



Optimización topológica basada en curvas de nivel: metodología y aplicaciones.

Guzmán Domínguez-Domínguez^{1,2}, Xabier Justo^{1,2}, Luis M. Matey^{1,2}

¹ CEIT-Basque Research and Technology Alliance (BRTA), Manuel Lardizabal 15, 20018 Donostia / San Sebastián, Spain.
gdominguezd@ceit.es, xjusto@ceit.es, lmatey@ceit.es

² Universidad de Navarra, Tecnun, Manuel Lardizabal 13, 20018 Donostia / San Sebastián, Spain.

El presente estudio presenta una metodología para la generación de estructuras ligeras a través de la optimización topológica basada en el método de las curvas de nivel o level-set methods en dominios de diseño tridimensionales considerando material anisótropo. Inicialmente, se lleva a cabo una revisión bibliográfica que aborda las características distintivas y la aplicabilidad de diversos métodos de optimización topológica y de orientación del material. Posteriormente, se detalla la estructura de los algoritmos empleados junto a fundamentos matemáticos de los mismos. También se analizan los aspectos inherentes a su implementación, a su integración con programas de simulación comerciales y se evalúa el impacto de sus diversos parámetros en los resultados obtenidos. Por último, se extraen conclusiones acerca de los aspectos más relevantes en el desarrollo de algoritmos de optimización topológica basados en curvas de nivel, acompañadas de una serie de recomendaciones generales destinadas a potenciar la convergencia de dichos algoritmos. Se han obtenido unos resultados satisfactorios, probando la capacidad de dichos métodos de optimizar los mencionados dominios de diseño.

1. Introducción

La optimización topológica es una técnica de diseño que ha ganado relevancia en los últimos años. Consiste en emplear modelos matemáticos para determinar la mejor distribución de material dentro de un dominio de diseño, maximizando el rendimiento funcional del componente según una función objetivo. Este proceso utiliza técnicas de optimización matemática basadas en gradientes para guiar la evolución del diseño hacia soluciones óptimas [1]. Inicialmente aplicada al diseño mecánico, esta metodología se ha extendido a otros campos como la mecánica de fluidos y el electromagnetismo [2].

Los problemas de optimización topológica suelen formularse como problemas de optimización restringida. En el caso estructural, el objetivo principal es minimizar la flexibilidad total del diseño, respetando restricciones como el volumen del material. Una ventaja clave de estos métodos es su capacidad para incorporar restricciones adicionales, como límites en las tensiones máximas [3] o de la longitud de escala mínima [4], adaptándose a requisitos específicos.

Cuando estas técnicas se aplican a materiales anisótropos, la complejidad aumenta, ya que la orientación del material influye directamente en la topología óptima. En estos casos, es necesario incluir métodos que ajusten simultáneamente la distribución y la orientación del material, dado que la distribución de esfuerzos depende de esta última.

Aunque existen numerosos métodos basados en curvas de nivel para la optimización topológica, muchos están limitados a materiales isótropos o a problemas bidimensionales. Este estudio propone un enfoque preliminar para dominios tridimensionales, enfocado en materiales anisótropos como plásticos reforzados con fibras. El procedimiento desarrollado combina el método *level-set* con un enfoque evolutivo para determinar la orientación óptima del material. Además, se utiliza el software Abaqus para calcular sensibilidades y gradientes necesarios. El método *level-set* se seleccionó por su capacidad para evitar regiones con densidad intermedia, mejorando la precisión de los resultados, mientras que los métodos evolutivos permiten una integración eficiente con herramientas de cálculo externas, optimizando el proceso de diseño.

