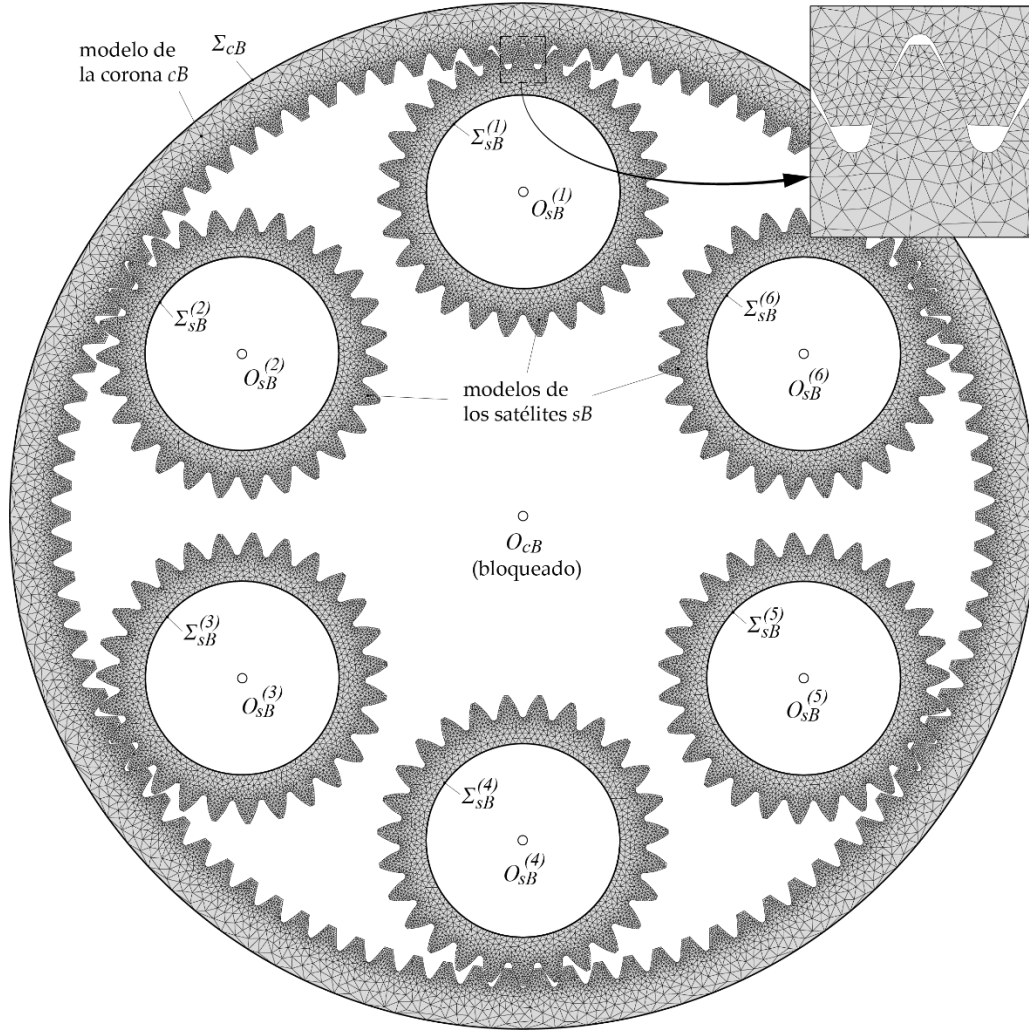


Figura 6: Modelo de elementos finitos 2D de la etapa *B* de un GRA.

El movimiento de los distintos engranajes del modelo se controla a través de nodos de referencia que se unen rígidamente a superficies rígidas Σ definidas con nodos localizados en el borde interior o exterior de los engranajes (véase las Figuras 5 y 6).

Este primer modelo considera un brazo porta-satélites virtual *c* formado por tantos nodos de referencia O_i como satélites *sA* presenta el modelo (véase la Figura 7). Cada nodo de referencia O_i del brazo porta-satélites está unido rígidamente al nodo central de referencia O_c , el cual tiene como único grado de libertad la rotación en el plano. A su vez, los nodos O_i se unen mediante elementos conectores tipo bisagra a los nodos de referencia de los satélites *sA*, O_{sA} , y éstos a su vez con elementos conectores tipo soldadura a los nodos de referencia de los satélites *sB*, O_{sB} . De esta manera, los satélites *sA* y *sB* pueden girar solidariamente respecto a los nodos O_i .

