



Una propuesta metodológica para la resolución del problema dinámico de un robot manipulador en base a la formulación Lagrangiana. Una visión sustentada en el teorema de los trabajos virtuales

Alejandro Hossian¹, Roberto Carabajal², Emanuel Alveal²

¹ Departamento de electrónica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional del Neuquén, alejandrohossian@yahoo.com.ar

² Departamento de electrónica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional del Neuquén, rcarabaj@gmail.com

³ Departamento de electrónica, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional del Neuquén, maximilianoalveal@hotmail.com

El núcleo del problema que se analiza en el presente artículo de investigación se focaliza en el análisis dinámico de un robot manipulador con carga exterior en su extremo. En este sentido, la propuesta metodológica que se utiliza en términos de la introducción de fuerzas no conservativas (no derivadas de un potencial), se concentra en el uso de la expresión más extendida de las ecuaciones de movimiento de Lagrange. El concepto de fuerza generalizada asociado al de trabajo virtual son sustanciales para la obtención de las ecuaciones de movimiento. En este contexto, se obtienen distintos resultados en base al modelo dinámico obtenido; tales como custodiar valores de la fuerza aplicada en el efector terminal para diferentes trayectorias articulares, así como también analizar la respuesta temporal de los pares de torsión en las articulaciones del robot manipulador. Los resultados obtenidos en el presente trabajo constituyen referencias vitales en el análisis del control de posición y de la estabilidad asintótica global para el diseño del sistema de control.

Palabras clave: fuerza generalizada; modelo dinámico; pares de torsión; trayectorias articulares, trabajo virtual.

1. Introducción

El tópico de la dinámica constituye una de las áreas más importantes dentro del campo de mecánica analítica; la cuál refiere, fundamentalmente, al estudio de la vinculación entre las causas (fuerzas o pares) que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se produce. En este contexto, y dentro del campo de la robótica, la dinámica estudia, de manera especial, la relación que tiene lugar entre el movimiento que se produce en el dispositivo robótico y los pares o fuerzas que ejercen los actuadores de las articulaciones. En su aspecto más general, la morfología de los robots manipuladores consiste en un conjunto de articulaciones de un grado de libertad, rotacionales o prismáticas, que son las encargadas de unir los diferentes eslabones que conforman la cadena cinemática. En una articulación de tipo rotacional, los actuadores producen pares de fuerzas entre los eslabones que están conectados por medio de la articulación. Análogamente, en el caso de la articulación es prismática, los actuadores producen fuerzas entre dichos eslabones. La consecuencia real es que por medio de las relaciones dinámicas es posible controlar los actuadores de las articulaciones; y, por lo tanto, el movimiento de todos los eslabones del robot de forma tal que el efector terminal del mismo realice una trayectoria determinada [1]. Continuando con esta línea de análisis, por medio del modelo dinámico del robot manipulador es posible obtener las relaciones existentes entre los pares o fuerzas que se aplican en los actuadores de las articulaciones; y las posiciones, velocidades y aceleraciones articulares que ocurren en las mismas. Asimismo, las ecuaciones de movimiento que conforman dicho modelo dinámico, permiten efectuar el cálculo de las funciones de momento de torsión del actuador, con el objetivo de controlar al robot manipulador a los efectos de que su órgano terminal sea capaz de seguir una determinada ruta en su espacio de trabajo, conforme a los requisitos del usuario [2].

2. Aspectos teóricos

En el marco de este trabajo de investigación se hace uso de tópicos fundamentales de la Mecánica Analítica, los cuáles actúan a modo de soporte para la confección del presente artículo y explorar el alcance de la investigación. De esta forma, conceptos tales como coordenadas generalizadas, desplazamientos virtuales, principio de los trabajos virtuales y fuerzas generalizadas son sumamente importantes a los efectos de poder formular las ecuaciones de Lagrange en su forma más extendida [3]. Esta última aserción, hace especial referencia a la consideración de la parte no conservativa de las fuerzas que intervienen en el mecanismo.

2.1. Ligaduras y coordenadas generalizadas

En el marco del análisis de la dinámica de un sistema de partículas, es importante destacar entre sistemas que no contienen vínculos (tal como es el caso del sistema solar) y aquellos sistemas que sí poseen vínculos, o también llamados vinculados. En el primer caso, se entiende que las partículas son completamente libres y las trayectorias que describen depende de las fuerzas que actúan sobre y dentro del sistema. En los sistemas vinculados, las partículas no son libres, y las trayectorias dependen de la naturaleza de los vínculos. En la Figura 1 se puede observar un sistema vinculado, correspondiente a un péndulo simple de masa m y longitud fija l .

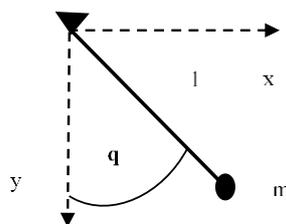


Figura 1: Péndulo simple de masa m y longitud l en el marco de un sistema de coordenadas cartesianas.

La coordenada q define de manera unívoca la posición de la masa m , habida cuenta de que este sistema tiene un solo grado de libertad. Si se emplean las coordenadas rectangulares x e y para posicionar la masa m , es preciso incluir la ecuación de ligadura (1).

$$x^2 + y^2 = l^2 \quad (1)$$

Es importante señalar, que las coordenadas x e y no son independientes, en virtud de que las mismas se encuentran relacionadas a través de la ecuación de ligadura. A hora de definir la configuración de los sistemas vinculados es conveniente escoger ciertas cantidades que sean independientes entre sí. Estas coordenadas se conocen como coordenadas generalizadas, las cuales, en el caso del péndulo simple se tiene una sola, que es el ángulo q . La cantidad de coordenadas rectangulares menos el número de ecuaciones de ligadura coincide con los grados de libertad del sistema; y por ende, con la cantidad de coordenadas generalizadas. Este hecho tiene lugar en los llamados sistemas holónomos [4], donde las ecuaciones de ligadura se pueden expresar solo en función de las coordenadas, o de las coordenadas y el tiempo t . De esta forma, cada una de las coordenadas rectangulares de un punto i de un sistema de N puntos es posible expresarlas en función de las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_n ; y en forma general también del tiempo, tal como se muestra en la ecuación (2) para un sistema de N puntos en \mathbb{R}^3 .

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \right\} i=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Por su parte, es importante resaltar que las coordenadas generalizadas pueden ser ángulos o longitudes, o también cualquier otro conjunto de cantidades independientes que, en combinación con las restricciones, permiten especificar de manera unívoca la configuración de un sistema de n grados de libertad [5].

2.2. Concepto de fuerza generalizada y desplazamiento virtual

Un desplazamiento virtual es cualquier desplazamiento arbitrario (angular o lineal), el cual es capaz de separar al sistema de su posición real o natural. En el caso de sistemas vinculados, estos desplazamientos deben ser compatibles con las ligaduras o restricciones del sistema [6]. Si se tiene por caso, un extremo de una barra que se halla articulado mediante un pasador fijo, el desplazamiento virtual del otro extremo tiene que ser perpendicular a la recta que vincula a ambos extremos. En otros términos y sin pérdida de generalidad, el caso anterior expresa que estos requisitos de compatibilidad de los desplazamientos con las ligaduras del sistema son de carácter cinemático y están en estricta relación con la geometría de los movimientos posibles; a la vez que suministran las denominadas ecuaciones de restricción. En el caso de que estas ecuaciones no dependan del tiempo, entonces los desplazamientos reales son coincidentes con los virtuales [7]. Considerando un sistema de N partículas, el vector posición asociado a la partícula i –ésima es posible expresarlo en función del vector de coordenadas generalizadas \mathbf{q} y del tiempo t de la forma: $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{q}, t)$ $i = 1, 2, \dots, N$. Si esta partícula sufre un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_i$, este se relaciona con los desplazamientos virtuales de cada coordenada generalizada δq_k mediante la ecuación (3). Al estar en presencia un sistema holónomo, si el mismo posee n grados de libertad, esta cantidad coincide con la cantidad de coordenadas generalizadas. Por tal razón, es que la variación del subíndice k va desde 1 hasta n .