2. Estado del arte

2.1 Optimización de la distribución de material

El concepto de optimización topológica fue propuesto por Bendsøe y Kikuchi [5] en la década de 1980, y desde entonces ha tenido un rápido crecimiento debido a su elevada flexibilidad y aplicabilidad en el sector del diseño mecánico. Existen varias familias de métodos de optimización topológica, entre las que destacan los métodos basados en la densidad, métodos basados en curvas de nivel o *level-set methods*, métodos evolutivos, y métodos basados en atributos o *feature-based methods*. Los métodos basados en la densidad, como el método *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) [6] y sus extensiones [7,8], asignan un valor escalar llamado densidad (no confundir con la propiedad que relaciona masa con volumen) comprendido en el intervalo [0,1] a cada elemento del dominio discretizado. Este valor se relaciona directamente con la ausencia o presencia de material. El módulo de elasticidad de la región es por lo tanto interpolado de acuerdo con su densidad, por ejemplo, con el siguiente esquema [9]:

$$E_i = E_{min} + x_i^p (E_0 - E_{min}) \quad (1)$$

Donde E_{min} es un valor residual para el módulo de elasticidad de las zonas vacías empleado en evitar inestabilidades numéricas, x_i^p es el valor de la densidad en el elemento i elevado al coeficiente de penalización p , y E_0 es el valor del módulo elástico del material empleado en el dominio de diseño. El coeficiente de penalización fuerza al diseño a abandonar densidades intermedias y converger hacia una solución 0/1. Los métodos basados en la densidad emplean optimizadores basados en gradientes, como el método *Method of Moving Asymptotes* (MMA) [10].

Los métodos evolutivos presentan similitudes a los métodos basados en la densidad. Sin embargo, la densidad de cada elemento presenta un valor binario en cada momento. Su valor se actualiza en base a la sensibilidad de cada elemento respecto a la función objetivo, eliminando los elementos situados en regiones con menor nivel de carga y reforzando aquellas zonas con mayor nivel de carga. Dichos métodos, como el método *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* [11], pretenden evitar los problemas asociados a áreas con densidad intermedia presentes en los métodos basados en la densidad, pero son más susceptibles a converger hacia mínimos locales [2].

Los métodos basados en *level-set*, emplean una curva de nivel de una función escalar definida sobre el dominio de diseño para separar las regiones sólidas y vacías. La evolución de las curvas de nivel de dicha función escalar se emplea para actualizar el dominio de diseño. La evolución de dicha función puede realizarse a través de la

resolución de una ecuación de difusión-advención conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi, o a través de métodos de optimización matemática [12].

2.2 Optimización de la orientación del material

Con el objetivo de solventar este problema, se han desarrollado diversos métodos que pretenden encontrar una orientación óptima del material a medida que se produce la evolución del dominio de diseño. Entre ellos destaca el método *Discrete Material Optimization* (DMO) [13] y el método *Continuum Angle Fiber Orientation* (CFAO) [14]. El primer método es una extensión del método SIMP, donde se dispone de una serie finita de orientaciones candidatas modeladas como diversos materiales con sus respectivas variables de diseño. Tras la ejecución del algoritmo, solo una de las variables de diseño correspondientes al material con la orientación óptima posee un valor igual a uno, mientras que el resto tiene un valor igual a cero. Por el contrario, el método CFAO se basa en la obtención de las sensibilidades de la función objetivo respecto al ángulo de orientación, definido sobre un espacio continuo de posibles orientaciones. Dichas sensibilidades se integran en el mismo optimizador que la distribución de material. También existen métodos que combinan ambas técnicas, como el método *Discrete-Continuous Parametrization* (DCP) [15], que consiste en definir una serie de intervalos representativos de orientaciones sobre un dominio continuo. A continuación, se selecciona una orientación representativa de cada intervalo para realizar una optimización discreta del ángulo. Una vez se ha obtenido una solución, se realiza una optimización continua del ángulo en el intervalo correspondiente. De esta forma, se reduce el riesgo de converger hacia mínimos locales.

Por último, es posible desarrollar métodos evolutivos para obtener la distribución del material. Por ejemplo, en el método *Natural Evolution Anisotropic Material* (NEAM) [16] la distribución de orientaciones se obtiene a través de una serie de rotaciones sucesivas de la orientación del material hacia la dirección principal que minimiza la función objetivo. Este método puede implementarse de forma desacoplada del problema de optimización del material, lo que lo hace especialmente adecuado en aquellos casos en los que no se dispone de acceso al código de elementos finitos.