La carga del modelo del GRA cuando éste funciona como reductor se ejecuta aplicando un par torsor T_p al nodo de referencia del planeta *p* (véase la Figura 5) mientras el nodo de referencia de la corona *cB* se mantiene bloqueado (véase la Figura 6). Al mismo tiempo, el nodo de referencia de la corona *cA*, O_{cA} , está bloqueado en cada posición de contacto analizada. Para analizar distintas posiciones de contacto es necesario liberar la rotación del nodo O_{cA} , girarlo un ángulo $\Delta\phi_{cA}$ y bloquearlo de nuevo, mientras se mantiene el par aplicado T_p .

La carga del modelo del GRA cuando éste funciona como multiplicador se ejecuta aplicando un par torsor T_{cA} al nodo de referencia de la corona *cA* mientras el nodo de referencia de la corona *cB* se mantiene bloqueado. Al mismo tiempo, el nodo de referencia del planeta *p*, O_p , está bloqueado en cada posición de contacto analizada. Para analizar distintas posiciones de contacto es necesario liberar la rotación del nodo O_p , girarlo un ángulo $\Delta\phi_p$ y bloquearlo de nuevo, mientras se mantiene el par aplicado T_{cA} .

El tipo de elemento finito utilizado es el elemento CPS3 [8], un elemento de tensión plana de primer orden con 3 nodos. El mallado se genera de forma automática mediante IGD (programa Integrated Gear Design) que

implementa dicha función, siendo posible controlar el número de nodos en las direcciones de perfil, base, cabeza y raíz de los dientes, además del número de nodos en los bordes interior, en el caso de los engranajes externos, y exterior, en el caso de los engranajes internos.

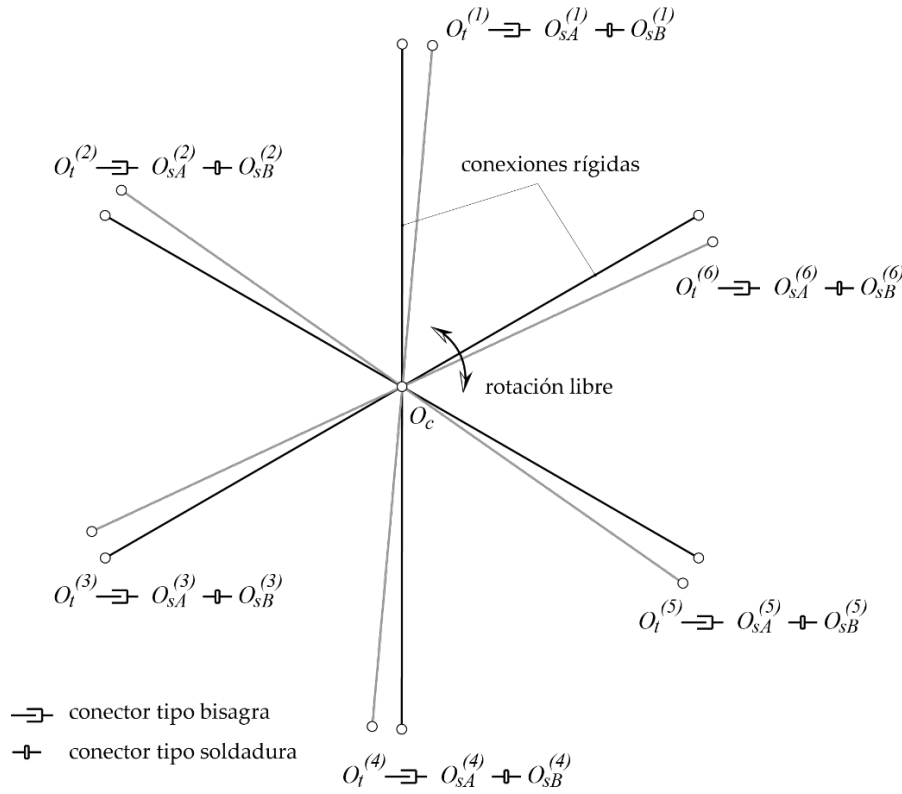


Figura 7: Esquema del brazo porta-satélites c usado en el modelo de elementos finitos 2D.

Una vez ejecutado el análisis, además de visualizar las tensiones de contacto y flexión, se pueden derivar dos tipos de resultados. Por un lado, es posible obtener la función de errores de transmisión bajo carga y, por otro lado, es posible derivar la evolución de la eficiencia a lo largo del engrane y su valor medio.