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (3)$$

En caso de que la posición de la partícula no dependa explícitamente del tiempo, la relación de desplazamiento está dada por la ecuación (4).

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad i=1, 2, \dots, N \quad (4)$$

El trabajo que realizan las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema cuando el mismo experimenta un desplazamiento virtual, se denomina trabajo virtual del sistema. Si en un sistema de N partículas actúa una fuerza exterior resultante F_i sobre cada una de estas partículas, entonces el trabajo virtual total que desarrolla el sistema cuando cada partícula experimenta un desplazamiento virtual $\delta \mathbf{r}_i$ se representa a través de la ecuación (5).

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \quad i=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

El trabajo virtual del sistema de partículas con n coordenadas generalizadas o grados de libertad está dado por la expresión (6); la cual está en función de la expresión (4) que vincula el desplazamiento virtual de una partícula $\delta \mathbf{r}_i$ con los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas δq_k .

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (6)$$

En la ecuación anterior el escalar Q_k está dado por la expresión (7), el cual representa la fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_k .

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad k=1, 2, \dots, n \quad (7)$$

El concepto de fuerza generalizada asociada a una coordenada generalizada es de vital importancia en el contexto del presente análisis; habida cuenta de que, en primer término, cabe señalar de que a pesar de que se la llama “fuerza”, Q_k representa un escalar. En este sentido, se afirma que la fuerza generalizada asociada a la coordenada generalizada q_k es aquella cantidad por la cual se debe multiplicar el desplazamiento virtual δq_k de dicha coordenada generalizada, de manera de obtener el mismo trabajo que desarrollan las fuerzas reales que actúan

sobre el sistema durante los desplazamientos correspondientes a la variación de la coordenada q_k [8]. En segundo término, cabe señalar que una fuerza generalizada no necesariamente debe tener dimensiones de fuerza, pudiendo tener dimensiones de momento si la coordenada generalizada correspondiente fuese un ángulo. No obstante, el producto $Q_k \delta q_k$ debe tener dimensiones de trabajo.

2.3. Formulación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange

En el siguiente sub-apartado se aborda el desarrollo de las ecuaciones de movimiento de Lagrange correspondiente a un punto material de masa m que se encuentra sujeto a una fuerza exterior resultante F (F_x, F_y, F_z); para luego extender este análisis al caso de un sistema de N puntos materiales. El núcleo principal del presente abordaje consiste en poner de manifiesto la significación de la fuerza generalizada asociada al correspondiente desplazamiento virtual y como se aplica el principio del trabajo virtual en el presente desarrollo; si bien no se realiza la deducción completa de las ecuaciones de Lagrange. Desarrollando la ecuación (5) del trabajo virtual para el punto material de masa m en función de sus componentes se obtiene la ecuación (8).

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = m \left(\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y + \ddot{z} \delta z \right) \quad (8)$$

Las coordenadas cartesianas x, y, z del vector posición de m se relacionan con las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_k del sistema por medio de la expresión (9), teniendo en cuenta que las coordenadas x, y, z no dependen explícitamente del tiempo; sin solo de las coordenadas generalizadas.

$$\begin{aligned} x &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_k) \end{aligned} \quad (9)$$

Por su parte, variaciones de x, y, z en función de las variaciones correspondientes de las coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_k se desarrollan conforme a la expresión (10).

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k \end{aligned} \quad (10)$$

En la expresión anterior las δ refiere a variaciones virtuales de orden infinitesimal de las coordenadas generalizadas. Como las q_k son independientes, es posible explorar el movimiento para el efecto de la variación de cada una de las q_k , manteniendo constante las demás coordenadas. Por consiguiente, tomando $\delta q_1 \neq 0$ y $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_k = 0$, se tiene que: $\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1$, $\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1$, $\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1$. Reemplazando en (8) se obtiene la expresión (11) del trabajo virtual en función de la coordenada generalizada q_1 y del desplazamiento virtual δq_1 .

$$\left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 = m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \quad (11)$$

Observando esta última expresión, se concluye que el primer miembro de la misma refiere al trabajo realizado por la fuerza F durante el desplazamiento virtual δq_1 ; a la vez que también representa el producto punto de los vectores reflejados en la ecuación (7), y desarrollado en función de sus componentes.

Continuando en esta línea de análisis, se llama fuerza generalizada Q_1 correspondiente al desplazamiento virtual δq_1 , y explicada anteriormente, a la siguiente cantidad:

$$Q_1 = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \left(F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$$

Empleando un proceder análogo al utilizado para la coordenada generalizada q_1 , se obtienen las demás fuerzas generalizadas Q_1, Q_2, \dots, Q_k , asociadas a los respectivos desplazamiento virtuales $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$.

Luego, desarrollando en forma analítica el segundo miembro de la ecuación (11), y teniendo en cuenta que el primer miembro se corresponde con $Q_1 \delta q_1$, se llega a la siguiente nueva expresión (12).

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = m \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\begin{matrix} \dot{x}^2 & \dot{y}^2 & \dot{z}^2 \\ x & y & z \end{matrix} \right) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\begin{matrix} \dot{x}^2 & \dot{y}^2 & \dot{z}^2 \\ x & y & z \end{matrix} \right) \right\} \delta q_1 \quad (12)$$

Cabe destacar, que el factor entre paréntesis en cada uno de los términos de esta última expresión, multiplicados ambos por la masa m de la partícula, constituye la energía cinética de las mismas. Se hace referencia al factor:

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\begin{matrix} \dot{x}^2 & \dot{y}^2 & \dot{z}^2 \\ x & y & z \end{matrix} \right)$$

Si se reemplaza esta última expresión en la ecuación (12), y cancelando el factor δq_1 se obtiene la siguiente expresión (13) de la ecuación de movimiento de Lagrange para la partícula de masa m_1 ; la cual está en función de la energía cinética E_{c1} actuante sobre m_1 y la fuerza generalizada Q_1 asociada a la coordenada generalizada q_1 .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_1} = Q_1 \quad (13)$$

Si se procede a desarrollar ecuaciones análogas de movimiento de Lagrange para los demás desplazamientos virtuales ($\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$), siempre tomando cada una por separado, se tiene una expresión tal como la (14) para una fuerza generalizada k -ésima Q_k .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k \quad k=1,2,\dots,n \quad (14)$$

Cada fuerza generalizada Q_k se descompone su parte no conservativa Q_{knc} , la cual se conoce que no deriva de una función de energía potencial; y su parte conservativa Q_{kc} , la cual se conoce que deriva de una función de energía potencial. La parte conservativa Q_{kc} se expresa en base a la función energía potencial E_p según la ecuación (15).

$$Q_{kc} = - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} \quad k=1,2,\dots,n \quad (15)$$