3. Metodología

3.1 Descripción general del problema

El problema de optimización topológica basado en *level-set* puede definirse como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{min:} \\ \text{s.t.:} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} C = \int_{\Omega} H(\phi_e) u_e^T k_e u_e d\Omega \\ G_0 = \int_{\Omega} H(\phi_e) d\Omega - V_0 \leq 0 \\ KU = F \end{array} \quad (2)$$

Donde C es la flexibilidad del dominio de diseño, que actúa como función objetivo, Ω representa el dominio de diseño, ϕ_e es la función *level-set*, $H(\cdot)$ denota a la función de Heaviside, y V_0 es el volumen objetivo. La función *level-set* se define como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi < 0 \quad \text{si } x \in \Omega_s \\ \phi = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega \\ \phi < 0 \quad \text{si } x \notin \Omega_s \end{array} \right. \quad (3)$$

Donde Ω_s representa a las regiones sólidas del dominio de diseño, y $\partial\Omega$ es la frontera entre las regiones sólidas y vacías. La función de Heaviside empleada, siguiendo un esquema basado en el algoritmo *level-set* discreto propuesto por Challis [17], se define de la siguiente forma:

$$H(x) = \begin{cases} 10^{-4} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

En este caso, la distribución de material se ha desacoplado de la orientación del ángulo. La actualización del dominio de diseño se realiza a través de la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi definida a continuación:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v_n \|\nabla \phi\| = 0 \quad (5)$$

Integrándola a través de un procedimiento de diferencias finitas se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + v_n \|\nabla \phi\| \Delta t \quad (6)$$

El término Δt se refiere a un pseudo-tiempo que se define, por motivos de estabilidad, siguiendo las condiciones de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL):

$$\Delta t \leq \frac{h}{\max |v_n|} \quad (7)$$

Donde el término h es la longitud característica de la malla empleada. El término v_n hace referencia a la velocidad normal de movimiento de la curva de nivel que separa las regiones sólidas y vacías. Se define como [17–19]:

$$v_n = -\epsilon_{ij}^T C_{ijkl} \epsilon_{kl} + \lambda + \frac{(V - V_0)}{p} \quad (8)$$

Los parámetros λ y p son unos valores empleados en la implementación de un método basado en *augmented Lagrange* para incluir las restricciones en la función objetivo. Dichos parámetros se actualizan en cada iteración según el siguiente criterio:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{\int_{\Omega} H(\phi) d\Omega - V_0}{p^k} \quad (9)$$

$$p^{k+1} = \alpha p^k \quad (10)$$

Donde α es un valor escalar fijo comprendido en el intervalo [0,1]. La velocidad asociada a cada elemento es filtrada con aquellas de sus elementos circundantes siguiendo un filtro de la media, para evitar la aparición de patrones de tablero de ajedrez y otras inestabilidades numéricas. Esto es:

$$\tilde{v}_n^e = \frac{1}{|F|} \int_F v_n^e dF \quad (11)$$

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^e\| \leq r_f\} \quad (12)$$

Donde el parámetro r_f se corresponde con el radio del filtro y $|F|$ a una métrica específica del área de influencia del filtro. Esta toma el valor del área en dominios bidimensionales y del volumen en dominios tridimensionales.

Es preciso destacar que la metodología expuesta no es capaz de introducir regiones vacías dentro de las regiones sólidas. En su lugar, los métodos basados en *level-set* modifican la topología deformando la frontera entre las regiones sólidas y vacías previamente existentes [20]. Por esta razón, es necesaria la definición de una topología inicial consistente en una distribución de regiones sólidas y vacías. Por norma general, se disponen una serie de agujeros redondos uniformemente repartidos a lo largo del dominio de diseño. Por lo tanto, los métodos de optimización topológica basados en *level-set* pueden considerarse como métodos de optimización de forma en su lugar. No obstante, es posible dotar a dichos algoritmos de capacidad para generar regiones vacías dentro de regiones sólidas mediante la adición de un criterio de generación de agujeros basados en derivadas topológicas [21]. En este caso, no se ha incluido dicha formulación debido a las dificultades existentes en la obtención de dichas derivadas topológicas en un dominio de diseño 3D anisótropo. Si bien su cálculo es relativamente sencillo en casos simples, en dominios de diseño con las características del presente estudio, se requiere llevar a cabo una serie de cálculos complejos para obtenerlas [22].