4.1. Cálculo de la función de errores de transmisión bajo carga

La función de errores de transmisión bajo carga $\Delta\phi_{cA-p}$ cuando el GRA funciona como reductor se obtendría como

$$\Delta\phi_{cA-p} = \Delta\phi_{cA} - \frac{\phi_{p,i} - \phi_{p,i-1}}{R} \quad (28)$$

con $i = \{1, 2, \dots, m-1\}$, siendo m el número de posiciones de contacto analizadas con 0 como la posición de contacto inicial (aplicación del par) que no se tiene en cuenta en dicha ecuación, y $\phi_{p,i}$ el ángulo girado por el nodo de referencia O_p obtenido del análisis para la posición de contacto i . R es la relación de transmisión dada por la Ecuación (1).

La función de errores de transmisión bajo carga $\Delta\phi_{p-cA}$ cuando el GRA funciona como multiplicador se obtendría como

$$\Delta\phi_{p-cA} = \Delta\phi_p - (\phi_{cA,i} - \phi_{cA,i-1})R \quad (29)$$

4.2. Cálculo de la eficiencia

Considerando en primer lugar el funcionamiento del GRA como reductor, la eficiencia instantánea, entendida ésta como la eficiencia en cada avance en el giro de la corona cA , $\Delta\phi_{cA}$, se puede obtener como

$$\eta_i = \frac{T_{cA,i}\omega_{cA}}{T_p\omega_{p,i}} \quad (30)$$

con $i = \{1, 2, \dots, m-1\}$, siendo m el número de posiciones de contacto analizadas con 0 como la posición de contacto inicial (aplicación del par) que no se tiene en cuenta en dicha ecuación. En la Ecuación (30), $T_{cA,i}$ es el par obtenido del análisis en el nodo de referencia O_{cA} , ω_{cA} es la velocidad de referencia de la corona cA obtenida a partir de la velocidad de referencia del planeta p como ω_p/R , T_p es el par aplicado al planeta p y $\omega_{p,i}$ es la velocidad angular del piñón obtenida por aproximaciones finitas de los giros del nodo O_p para la posición de contacto i .

En el caso del funcionamiento del GRA como multiplicador, la eficiencia instantánea, entendida ésta como la eficiencia en cada avance en el giro del planeta p , $\Delta\phi_p$, se puede obtener como

$$\eta_i = \frac{T_{p,i}\omega_p}{T_{cA}\omega_{cA,i}} \quad (31)$$

con $i = \{1, 2, \dots, m-1\}$, siendo m el número de posiciones de contacto analizadas con 0 como la posición de contacto inicial (aplicación del par) que no se tiene en cuenta en dicha ecuación. En la Ecuación (31), $T_{p,i}$ es el par obtenido del análisis en el nodo de referencia O_p del planeta p , ω_p es la velocidad de referencia del planeta p , T_{cA} es el par aplicado a la corona cA en el nodo de referencia O_{cA} , y $\omega_{cA,i}$ es la velocidad angular de la corona cA obtenida por aproximaciones finitas de los giros del nodo O_{cA} para la posición de contacto i .

La eficiencia media se obtendría en ambos casos como

$$\eta_m = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \eta_i}{m-1} \quad (32)$$

4.3. Determinación del ángulo de giro del planeta para compensar la holgura circunferencial

El ángulo de giro inicial del planeta p , $\phi_{p,o}$, es necesario para conseguir el contacto en todas las superficies de contacto del modelo de elementos finitos 2D y compensar la existencia de holgura circunferencial (o “backlash”) de los tres pares de engrane: planeta p con satélite sA , satélite sA con corona sA y satélite sB con corona sB . Asumiendo que dichas holguras son conocidas y vienen dadas por B_{p-sA} , B_{sA-cA} y B_{sB-cB} , respectivamente, el giro necesario del planeta p se puede dividir en los siguientes giros:

- 1) Giro para compensar la holgura B_{p-sA} :

$$\phi_{p,o}^{(1)} = \frac{B_{p-sA}}{r_p} \quad (33)$$

donde r_p es el radio primitivo del planeta p .

- 2) Giro para compensar la holgura B_{sB-cB} :

$$\phi_{p,o}^{(2)} = \frac{B_{sB-cB}}{r_{sB}} \frac{Z_{sA}}{Z_p} \quad (34)$$

donde r_{sB} es el radio primitivo del satélite sB .

- 3) Una vez compensadas las holguras anteriores, el GRA funciona como tren epicicloidial y el giro para compensar la holgura B_{sA-cA} se obtendrá como:

$$\phi_{p,o}^{(3)} = \frac{B_{sA-cA}}{r_{cA}} |R| \quad (35)$$

donde r_{cA} es el radio primitivo de la corona cA .