Teniendo en cuenta esta última expresión, definiendo la función Lagrangiana $L = E_c - E_p$ y tomando en consideración que cada fuerza generalizada Q_k se descompone en su parte conservativa y no conservativa, es decir que $Q_k = Q_{kc} + Q_{knc}$; entonces se procede a sustituir estas expresiones en la expresión (14) y se deduce la forma extendida de las ecuaciones de Lagrange para cada grado de libertad o coordenada generalizada (cantidades que coinciden asumiendo que se trabaja con sistemas holónomos). En consecuencia, la expresión (16) suministra la forma extendida de las ecuaciones de movimiento de Lagrange [9].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_k} = Q_k \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L + E_p)}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (L + E_p)}{\partial q_k} = Q_{kc} + Q_{knc} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} = - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} + Q_{knc}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{q}_k} = 0 \left(\text{la energía cinética no depende de } \dot{q}_k \right); \text{ se cancelan los términos } - \frac{\partial E_p}{\partial q_k} \text{ en ambos miembros, llegando} \quad (16)$$

a la forma extendida de la ecuación de Lagrange para cada grado de libertad :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knc} \quad k=1,2,\dots,n$$

Es importante hacer referencia a que la parte no conservativa de las fuerzas generalizadas (Q_{knc}) asociadas a cada coordenada generalizada q_k , o grado de libertad, se obtienen tomando en consideración a la expresión (7). Este detalle se puede observar en el desarrollo del caso de estudio del manipulador robótico del presente artículo.

3. Modelo de proceso de investigación

En el presente apartado se presenta una breve síntesis acerca del marco en el que se encuadra el tópico que se trata en este trabajo. En este sentido, el modelo de proceso de investigación que se está llevando a cabo se soporta en el desarrollo de tres fases que procuran optimizar el diseño de un manipulador robótico industrial; a saber: una primera fase corresponde a la Cinemática del Robot; una segunda fase se corresponde con la Dinámica del Robot, y una tercera fase vinculada a los aspectos que hacen al Control del robot, cuyos algoritmos permiten mejorar las

características de velocidad y precisión [10]. Las cuestiones que se abordan en este trabajo se sustentan en el marco teórico analizado y se encuadran dentro del estudio de la dinámica del robot. En la figura 2 se muestra un pequeño bosquejo del proceso que desarrolla el grupo de investigación en este sentido.

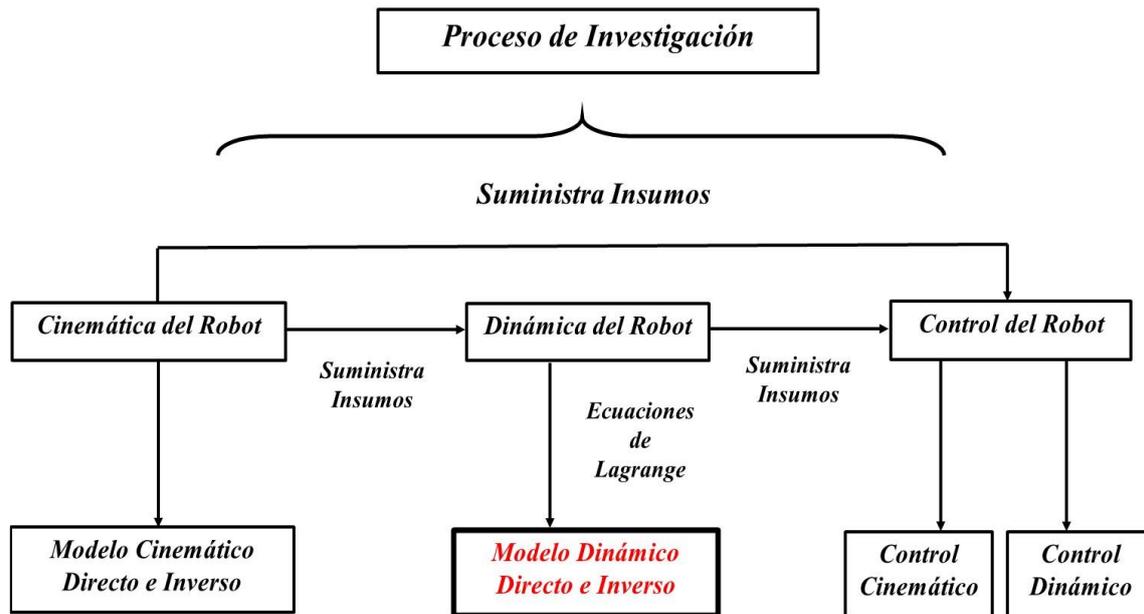


Figura 2: Modelo de proceso de investigación en el marco del diseño de un robot manipulador.

Desde una perspectiva más específica, el núcleo fundamental de este trabajo se sustenta en observar la respuesta que ofrece el dispositivo robótico al momento de cuando este debe sostener una carga en su órgano terminal, empleando las ecuaciones de movimiento de Lagrange en su versión extendida.

4. Propuesta metodológica y caso de estudio

En este apartado se presenta el proceso metodológico que se emplea para el análisis dinámico de un robot manipulador; así como los resultados de carácter general que se obtienen aplicados a un caso de estudio de manipulador robótico industrial de 2 grados de libertad con 2 articulaciones rotacionales y con carga en su extremo.

4.1. Propuesta metodológica

El proceso metodológico que se propone tiene como “insumos de entrada” los parámetros dinámicos tales como: longitudes, masas y momentos de inercia de eslabones; y las coordenadas generalizadas definidas por el diseñador. El “producto de salida” que provee este proceso son los pares de torsión que se deben aplicar en cada articulación ajustados a las trayectorias articulares que se proponen; debiendo señalar en este sentido, que estos pares pueden o no satisfacer los requisitos de diseño conforme a las prestaciones que debe llevar a cabo el manipulador. El núcleo central de este proceso se conforma de tres fases que se desarrollan en forma interconectada.

La **1^{RA} fase** está centrada en desarrollar la “Formulación Lagrangiana” en base a 5 procedimientos: cálculo de la energía potencial, cálculo de la energía cinética, cálculo del Lagrangiano, obtención de las fuerzas generalizadas no conservativas y formulación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

La **2^{DA} fase** se concentra en el cálculo de los pares de torsión que se aplican en las articulaciones ajustadas a las trayectorias articulares propuestas. Cabe señalar, que en este punto del proceso también es factible la obtención de las evoluciones temporales de las trayectorias articulares para ciertas evoluciones de los pares de torsión.

En el extremo del proceso se tiene la **3^{RA} fase**, cuyo soporte principal consiste en una sentencia de decisión acerca de si se cumplen determinados requisitos de usuario. El presente interrogante refiere a que, para las trayectorias articulares que requiere el usuario, los pares en las articulaciones estén dentro de valores admisibles de diseño. Una alternativa que se propone en caso de que no se satisfaga esta condición, consiste en reformular los parámetros dinámicos (por ejemplo, con técnicas de identificación paramétrica), y plantear nuevas ecuaciones dinámicas de movimiento. En caso de que se satisfagan estas condiciones (por ejemplo, pares de torsión que estén dentro de valores admisibles, o valores máximos aceleración articular dentro de valores tolerados de fabricación para ciertas evoluciones temporales de los pares de torsión), entonces el proceso envía estas referencias al módulo de control. En este sentido, es importante que se diseñen estrategias de control con acciones acotadas dentro de los límites físicos del servomotor, y sintonizar adecuadamente las ganancias de control a efectos de no saturar al servoamplificador [11]. Esta tercera fase se encuentra en desarrollo, probando diferentes parámetros dinámicos y modelos de control. En figura 3 se ilustra el esquema del proceso metodológico propuesto.