Con el objetivo de orientar el material, se ha desarrollado una metodología evolutiva. Para ello, el material se orienta en dirección a la primera dirección principal en las regiones sometidas a tracción, y en dirección a la tercera dirección principal en las regiones sometidas a compresión. Esto es:

$$n_i^e = \begin{cases} n_1^e & \text{si } |\sigma_1^e| > |\sigma_3^e| \\ n_3^e & \text{si } |\sigma_1^e| < |\sigma_3^e| \end{cases} \quad (13)$$

3.2 Algoritmo de optimización

Las ecuaciones anteriormente planteadas han sido implementadas dentro de una serie de scripts que se ejecutan en Matlab®. Además, se ha usado Abaqus® para realizar los cálculos que implican el uso del método de los elementos finitos y para visualizar los resultados. El esquema general del algoritmo empleado se encuentra en la Figura 1. Los bloques sombreados se corresponden con aquellas etapas en las que se hace uso de Abaqus. La conexión entre ambas plataformas se ha realizado a través de una serie de scripts que hacen uso de la interfaz de Python que dispone Abaqus.

Se ha asumido que el algoritmo ha alcanzado la convergencia cuando el volumen actual del dominio de diseño se encuentra dentro de un rango predefinido y la variación de la función objetivo, la flexibilidad total de dicho dominio tiene una variación respecto a la iteración anterior inferior a un cierto umbral.

3.3 Caso de uso

Con el objetivo de demostrar la funcionalidad y evaluar el rendimiento del código, se ha usado un dominio de diseño tridimensional equivalente a una viga empotrada en voladizo. La viga tiene unas dimensiones de 500 mm de longitud, 300 mm de altura y 240 mm de profundidad. Se ha discretizado usando elementos hexaédricos de primer orden con integración completa (C3D8, siguiendo la nomenclatura de Abaqus), con un tamaño de 5 mm. El material empleado equivale al material compuesto Toray T-300, con las propiedades mecánicas listadas en la Tabla 1. En la Figura 2, se encuentra un gráfico con una representación del dominio de diseño y de las condiciones de contorno aplicadas. En este caso, se ha establecido un volumen objetivo comprendido entre el 14% y el 16% del volumen total del dominio de diseño, y una variación de la función objetivo inferior al 0,5% para asumir la convergencia del algoritmo.

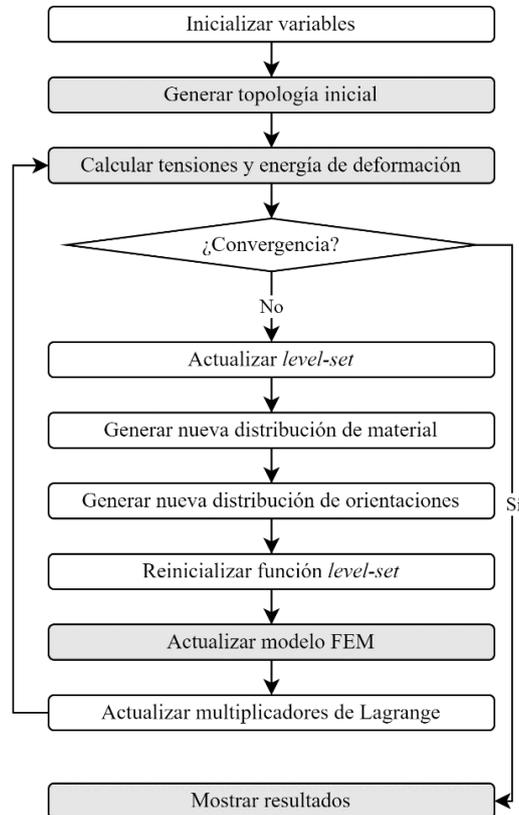


Figura 1. Algoritmo de optimización (en los bloques sombreados se ha hecho uso de Abaqus).