Finalmente, el giro inicial del planeta p se obtiene como

$$\phi_{p,o} = \phi_{p,o}^{(1)} + \phi_{p,o}^{(2)} + \phi_{p,o}^{(3)} \quad (36)$$

5. Resultados

En este apartado se va a determinar la eficiencia de un par de GRAs mediante los métodos teóricos de los Apartados 2 y 3 y mediante el método computacional del Apartado 4. Como datos básicos de partida se consideran los mostrados en la Tabla 1.

Tabla 1: Datos básicos de una transmisión mecánica tipo GRA.

Variable	Valor
Relación de transmisión objetivo, R	60
Tolerancia de R [%]	5
Número de ejes satélite	6
Distancia entre ejes, a_w [mm]	45
Velocidad del planeta p [rpm]	1440
Par torsor en el planeta p , T_p [Nm]	20
Ángulo de presión nominal en la etapa A [°]	25
Ángulo de presión nominal en la etapa B [°]	25

La Tabla 2 muestra dos de las soluciones encontradas por las estrategias de búsqueda implementadas por los autores de este trabajo en una nueva aplicación informática creada para tal fin y denominada iGRAd (Integrated Geared Rotary Actuator Design) para cumplir con la relación de transmisión objetivo y satisfacer las distintas condiciones de diseño y montaje de estas transmisiones (y que están fuera del marco del presente trabajo).

Con el fin de introducir cierta holgura circunferencial en los distintos engranes se ha optado por usar unos coeficientes de desplazamiento de herramienta en la generación de los satélites de $\chi_{sA,g} = 0,157 < 0,2$ y $\chi_{sB,g} = 0,153 < 0,2$ para la Solución 1, y de $\chi_{sA,g} = 0,149 < 0,2$ y $\chi_{sB,g} = 0,143 < 0,2$ para la Solución 2, siendo 0,2 el valor obtenido para χ_{sA} y χ_{sB} en las Soluciones 1 y 2 (véase la Tabla 2). Esto proporciona una holgura circunferencial en cada uno de los engranes, planeta p con satélite sA , satélite sA con corona cA y satélite sB con corona cB , de 60 μm .

Tabla 2: Dos de las soluciones encontradas de GRAs en iGRAd

Variable	Solución 1	Solución 2
Número de dientes del planeta p , Z_p	32	42
Número de dientes del satélite sA , Z_{sA}	27	29
Número de dientes del satélite sB , Z_{sB}	27	29
Número de dientes de la corona cA , Z_{cA}	88	102
Número de dientes de la corona cB , Z_{cB}	94	108
Relación de transmisión, R	-57,750	-60,714
Módulo de la etapa A , m_A [mm]	1,5	1,25
Módulo de la etapa B , m_B [mm]	1,375	1,125
Coef. desplazamiento herramienta del planeta p , χ_p	0,319	0,316
Coef. desplazamiento herramienta del satélite sA , χ_{sA}	0,2	0,2
Coef. desplazamiento herramienta del satélite sB , χ_{sB}	0,2	0,2
Coef. desplazamiento herramienta de la corona cA , χ_{cA}	-0,280	-0,284
Coef. desplazamiento herramienta de la corona cB , χ_{cB}	-0,529	0,714
Ancho de cara del planeta p , b_p [mm]	5,0	5,0
Ancho de cara del satélite sA , b_{sA} [mm]	15,0	15,0
Ancho de cara del satélite sB , b_{sB} [mm]	10,0	10,0
Ancho de cara de la corona cA , b_{cA} [mm]	15,0	15,0
Ancho de cara de la corona cB , b_{cB} [mm]	10,0	10,0

La Figura 8 muestra las dos soluciones GRA donde las etapas A y B se muestran por separado para facilitar la visualización. También se ilustra la condición de montaje de cada solución dado que es necesario que el conjunto de satélites sB pasen por el interior de la corona cA en el proceso de montaje.