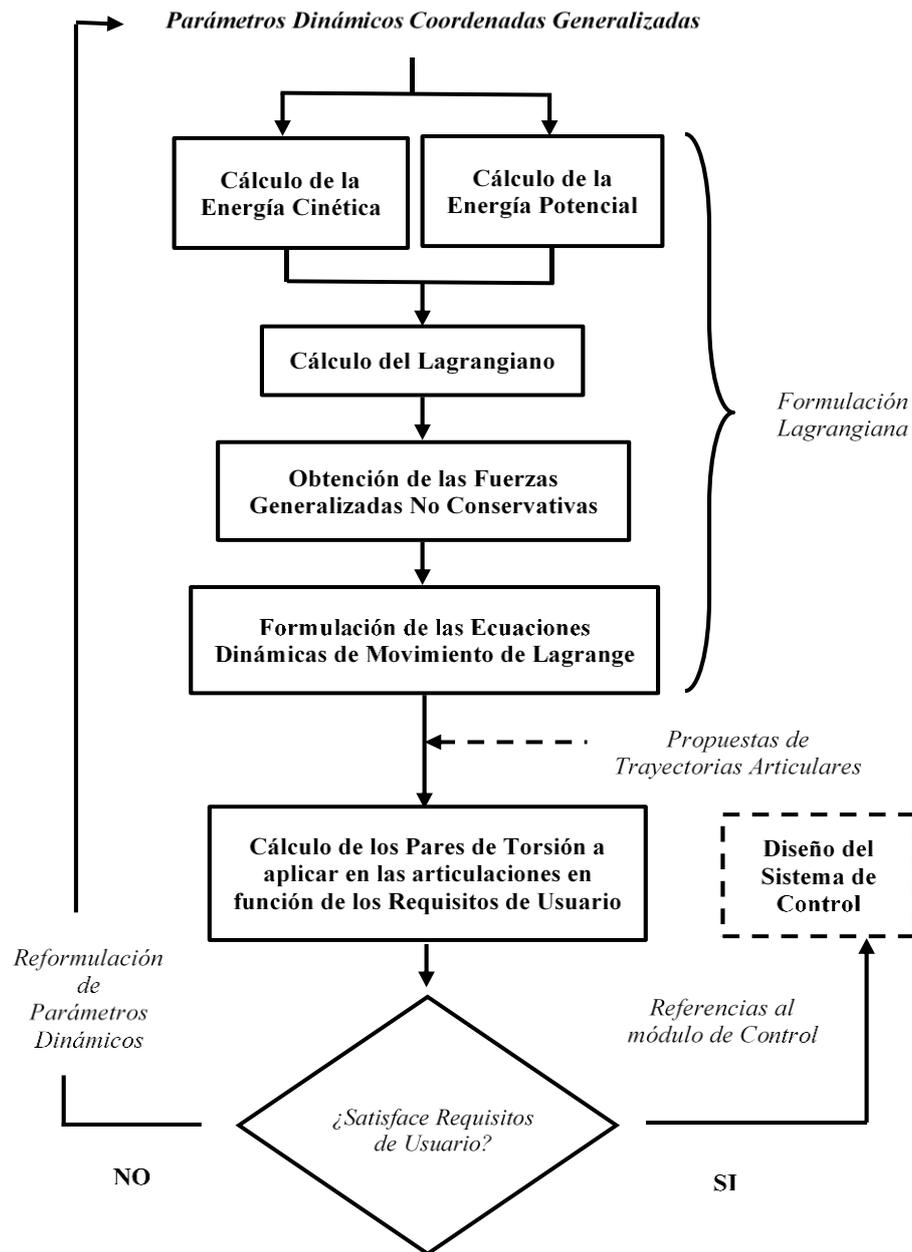


Figura 3: Proceso metodológico para el análisis dinámico de robots manipuladores en base a la formulación Lagrangiana.

4.2. Caso de estudio

En este sub-apartado se analiza un caso de estudio de un robot planar de dos grados de libertad con dos articulaciones rotacionales y dos eslabones rígidos. Refiriendo al proceso metodológico ilustrado en la figura 3, se observa que los insumos de entrada se corresponden con los parámetros dinámicos del robot y las coordenadas generalizadas respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot. Los parámetros dinámicos dispositivo robótico son: longitudes de eslabones (L_1 y L_2), masas de eslabones (m_1 y m_2). La posición del centro de masa del eslabón 1 es: $\mathbf{R}_{cm1} = (X_{cm1}, Y_{cm1}) = ((L_1/2) C_1, (L_1/2) S_1)$ y para el centro de masa del eslabón 2 es: $\mathbf{R}_{cm2} = (X_{cm2}, Y_{cm2}) = (L_1 C_1 + (L_2/2) C_2, (L_1 S_1 + (L_2/2) S_2))$. Se establece que $C_1 = \cos q_1$ y $S_1 = \sin q_1$. Cada eslabón se asume como barras con momento de inercia con respecto a su centro de masa de $I_{cm1} = 1/12m_1(L_1)^2$ e $I_{cm2} = 1/12m_2(L_2)^2$. En la figura 4 se muestra el esquema del robot planar; en el cual se tiene la fuerza \mathbf{F} aplicada en el extremo, así como también el vector posición \mathbf{R}_{ext} que localiza el punto de aplicación de \mathbf{F} respecto al sistema de referencia asociado a la base del robot. Estos dos elementos son fundamentales para obtener las fuerzas generalizadas no conservativas asociadas a cada coordenada generalizada q_1 y q_2 .

En el marco de la implementación del proceso de figura 3, se implementan los 5 procedimientos vinculados a la formulación Lagrangiana. Para los cálculos que se desarrollan a continuación, se toma $m_1 = m_2 = m$ y $L_1 = L_2 = L$, con la idea de simplificar la exposición.

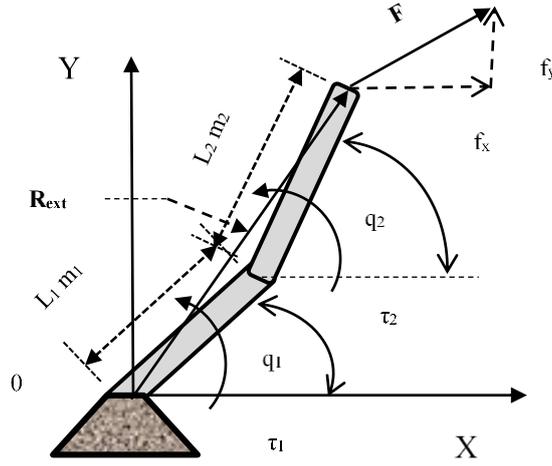


Figura 4: Manipulador robótico industrial de dos grados de libertad con dos articulaciones rotatorias y carga exterior aplicada en su efector terminal.