Tabla 1. Propiedades del material

E_f (MPa)	E_t (MPa)	$\nu_{12,13}$ (-)	ν_{23} (-)	$G_{12,13}$ (MPa)	G_{23} (MPa)	V_f (-)
180.000	10.000	0,28	0,35	6.900	3.500	0,6

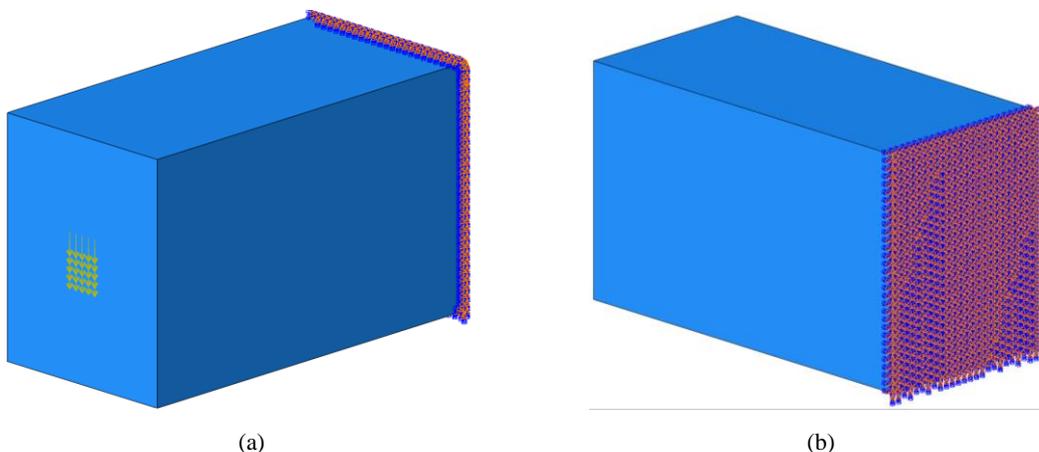


Figura 2. Geometría empleada en el caso de uso. (a) Cara frontal. (b) Cara posterior

4. Resultados

En la Figura 3 se encuentra la geometría inicial y final obtenida por el algoritmo. La geometría inicial consiste en una serie de agujeros uniformemente distribuidos, así como un conjunto de elementos vacíos situados en las esquinas. También se observa que las direcciones del material siguen la dirección longitudinal del dominio de diseño. En la solución final se observa que los agujeros inicialmente generados han evolucionado, trasladándose, variando su tamaño y combinándose entre ellos.

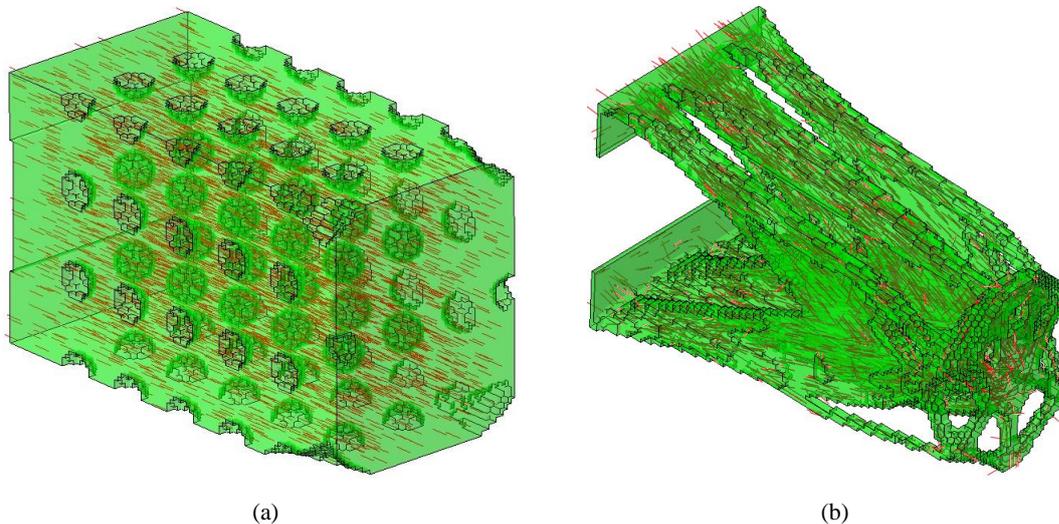


Figura 3. Resultados del algoritmo de optimización topológica. (a) Geometría y orientaciones iniciales. (b) Geometría y orientaciones finales.