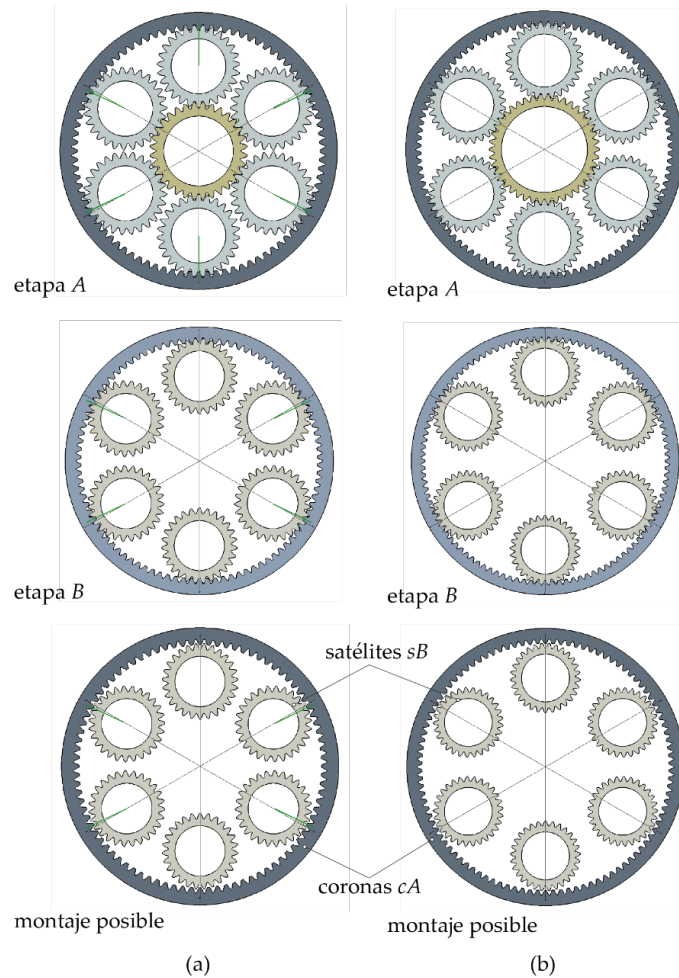


Figura 8: Disposición de los engranajes de las Soluciones GRA mostradas en la Tabla 2: (a) Solución 1 (solución asíncrona) y (b) Solución 2 (solución síncrona).

En la Figura 8 se observa además que, mientras que en la Solución 1 (Figura 8a) los satélites se encuentran en fases distintas del ciclo de engrane (solución asíncrona), en la Solución 2 (Figura 8b) los satélites se encuentran en la misma fase del ciclo de engrane (solución síncrona). El que una configuración resulte asíncrona o síncrona puede tener implicaciones tanto en la función de errores de transmisión bajo carga como en la evolución de la eficiencia a lo largo del engrane como se verá a continuación.

Con el fin de poder comparar los métodos teórico y computacional de cálculo de la eficiencia, es preciso en primer lugar determinar la eficiencia en los pares de engrane planeta p con satélite sA , satélite sA con corona cA y satélite sB con corona cB , de forma separada. Para ello, se han considerado modelos de elementos finitos independientes para estos pares de engrane y se ha considerado un coeficiente de fricción medio de 0,08. La Figura 9 muestra los tres modelos independientes correspondientes a los tres pares de engrane para el caso de la Solución 1.

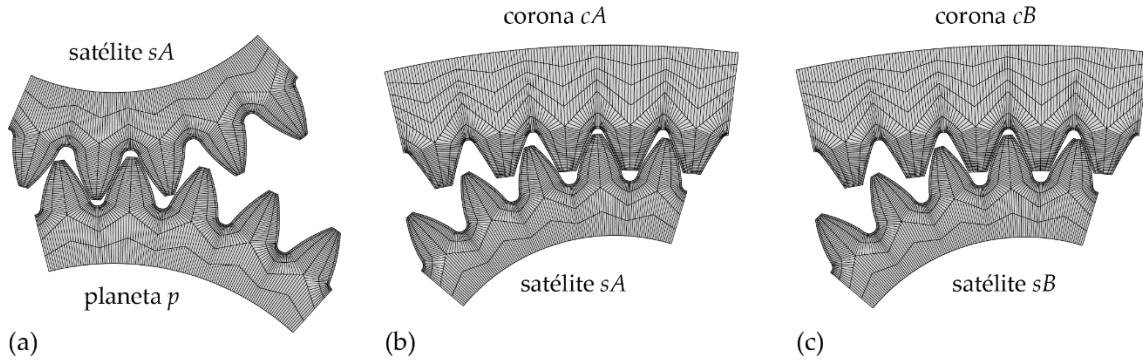


Figura 9: Modelos de elementos finitos para la obtención de las eficiencias en los pares de engrane de la Solución 1: (a) planeta p con satélite sA , (b) satélite sA con corona cA y (c) satélite sB con corona cB .