A continuación, se procede a desarrollar los cálculos correspondientes con $m_1 = m_2 = m$ y $L_1 = L_2 = L$, tal como se estableció anteriormente. En primer término, se desarrolla el cálculo de las velocidades de los centros de masas de cada eslabón para obtener la energía cinética total del robot aplicando la ecuación (17). Luego se obtiene la energía potencial gravitatoria total de acuerdo a la ecuación (18). Con estas dos ecuaciones, se calcula el Lagrangiano del dispositivo conforme a la ecuación (19). Posteriormente, se obtienen las fuerzas generalizadas no conservativas para cada coordenada generalizada. Se formulan las ecuaciones dinámicas de movimiento de Lagrange; completando de esta manera la formulación Lagrangiana, hasta llegar a su versión más extendida. Se comienza por obtener las velocidades de los centros de masas de cada eslabón, así como las energías cinéticas de cada uno de ellos (E_{c1} y E_{c2}); teniendo en cuenta que estas últimas están conformadas por la energía cinética de traslación más la energía cinética de rotación. Estos cálculos se llevan a cabo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{cm1} = V_{cm1} &= \begin{pmatrix} \dot{X}_{cm1} \\ \dot{Y}_{cm1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L_1}{2} S_1 \dot{q}_1 \\ \frac{L_1}{2} C_1 \dot{q}_1 \end{pmatrix} \\ \dot{R}_{cm2} = V_{cm2} &= \begin{pmatrix} \dot{X}_{cm2} \\ \dot{Y}_{cm2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 S_1 \dot{q}_1 - \frac{L_2}{2} S_2 \dot{q}_2 \\ L_1 C_1 \dot{q}_1 + \frac{L_2}{2} C_2 \dot{q}_2 \end{pmatrix} \\ E_{c1}(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{1}{2} m_1 (V_{cm1} V_{cm1}) + \frac{1}{2} I_{cm1} \dot{q}_1^2 \quad \& \quad E_{c2}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} m_2 (V_{cm2} V_{cm2}) + \frac{1}{2} I_{cm2} \dot{q}_2^2 \end{aligned}$$

La energía cinética total es la suma de ambas energías cinéticas de cada uno de los eslabones que conforman la cadena: $E_{cTotal} = E_{c1} + E_{c2}$; y tomando $m_1 = m_2 = m$, $L_1 = L_2 = L$ e $I_{cm1} = I_{cm2} = I_{cm}$. Se llega a la ecuación (17).

$$E_{cTotal}(q(t), \dot{q}(t)) = E_{c1} + E_{c2} = \frac{1}{6} mL^2 \left(4 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right) \quad (17)$$

La energía potencial gravitatoria total está conformada por la suma de las energías potenciales gravitatorias de uno de los eslabones que conforman la cadena: $E_{pgTotal} = E_{pg1} + E_{pg2}$; y tomando $m_1 = m_2 = m$, $L_1 = L_2 = L$, se obtiene operando algebraicamente la expresión (18).

$$\begin{aligned} E_{pgTotal}(q(t)) &= E_{pg1} + E_{pg2} = mg \frac{L}{2} S_1 + mgLS_1 + mg \frac{L}{2} S_2 \Rightarrow E_{pgTotal}(q(t)) = \frac{3}{2} mgLS_1 + \frac{1}{2} mgLS_2 \Rightarrow \\ E_{pgTotal}(q(t)) &= \frac{1}{2} mgL(3S_1 + S_2) \end{aligned} \quad (18)$$

Con las expresiones correspondientes a las energías cinéticas totales y las energías potenciales gravitatorias totales (E_{cTotal} y $E_{pgTotal}$), se obtiene el lagrangiano del manipulador para este caso de estudio, dado por la expresión (19).

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = E_{ct} - E_{pgt} \Rightarrow L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{6} mL^2 \left(4 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right) - \frac{1}{2} mgL(3S_1 + S_2) \quad (19)$$

El 4^{TO} procedimiento de esta 1^{RA} fase, consiste en la obtención de las fuerzas generalizadas no conservativas Q_{1NC} y Q_{2NC} asociadas a cada coordenada generalizada q_1 y q_2 . Para ello se obtienen las fuerzas generalizadas debido a la fuerza F asociadas a cada coordenada generalizada. Luego se obtienen las fuerzas generalizadas debido a los

pares τ_1 y τ_2 aplicados en cada articulación, que son estos mismos. Dado que el $\mathbf{R}_{ext} = L((C_1 + C_2), (S_1 + S_2))$, se obtiene la siguiente ecuación (20).

$$\begin{aligned}\vec{F} * \frac{\partial \vec{R}_{ext}}{\partial q_1} &= (f_x, f_y) * L(-S_1, C_1) = L(-f_x S_1 + f_y C_1) \\ \vec{F} * \frac{\partial \vec{R}_{ext}}{\partial q_2} &= (f_x, f_y) * L(-S_2, C_2) = L(-f_x S_2 + f_y C_2)\end{aligned}\quad (20)$$

Luego se suma cada contribución para obtener Q_{1NC} y Q_{2NC} , que son las fuerzas generalizadas no conservativas para cada coordenada generalizada, en el marco de este caso de estudio. Estas se detallan en la ecuación (21).

$$Q_{1NC} = \tau_1 + L(-f_x S_1 + f_y C_1) \quad \& \quad Q_{2NC} = \tau_2 + L(-f_x S_2 + f_y C_2) \quad (21)$$

El 5^{TO} procedimiento de esta 1^{RA} fase, consiste en la formulación de las ecuaciones de movimiento de Lagrange para cada grado de libertad del robot manipulador. En esta línea de análisis, y operando sobre la ecuación (19) del Lagrangiano, se obtienen los términos para la formulación de estas ecuaciones dinámicas en el marco de este caso de estudio. Al efecto, se obtienen las expresiones (22), (23), (24) y (25).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left[\frac{4}{3} mL^2 \right] \dot{q}_1 + \left[\frac{1}{2} mL^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_2 - \frac{3}{2} mgLC_1; \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] = \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{4}{3} mL^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} mL^2 \left[\ddot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) - \dot{q}_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \text{sen}(q_1 - q_2) \right] \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{1}{2} mL^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \text{sen}(q_1 - q_2) - \frac{3}{2} mgLC_1\end{aligned}\quad (23)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \left[\frac{1}{2} mL^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1 + \left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \dot{q}_2 \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] = \left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \ddot{q}_2 + \left[\frac{1}{2} mL^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_1 - \left[\frac{1}{2} mL^2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \text{sen}(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{1}{2} mL^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \text{sen}(q_1 - q_2) - \frac{1}{2} mgLC_2 \quad (25)$$

Para obtener las ecuaciones dinámicas de movimiento de Lagrange en su versión extendida, se debe aplicar la ecuación (16) para cada grado de libertad del robot, la cual se replica a continuación.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knc} \quad k=1,2,\dots,n$$

Aplicando esta expresión correspondiente a las ecuaciones de movimiento de Lagrange en su versión más extendida, para cada coordenada generalizada q_1 y q_2 en el presente caso de estudio se obtienen las ecuaciones (26) y (27). Para la coordenada generalizada (o grado de libertad 1) q_1 , se procede a restar (22) – (23) y se iguala a la 1^{RA} de las ecuaciones (21), obteniéndose la ecuación (26); para la coordenada generalizada (o grado de libertad 2) q_2 , se procede a restar (24) – (25) y se iguala a la 2^{DA} de las ecuaciones (21), obteniéndose la ecuación (27).

$$\left[\frac{4}{3} mL^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} mL^2 \left[\cos(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_2 + \left[\frac{1}{2} mL^2 \text{sen}(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_2^2 + \frac{3}{2} mgLC_1 = \tau_1 + L(-f_x S_1 + f_y C_1) \quad (26)$$

$$\left[\frac{1}{2} mL^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_1 + \left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \ddot{q}_2 - \left[\frac{1}{2} mL^2 \text{sen}(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} mgLC_2 = \tau_2 + L(-f_x S_2 + f_y C_2) \quad (27)$$

Para la implementación de la segunda fase del proceso se proponen trayectorias articulares, pudiendo ser que se soliciten otras prestaciones (obtención de las evoluciones temporales de las trayectorias articulares para ciertas evoluciones de los pares de torsión), tal como se explicitó en la sección 4.1 en la explicación de la 2^{DA} fase del proceso metodológico. Se desarrolla la segunda fase en la próxima sección con valores numéricos para los parámetros dinámicos. Se obtienen distintos resultados para los pares aplicados en cada una de las articulaciones para diferentes trayectorias articulares.