La Figura 4 contiene una serie de detalles, donde se aprecia la distribución de orientaciones en la solución final. Se observa que las direcciones tienden a apuntar hacia la zona de aplicación de las cargas en las regiones intermedias del dominio de diseño. En la región frontal, debido a la compleja topología obtenida, las orientaciones tienden a apuntar hacia dicha zona, pero evitando aquellas direcciones que cruzan zonas vacías.

Se puede observar que ciertos elementos presentan orientaciones significativamente diferentes en comparación con los elementos que los rodean. En la Figura 4a se destacan algunos de estos casos. Asimismo, se identifican regiones que han sido intencionadamente forzadas a permanecer dentro del dominio de diseño, a pesar de que, desde un punto de vista estructural, no contribuyen en gran medida a maximizar la rigidez del componente. Esta decisión responde a la necesidad de incorporar restricciones de diseño, como por ejemplo, la ubicación de elementos de unión con otros componentes. Estas regiones también se encuentran señaladas en la Figura 4a.

5. Discusión

La aplicación del algoritmo de optimización topológica permite generar estructuras optimizadas a partir de un cierto dominio de diseño. La estructura obtenida cumple con los objetivos propuestos, que son disminuir el volumen hasta un 15% del volumen original del dominio mientras se minimiza la flexibilidad del componente y a su vez se orienta el material en la dirección adecuada. No obstante, se han detectado algunas dificultades asociadas a este proceso de optimización. En primer lugar, la convergencia del algoritmo depende enormemente del valor con el que se inicia los parámetros λ y p . Elegir un valor de λ y/o de p demasiado grande y pequeño respectivamente, resulta en un mayor peso a la restricción de volumen respecto a la rigidez de la pieza. Esto hace que el algoritmo tienda a eliminar material con demasiada facilidad, pudiendo generarse vacíos en zonas que soportan y transmiten cargas. Esto genera modelos con una respuesta muy inestable y una gran tendencia a la divergencia. Por el contrario, si dichos valores son demasiado pequeños y grandes respectivamente, tienden a infravalorar la restricción de volumen, por lo que el proceso de optimización se ve limitado y se requerirán un gran número de iteraciones hasta converger hacia una estructura optimizada. Se ha detectado que el uso de una combinación de λ y p cuya suma es del orden de magnitud que la energía de deformación promedio de la estructura en la configuración inicial favorece la convergencia y evita dichos problemas asociados con los valores extremos de estos parámetros. A su vez, un número excesivo de iteraciones puede provocar una respuesta inestable en el modelo, ya que dichos parámetros tienden a crecer demasiado cuando el número de iteraciones es alto. El uso de criterios de parada muy restrictivos, o la selección incorrecta de los parámetros λ y p , favorecen la aparición de este problema.