La Tabla 3 muestra los resultados de eficiencias medias obtenidas tras los análisis correspondientes de los pares de engrane independientes de las Soluciones 1 y 2. Estos valores se asignan a las eficiencias $\eta_{p,sA}$, $\eta_{sB,cB}$, $\eta_{sA,cA}$ que se usarán en el cálculo teórico de la eficiencia del GRA para poder comparar ésta con la solución computacional del modelo 2D con el mismo valor del coeficiente de fricción de 0,08.

Tabla 3: Eficiencias medias en los pares de engrane.

Eficiencia	Solución 1	Solución 2
$\eta_{p,sA}$	0,9899	0,9908
$\eta_{sA,cA}$	0,9945	0,9949
$\eta_{sB,cB}$	0,9936	0,9964

La Tabla 4 muestra una comparación de las eficiencias obtenidas mediante el método teórico cuando el GRA funciona como reductor (Sección 2) con los valores aportados por Wang [5] y Bertucci [2], usando como datos de entrada las eficiencias medias de la Tabla 3.

Tabla 4: Eficiencias medias en los GRA como reductores.

Método eficiencia	Solución 1	Solución 2
Teórico (Sección 2)	0,831	0,856
Wang [5]	0,839	0,860
Bertucci [2]	0,850	0,870
Computacional (Sección 4)	0,837	0,854

Para el cálculo computacional de la eficiencia se han creado modelos de elementos finitos 2D con un total de 350438 elementos con 202181 nodos (similares al mostrado en las Figuras 5 y 6). El material considerado en todos los engranajes es el acero con un módulo elástico de 207000 MPa y un coeficiente de Poisson de 0,3. El espesor de los elementos en los satélites sB y en la corona cB es de 20 mm, dos veces el ancho de cara indicado para estos engranajes en la Tabla 2 porque dichos engranajes aparecen dos veces en el GRA (ver Figura 1).

Si bien los valores de $\phi_{p,o}$ para compensar la holgura circunferencial de 60 μm en los pares de engrane (véase la Ecuación (36)) vienen dados por 3,31° en la Solución 1 y 3,55° en la Solución 2, el estado de precarga ha convergido para un valor algo superior de $\phi_{p,o}=5,0^\circ$ en ambas soluciones. Los valores medios de eficiencia obtenidos con el método computacional se representan también en la Tabla 4, mostrando una buena aproximación a los métodos analíticos.

La Figura 10 muestra la evolución de la eficiencia a lo largo de 40 posiciones de contacto para cubrir un giro de la corona cA de 2° en ambas soluciones. Se muestra una mayor fluctuación de la eficiencia en la Solución 2 (síncrona) que en la Solución 1 (asíncrona).

La Figura 11 muestra la evolución de las potencias de entrada, de salida y de pérdidas mecánicas para ambas soluciones. La fluctuación en la potencia de entrada se explica porque, aunque el par de entrada se considera

constante en el modelo (20 Nm), el giro del nodo de referencia del planeta p y por tanto su velocidad no lo es, ya que se ve afectado por las deformaciones elásticas del modelo. De forma análoga, en la salida se considera que el giro del nodo de referencia de la corona cA es constante y por tanto su velocidad, pero no así el par de reacción en dicho nodo. El valor medio de la potencia de salida es de 2,52 kW en la Solución 1 y 2,56 kW en la Solución 2, lo que proporciona un valor medio del par a la salida de 965,1 Nm y 1030,7 Nm respectivamente para esta transmisión mecánica.

Finalmente, la función de errores de transmisión bajo carga, según la Ecuación (28), se ha representado en la Figura 12 para ambas soluciones. Se muestra un valor de amplitud en el error de transmisión bajo carga notablemente superior en la solución síncrona, lo que debe suponer una fuente importante de vibración y ruido frente a la solución asíncrona.

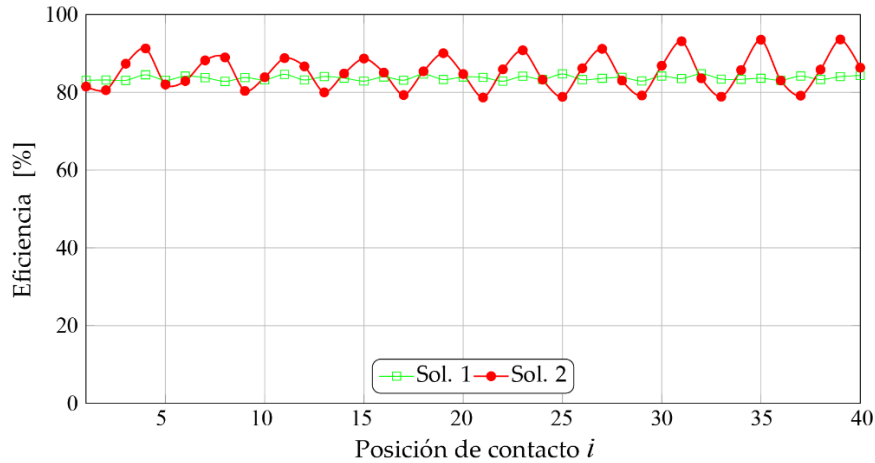


Figura 10: Evolución de la eficiencia en las soluciones 1 (asíncrona) y 2 (síncrona) como reductores.