5. Resultados

En el marco del presente caso de estudio, se establece que la carga exterior \mathbf{F} que se aplica en el extremo del efector terminal del manipulador es un peso vertical. Se proponen los valores: $m = 10\text{kg}$, $L = 1\text{m}$, $F = 100\text{N}$ y $g = 10\text{ m/seg}^2$. La situación física se ilustra en la figura 5 para la situación propuesta, donde la fuerza $\mathbf{F} = (0, -f_y)$ ($f_x = 0$) y las ecuaciones (26) y (27) se transforman en las ecuaciones (28) y (29) para q_1 y q_2 respectivamente.

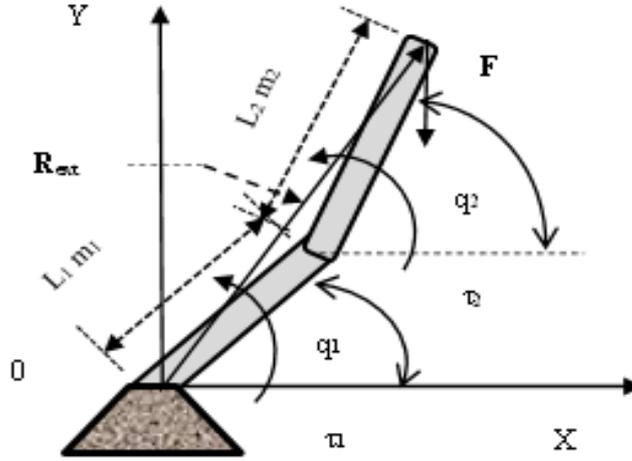


Figura 5: Manipulador robótico industrial de dos grados de libertad con carga exterior aplicada hacia abajo en su extremo.

$$\left[\frac{4}{3} mL^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} mL^2 [\cos(q_1 - q_2)] \ddot{q}_2 + \left[\frac{1}{2} mL^2 \sin(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_2^2 + \frac{3}{2} mgLC_1 = \tau_1 - f_y LC_1 \quad (28)$$

$$\left[\frac{1}{2} mL^2 \cos(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_1 + \left[\frac{1}{3} mL^2 \right] \ddot{q}_2 - \left[\frac{1}{2} mL^2 \sin(q_1 - q_2) \right] \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} mgLC_2 = \tau_2 - f_y LC_2 \quad (29)$$

En base a las expresiones (28) y (29), se desean analizar los siguientes casos:

Caso I: obtener los pares τ_1 y τ_2 cuando el robot alcanza el vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 60^\circ)$ y está en posición de equilibrio, es decir: $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$.

Caso II: para esta misma posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 60^\circ)$ y velocidades articulares nulas $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$; entonces se elimina el peso vertical ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), y con los pares de torsión obtenidos en caso anterior, se deben obtener las aceleraciones articulares que adquieren cada uno de los eslabones en ese instante.

Caso III: este caso es similar al caso I para el vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$.

Caso IV: este caso es similar al caso II con $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$ y usando los pares de torsión que en el caso III.

Caso V: este caso es similar al caso I con vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$.

Caso VI: este caso es similar al caso II con $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$ y usando los pares de torsión que en el caso V.

Caso I: se plantean las ecuaciones (28) y (29) obteniéndose τ_1 y τ_2 en base a la expresión (30).

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} 10\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \cdot 1\text{m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= \tau_1 - 100\text{N} \cdot 1\text{m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tau_1 = 75\sqrt{2} + 50\sqrt{2} \Rightarrow \tau_1 = 176,77\text{Nm} \\ \frac{1}{2} 10\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \cdot 1\text{m} \cdot \frac{1}{2} &= \tau_2 - 100\text{N} \cdot 1\text{m} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \tau_2 = 25 + 50 \Rightarrow \tau_2 = 75\text{Nm} \end{aligned} \quad (30)$$

Caso II: se plantean las ecuaciones (28) y (29) imprimiéndole al manipulador el mismo vector de posición articular de $\mathbf{q} = (45^\circ, 60^\circ)$ que en el caso anterior, siendo las velocidades articulares nulas ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$). También se adoptan los mismos pares de torsión obtenidos en el caso I ($\tau_1 = 176,77\text{Nm}$, $\tau_2 = 75\text{Nm}$) y, al eliminarse el peso vertical que soporta el efector terminal del robot, se tiene que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se cargan estos datos en las expresiones (28) y (29) y de esta forma se obtiene la expresión (31), que permite la obtención de las aceleraciones articulares $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2$ que adquiere el mecanismo en el instante en el que se elimina la carga vertical F.

$$\begin{aligned} \left[\frac{4}{3} 10kg(1m)^2 \right] \ddot{q}_1 + \frac{1}{2} 10kg(1m)^2 [\cos(45^\circ - 60^\circ)] \ddot{q}_2 + \frac{3}{2} 10kg \cdot 10 \frac{m}{seg^2} \cdot 1m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= 176,77Nm \\ \frac{1}{2} 10kg(1m)^2 [\cos(45^\circ - 60^\circ)] \ddot{q}_1 + \left[\frac{1}{3} 10kg(1m)^2 \right] \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} 10kg \cdot 10 \frac{m}{seg^2} \cdot 1m \cdot \frac{1}{2} &= 75Nm \end{aligned} \quad (31)$$

Las relaciones que se reflejan en la expresión en la expresión (31) permiten arribar a un sistema de ecuaciones en las aceleraciones articulares. En la expresión (32) se exhibe dicho sistema (prescindiendo de las unidades) y los valores de las correspondientes a estas aceleraciones al momento de quitar el peso vertical de 100N ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$).

$$\begin{aligned} 13,333 \ddot{q}_1 + 4,829 \ddot{q}_2 &= 70,7039 \\ 4,829 \ddot{q}_1 + 3,333 \ddot{q}_2 &= 50 \\ \ddot{q}_1 &= -0,2743 \frac{rad}{seg^2} \quad (horaria) \quad \& \quad \ddot{q}_2 = 15,3989 \frac{rad}{seg^2} \quad (antihoraria) \end{aligned} \quad (32)$$

Caso III: planteando las ecuaciones (28) y (29) de forma similar al caso I, tomando el vector de posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$ y con la misma posición inicial de equilibrio de $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$, se obtienen los pares de articulación: $\tau_1 = 176,77Nm$ y $\tau_2 = 150Nm$. Los pares τ_1 y τ_2 son de sentido antihorario tal como se supusieron.