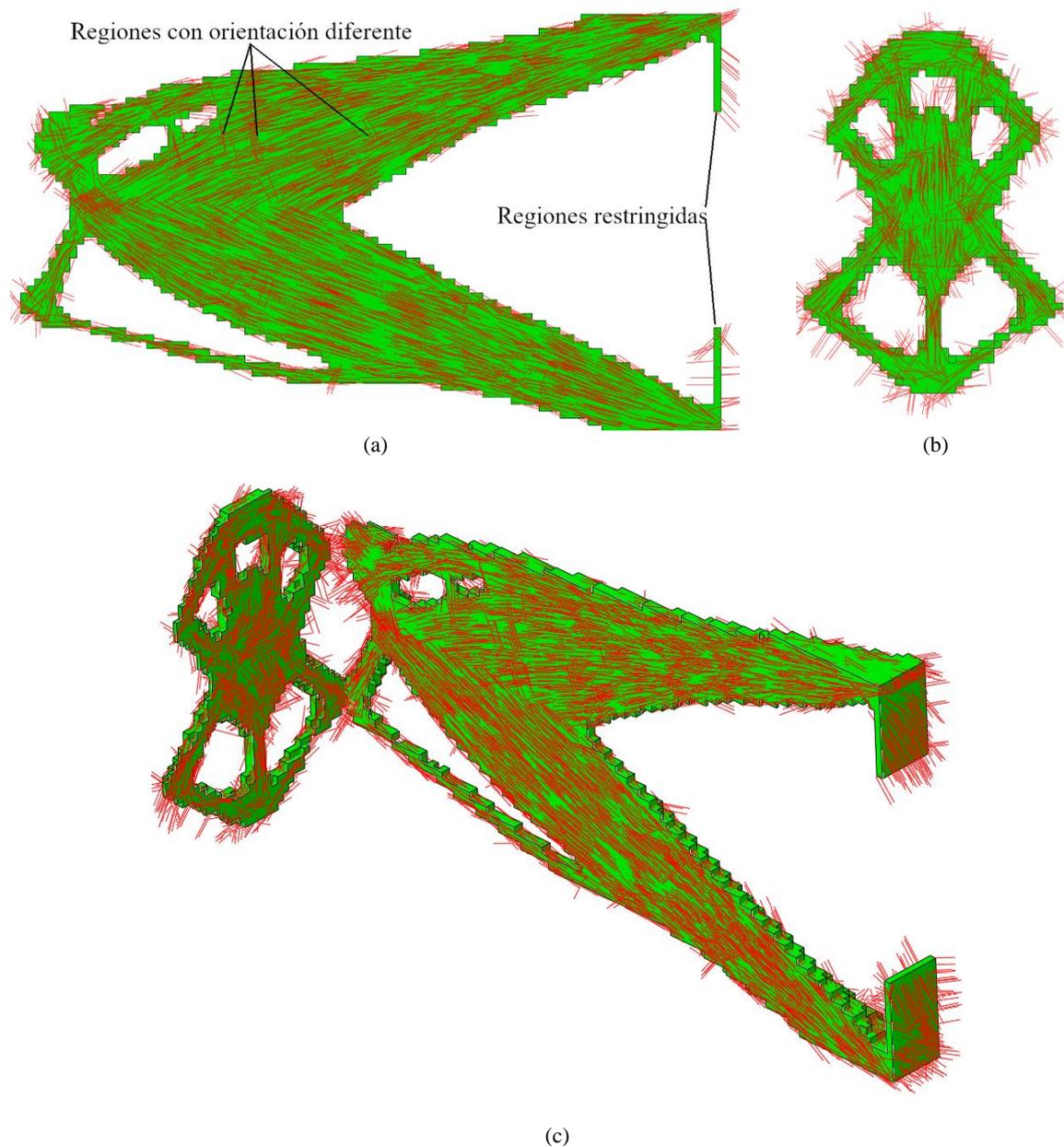


Figura 4. Detalles del resultado obtenido. (a) Vista lateral de la geometría final. (b) Vista frontal de la geometría final. (c) Vista isométrica de la disposición de ambos detalles.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es la independencia de la solución con respecto al mallado y a la geometría inicial. En el caso del mallado, la aplicación de filtros en el cálculo de la velocidad de movimiento puede ser una estrategia efectiva para abordar este desafío [23]. Sin embargo, la solución final sigue siendo dependiente de la distribución inicial de material. Como se ha mencionado previamente, los algoritmos basados en *level-set* requieren de una topología inicial, que posteriormente es deformada hasta la obtención de la solución final. Esta distribución inicial de material puede forzar al algoritmo a converger hacia mínimos locales, especialmente cuando no se emplean métodos que permitan la generación de agujeros dentro de las regiones sólidas.