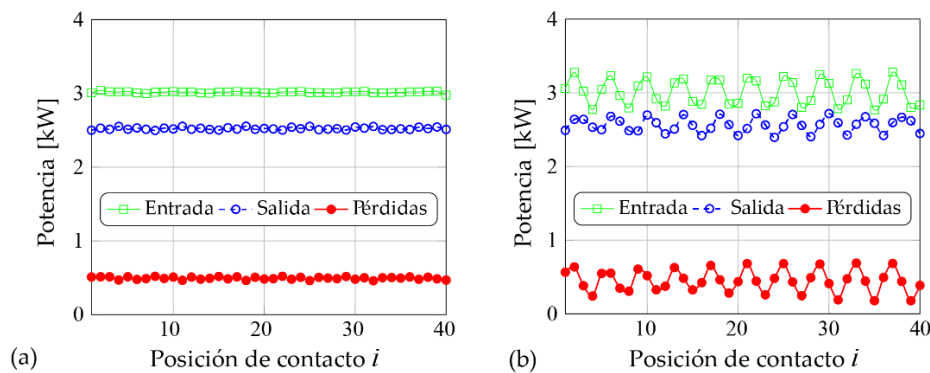


Figura 11: Evolución de las potencias de entrada, salida y pérdidas en: (a) Solución 1 y (b) Solución 2.

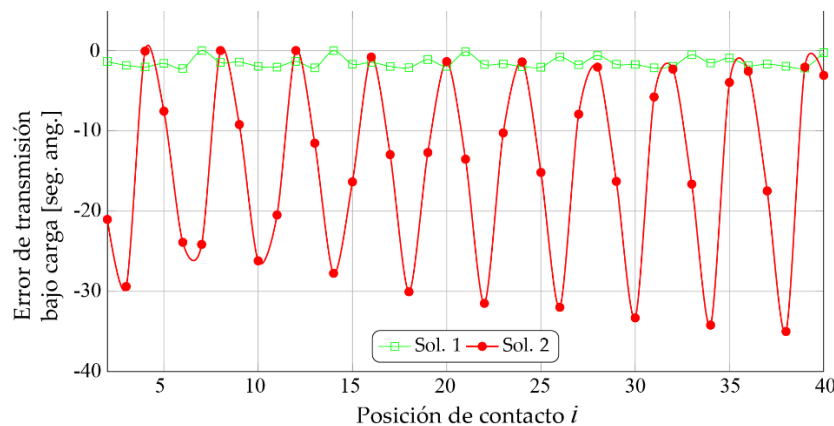


Figura 12: Evolución de los errores de transmisión bajo carga en las soluciones 1 (asíncrona) y 2 (síncrona).

La Tabla 5 muestra una comparación de las eficiencias obtenidas mediante el método teórico cuando el GRA funciona como multiplicador (Sección 3) con los valores aportados por Wang [5] y Bertucci [2], usando como datos de entrada las eficiencias medias de la Tabla 3. También muestra el valor medio de eficiencia obtenido mediante el método computacional (Sección 4) cuando se usa un coeficiente de fricción medio de 0,08 y el GRA

funciona como multiplicador. La Figura 13 muestra la evolución de la eficiencia a lo largo del engrane durante un giro del planeta p de 120° . En este caso, se ha usado un par de entrada en la corona cA de 1000 Nm.

Tabla 5: Eficiencias medias en los GRA como multiplicadores.