Caso IV: se plantean las ecuaciones (28) y (29) de manera similar al caso II con el mismo vector de posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$ que en el caso anterior, siendo las velocidades articulares nulas ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$). También se adoptan los mismos pares de torsión obtenidos en el caso III ($\tau_1 = 176,77Nm$, $\tau_2 = 150Nm$) y $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Y de forma similar la expresión (33) muestra el siguiente sistema de ecuaciones en las aceleraciones articulares (prescindiendo de las unidades), cuya resolución proporciona los valores correspondientes a las aceleraciones articulares.

$$\begin{aligned} 13,333 \ddot{q}_1 + 3,5355 \ddot{q}_2 &= 70,7039 \\ 3,5355 \ddot{q}_1 + 3,333 \ddot{q}_2 &= 100 \\ \ddot{q}_1 &= -3,6912 \frac{rad}{seg^2} \quad (horaria) \quad \& \quad \ddot{q}_2 = 33,9194 \frac{rad}{seg^2} \quad (antihoraria) \end{aligned} \quad (33)$$

Caso V: planteando las ecuaciones (28) y (29) de forma similar al caso I y III, tomando el vector de posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$ y con la misma posición inicial de equilibrio de $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$, se obtienen los pares de articulación: $\tau_1 = 176,77Nm$ y $\tau_2 = 144,88Nm$ (ambos de sentidos antihorarios).

Caso VI: se plantean las ecuaciones (28) y (29) de manera similar al caso II y IV con el mismo vector de posición articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 345^\circ)$ que en el caso V, siendo las velocidades articulares nulas ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$). También se adoptan los mismos pares de torsión obtenidos en el caso V ($\tau_1 = 176,77Nm$, $\tau_2 = 144,88Nm$) y $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Planteando un sistema de ecuaciones similar a los casos II y IV, se obtienen las aceleraciones articulares en la expresión (34).

$$\ddot{q}_1 = -3,6912 \frac{rad}{seg^2} \quad (horaria) \quad \& \quad \ddot{q}_2 = 33,9194 \frac{rad}{seg^2} \quad (antihoraria) \quad (34)$$

Los escenarios en situación de equilibrio correspondientes a los casos I – II, III – IV y V – VI, se ilustran en las figuras 6), 7) y 8) respectivamente.

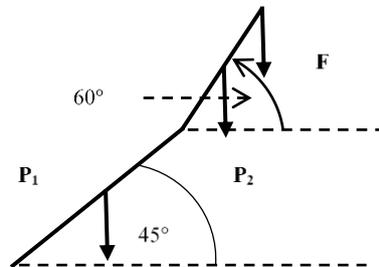


Figura 6: Escenario en situación de equilibrio de los casos I – II (para el caso II se quita la fuerza \mathbf{F}).

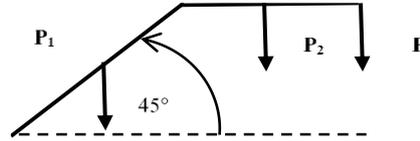


Figura 7: Escenario en situación de equilibrio de los casos III – IV (para el caso IV se quita la fuerza F).

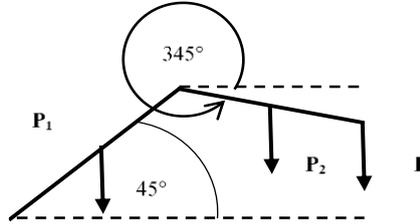


Figura 8: Escenario en situación de equilibrio de los casos V – VI (para el caso IV se quita la fuerza F).

6. Discusión de resultados

Cabe resaltar que el par de torsión $\tau_1 = 176,77\text{Nm}$ se mantiene en este valor para las diferentes configuraciones de q_2 ; habida cuenta de que en virtud de la expresión (28) y asumiendo equilibrio total ($\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ y $\ddot{q}_1 = \ddot{q}_2 = 0$), se observa que el par τ_1 depende de la posición articular $q_1 = 45^\circ$, de la fuerza F , de m y de L . Todas estas magnitudes se mantienen constantes conforme varía la posición articular q_2 . Por su parte, el par τ_2 depende de las distintas configuraciones que adopta la posición articular q_2 conforme $q_1 = 45^\circ$; haciendo notar que τ_2 crece en la medida que disminuye q_2 , llegando a su valor máximo ($\tau_2 = 150\text{Nm}$) para $q_2 = 0^\circ$ y $\cos(q_2) = 1$ (eslabón 2 horizontal del escenario de equilibrio de figura 7). Para los valores de $q_2 = 60^\circ$ y $q_2 = 345^\circ$ (escenario de equilibrio I y V de figura 6 y 8 respectivamente), el par articular τ_2 adopta valores menores que para $q_2 = 0^\circ$ ($\tau_2 = 75\text{Nm}$ para $q_2 = 60^\circ$ y $\tau_2 = 144,88\text{Nm}$ para $q_2 = 345^\circ$). Estos pares articulares son antihorarios en estos escenarios de equilibrio; dado que deben contribuir a contrarrestar el efecto del peso colgante y el efecto gravitatorio de ambos eslabones. Por su parte, las aceleraciones articulares se determinaron en cada situación quitando el peso colgante y bajo la acción de los pares articulares. En este sentido, se observa que \ddot{q}_1 se acelera en sentido horario y \ddot{q}_2 lo hace en sentido antihorario. Los valores mayores de aceleraciones articulares se registran para el escenario del caso IV ($q_2 = 0^\circ$ y $\tau_2 = 150\text{Nm}$); $\ddot{q}_1 = -3,6912 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$ & $\ddot{q}_2 = 33,9194 \frac{\text{rad}}{\text{seg}^2}$. Si bien este fenómeno mecánico también tiene lugar en las otras situaciones cuando se quita la fuerza vertical F (escenarios correspondientes a los casos II y VI); en este escenario IV es cuando se registran los valores máximos de las aceleraciones articulares, y mayor cuidado se debe tener. El fenómeno que se ha observado en banco de prueba experimental es el siguiente: el eslabón 1 experimenta la mayor aceleración hacia la línea de base del robot en sentido horario, mientras que el eslabón 2 sufre el “sacudón” en sentido antihorario producto de una importante aceleración angular de casi 34 rad/seg^2 . Por otra parte, es sumamente importante custodiar que las aceleraciones articulares no sobrepasen los valores admisibles proporcionados por el fabricante; así como también que los pares articulares sean aceptables a criterio del diseñador. Si este tipo de requisitos no se cumplen, se propone reformular los parámetros dinámicos hasta llegar a plantear nuevas ecuaciones dinámicas de movimiento. En caso de que se satisfagan estos requerimientos, se pasan estas referencias al módulo de control dinámico. Todo esto conforma la tercera fase del proceso metodológico, que se encuentra en proceso de desarrollo. A modo de cierre en lo respecta a los casos de experimentación, se asume una configuración inicial conforme al caso II (vector articular $\mathbf{q} = (45^\circ, 0^\circ)$, con el eslabón 2 moviéndose a una velocidad constante de $0,0523 \text{ rad/seg}$ y el eslabón 2 permaneciendo en reposo. La evolución temporal de la coordenada articular q_2 es $q_2 = 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t$, asumiendo que parte del reposo, y la velocidad articular del eslabón 2 es constante $\dot{q}_2 = 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$. Reemplazando en las ecuaciones (28) y (29) con los mismos valores para los parámetros dinámicos, se obtienen las siguientes evoluciones temporales para los pares articulares $\tau_1(t)$ y $\tau_2(t)$. Se muestra el proceso para deducir $\tau_1(t)$, partiendo de las segundas ecuaciones de las expresiones (28) y (29) con las aceleraciones articulares nulas. Expresiones (35) y (36).