Método eficiencia	Solución 1	Solución 2
Teórico (Sección 3)	0,804	0,836
Wang [5]	0,812	0,840
Bertucci [2]	0,828	0,854
Computacional (Sección 4)	0,809	0,833

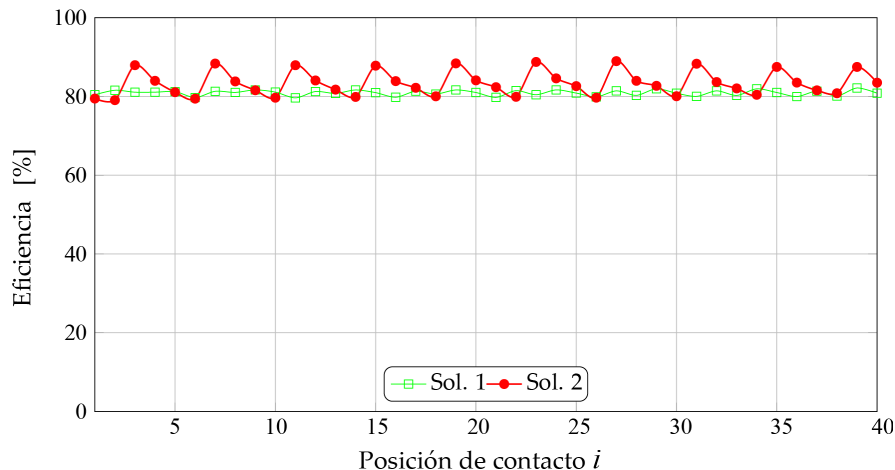


Figura 13: Evolución de la eficiencia en las soluciones 1 (asíncrona) y 2 (síncrona) como multiplicadores.

6. Conclusiones

La investigación desarrollada ha permitido obtener las siguientes conclusiones:

- 1) Se han implementado dos métodos, uno teórico basado en el análisis de las potencias de pérdidas del tren ordinario equivalente, y otro computacional basado en el análisis por el método de los elementos finitos de un modelo 2D que incorpora un coeficiente de fricción medio, para la determinación de la eficiencia en actuadores rotatorios basados en engranajes (o GRAs). En ambos métodos, los valores de la eficiencia media difieren en menos de un 1% y son muy próximos a los valores aportados por otros métodos analíticos existentes en la literatura.
- 2) El cálculo computacional de la eficiencia mediante un modelo de elementos finitos 2D necesita de la estimación de un coeficiente de fricción medio en todo el GRA, tiene en cuenta el reparto de carga entre los distintos satélites a lo largo del engrane, las deformaciones de contacto y de flexión de los dientes de los distintos engranajes, la formación de las huellas de contacto y, permite, a diferencia del método teórico, observar la evolución de la eficiencia a lo largo del ciclo de engrane.
- 3) Los resultados del cálculo computacional muestran una fluctuación mayor de la eficiencia en la solución síncrona cuando todos los engranajes satélites se encuentran en la misma fase del ciclo de engrane. Esta fluctuación también se refleja en las potencias de entrada, salida y de pérdidas mecánicas. Estas fluctuaciones ya fueron advertidas por Wang [5] para las soluciones síncronas frente a las soluciones asíncronas donde la fluctuación es mucho menor.
- 4) Los valores de amplitud de la función de errores de transmisión bajo carga son notablemente superiores en la solución síncrona que en la solución asíncrona, por lo que se recomienda la selección de soluciones asíncronas para no introducir fuentes de ruido y vibración en este tipo de transmisiones.

Agradecimientos

Este trabajo es parte del proyecto de investigación PID2023-152913NB-I00 financiado por MICIU/AEI /10.13039/501100011033 y por FEDER, UE.

Referencias

- [1] Benarous M., Panella I., “Flap system power drive unit (PDU) architecture optimization”, *The Journal of Engineering* **17**, 3500-3504 (2019)
- [2] Bertucci A., Jacazio G., Sorli M., “Performance study and mathematical model of aerospace geared rotary actuators”, *International Journal of Applied Engineering Research* **13**, 167-174 (2018)

- [3] Wang A., El-Bayoumy L., Venables N., “Preliminary design considerations on epicyclic gears in aircraft high-lift systems”, *Proceedings of the ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences*, DETC2011-48462, Washington D.C., Estados Unidos (2011)
- [4] Arnaudov K., Karaivanov D.P., *Planetary Gear Trains*, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton (2019)
- [5] Wang A., Gitnes S., El-Bayoumy L., “The instantaneous efficiency of epicyclic gears in flight control systems”, *Journal of Mechanical Design* **133**, 051008 (2018)
- [6] Simón Mata A. *et al.*, *Fundamentals of Machine Theory and Mechanisms*, Mechanism and Machine Science **40**, Springer, Cassino (2016)
- [7] Litvin F.L., Fuentes A., *Gear Geometry and Applied Theory, Second Edition*, Cambridge University Press, Nueva York (2004)
- [8] *Abaqus Theory Guide*, Dassault Systemes Simulia Corp., Estados Unidos (2015).