$$\left[\frac{1}{2} mL^2 \text{sen}(q_1 - q_2) \right] \ddot{q}_2 + \frac{3}{2} mgLC_1 = \tau_1 - f_y LC_1 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{1}{2} (10\text{kg})(1\text{m}^2) \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right) \right] \left(0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \right)^2 + \frac{3}{2} (10\text{kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \right) (1\text{m}) \overbrace{\cos \left(\frac{\pi}{4} \right)}^{\sqrt{2}/2} =$$

$$\tau_1 - 100\text{N} (1\text{m}) \overbrace{\cos \left(\frac{\pi}{4} \right)}^{\sqrt{2}/2} \Rightarrow 0,01367 \text{Nm} \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right) + 150 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Nm} = \tau_1 - 100 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Nm} \Rightarrow$$

$$\tau_1 = 0,01367 \text{Nm} \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right) + \underbrace{125 \sqrt{2} \text{Nm}}_{176,77 \text{Nm}}$$

$$\frac{1}{2} mgLC_2 = \tau_2 - f_y LC_2 \Rightarrow \frac{1}{2} (10\text{kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{seg}^2} \right) (1\text{m}) \overbrace{\cos \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right)}^{50 \text{Nm}} =$$

$$\tau_2 - 100 \text{Nm} (1\text{m}) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right) \Rightarrow \tau_2 = 150 \text{Nm} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right)$$

El primer término de la expresión (35) es la contribución de la aceleración centrípeta a la evolución temporal del par de torsión $\tau_1(t)$. Al anular este término, se obtiene $\text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} t' \right) = 0 \Rightarrow t' = 15 \text{seg}$, lo cual significa que el instante en que esta contribución cambia de signo es a los 15seg. No obstante, cabe destacar que dicha contribución se considera despreciable frente a la contribución del par gravitatorio de $125\sqrt{2}\text{Nm} = 176,77\text{Nm}$. Es dable observar, que esta contribución dada por $0,01367 \text{Nm} \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} - 0,0523 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \cdot t \right)$ alcanza su valor máximo para $t = 0 \text{seg}$, obteniéndose: $0,01367 \text{Nm} \left(\text{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 0,01367 \text{Nm} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,009666 \text{Nm}$. Este valor es despreciable frente a la contribución del par gravitatorio de $125\sqrt{2}\text{Nm} = 176,77\text{Nm}$.

Por su parte, al anular el factor del coseno en la ecuación (36), se llega a que a los 30 seg el par τ_2 es nulo y el eslabón 2 adopta la configuración vertical ($q_2 = 90^\circ$) de la figura (9).

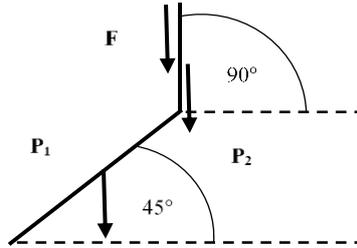


Figura 9: Escenario en situación de equilibrio de los casos V – VI (para el caso IV se quita la fuerza **F**).

Si bien para la presente configuración el par τ_2 es nulo, es importante considerar que la fuerza **F** y **P**₂ se aplican en forma directa sobre la articulación 2. Por consiguiente, es necesario estudiar el efecto que producen ambas fuerzas en conjunto sobre dicha articulación.

7. Conclusiones y futuras líneas de investigación

En la presente sección se exhiben las conclusiones de este trabajo, así como las futuras líneas de investigación.

7.1. Conclusiones

A nivel de conclusiones: 1) se analiza el problema propuesto en el marco de un modelo de proceso de investigación de la figura (2). 2) se emplean tópicos fundamentales de la Mecánica Analítica como las coordenadas generalizadas

y el principio de los trabajos virtuales. 3) se propone la implementación de un proceso metodológico para el análisis dinámico de robots manipuladores en base a la formulación Lagrangiana. 4) se realiza un análisis de caso para un robot manipulador de dos grados de libertad en el contexto del proceso metodológico propuesto. 5) se presenta una discusión de los resultados obtenidos en términos de pares y aceleraciones articulares teniendo como base distintas configuraciones del dispositivo; tanto en situación de equilibrio como de movimiento. 6) Como un aspecto central en lo que se refiere a la originalidad del presente artículo, se destaca la conformación en forma coordinada de cuatro tópicos; a saber:

i) La formulación detallada de las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

ii) Su aplicación al análisis de un robot manipulador.

iii) El uso de insumos (los parámetros dinámicos de un manipulador, tales como: masas, longitudes, momentos de inercia de eslabones y las coordenadas generalizadas definidas por el diseñador); que junto con la aplicación de la mecánica lagrangiana y las trayectorias articulares propuestas, permiten obtener el producto de salida reflejado en los pares de torsión a aplicar en las articulaciones del dispositivo, de acuerdo a los requerimientos del usuario. Todo esto en el marco de un proceso sistematizado de investigación retroalimentado, lo cual se refleja en la reformulación de los citados parámetros en caso de que dichos requerimientos no se satisfagan.

iv) El aval de un caso de estudio que hace uso de los elementos mencionados con la consiguiente discusión de resultados.

v) Cabe señalar que este proceso metodológico es muy importante para el grupo de investigación, a los efectos de encauzar los desarrollos subsiguientes referidos a la formulación y pruebas de los diferentes algoritmos de control.

7.2. Futuras Líneas de investigación

A nivel de futuras líneas de investigación: 1) se continua con el desarrollo de la tercera fase del proceso metodológico; tanto en lo que se refiere a la reformulación de parámetros dinámicos, como en el diseño de los algoritmos de control. 2) en este sentido, se analiza la determinación de los valores de parámetros dinámicos del robot (momentos de inercia, centros de masa y coeficientes de fricción) mediante técnicas de identificación paramétrica, tales como modelos de regresión. 3) se está trabajando en el diseño y evaluación de diversos algoritmos de control (compensación de gravedad, control de movimiento y control adaptable), empleando los pares de torsión obtenidos como entrada al sistema. 4) se continúan las pruebas del modelo analítico obtenido en banco experimental donde los eslabones, actuadores y sistemas de transmisión se construyen en el laboratorio de nuestra facultad. 5) se está trabajando en la introducción de fricciones viscosas en las articulaciones, y así medir la respuesta del sistema en condiciones similares a los casos experimentales estudiados en condiciones ideales.

8. Referencias

- [1] Saltaren, R., “Robótica Aplicada. Analisis y Diseño de Robots Paralelos y Seriales con Matlab”. Ed. Dextra, 2014.
- [2] Reyes Cortés, F., “Mecatrónica, Control y Automatización”. Ed. Alfaomega, México, 2013.
- [3] Sanmiguel Rojas, E. Hidalgo Martines, M. “Análisis de Mecanismos”. Ed. Paraninfo, España, 2014.
- [4] Meriam, J.L. “Mecánica para ingenieros, Dinámica. Ed. Reverte. Estados Unidos, 2020
- [5] Taylor, J., “Mecánica Clásica”. Ed. Reverte, España, 2018.
- [6] Miranda Colorado, R., “Cinemática y Dinámica de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2016.
- [7] Chen, V. T., “Linear System Theory and Desing”, Oxford University Press, Estados Unidos, 4º Edicion, 2012.
- [8] Ray, S. and Shamanna, J. “On virtual displacement and virtual work in lagrangian dynamics”, European Journal of Physics, vol. 27, 2006.
- [9] Kelly, R., “Control de Robots Manipuladores”. Ed. Pearson Prentice Hall, España, 2003.
- [10] Reyes Cortés, F., “Robótica – Control de Robots Manipuladores”. Ed. Alfaomega, México, 2011.
- [11] A Review of Fundamentals of Lyapunov Theory.Chutipphon Pukdeboon. The Journal of Applied Science, [2011] Vol. 10 No. 2.