6. Conclusiones

Del presente estudio se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. Los métodos *level-set* son herramientas robustas y eficaces para la optimización topológica, especialmente cuando se combinan con métodos evolutivos de orientación del material. Su implementación es viable mediante software comercial como Abaqus.
2. La orientación del material es clave para obtener soluciones óptimas, ya que desviaciones significativas pueden comprometer la rigidez y la convergencia global.

3. Es crucial inicializar adecuadamente los parámetros de *Augmented Lagrange* (λ y p) para evitar divergencias o costos computacionales elevados. Una guía práctica para su selección es garantizar que los términos dependientes de estos parámetros sean del mismo orden de magnitud que la velocidad promedio en la curva de nivel cero de la función *level-set*. Además, un número excesivo de iteraciones puede generar inestabilidades en la solución.
4. La topología inicial influye significativamente en la solución final y la convergencia. La presencia de grandes vacíos dificulta el crecimiento de regiones sólidas, por lo que se recomienda partir de una topología inicial con amplias regiones sólidas y emplear un procedimiento de actualización de la función *level-set* que priorice la eliminación de material para favorecer la convergencia.

7. Referencias

- [1] Bendsøe MP, Sigmund O. *Topology Optimization*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, (2004).
- [2] Sigmund O, Maute K. "Topology optimization approaches: A comparative review". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **48**, 1031–55 (2013).
- [3] Moter A, Abdelhamid M, Czekanski A. "Direction-oriented stress-constrained topology optimization of orthotropic materials". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **65**, 177 (2022).
- [4] Aage N, Giele R, Andreasen CS. "Length scale control for high-resolution three-dimensional level set-based topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **64**, 1127–39 (2021).
- [5] Bendsøe MP, Kikuchi N. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method". *Comput Methods Appl Mech Eng*, **71**, 197–224 (1988).
- [6] Bendsøe MP, Sigmund O. Topology optimization by distribution of isotropic material. *Topology Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 1–69 (2004).
- [7] Stolpe M, Svanberg K. "An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **22**, 116–24 (2001).
- [8] Yang Z, Fu K, Zhang Z, Zhang J, Li Y. "Topology optimization of 3D-printed continuous fiber-reinforced composites considering manufacturability". *Compos Sci Technol*, **230**, (2022).
- [9] Liu K, Tovar A. "An efficient 3D topology optimization code written in Matlab". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **50**, 1175–96 (2014).
- [10] Svanberg K. "The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization". *Int J Numer Methods Eng*, **24**, 359–73 (1987).
- [11] Huang X, Xie YM. "Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials". *Comput Mech*, **43**, 393–401 (2009).
- [12] Van Dijk NP, Maute K, Langelaar M, Van Keulen F. "Level-set methods for structural topology optimization: A review". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **48**, 437–72 (2013).
- [13] Stegmann J, Lund E. "Discrete material optimization of general composite shell structures". *Int J Numer Methods Eng*, **62**, 2009–27 (2005).
- [14] Jiang D, Hoglund R, Smith DE. "Continuous fiber angle topology optimization for polymer composite deposition additive manufacturing applications". *Fibers*, **7**, (2019).
- [15] Luo Y, Chen W, Liu S, Li Q, Ma Y. "A discrete-continuous parameterization (DCP) for concurrent optimization of structural topologies and continuous material orientations". *Compos Struct*, **236**, (2020).
- [16] Safonov AA. "3D topology optimization of continuous fiber-reinforced structures via natural evolution method". *Compos Struct*, **215**, 289–97 (2019).
- [17] Challis VJ. "A discrete level-set topology optimization code written in Matlab". *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **41**, 453–64 (2010).
- [18] Luo J, Luo Z, Chen L, Tong L, Wang MY. "A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization". *J Comput Phys*, **227**, 5561–81 (2008).
- [19] Allaire G, Dapogny C, Jouve F. *Shape and topology optimization*. Vol. 22, Elsevier B.V., (2021).
- [20] Allaire G, De Gournay F, Jouve F, Toader A-M. "Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method". *Control and Cybernetics*, **1**, 59–80 (2005).
- [21] Eschenauer HA, Kobelev V V, Schumacher A. "Bubble method for topology and shape optimization of structures", Springer-Verlag, 1994.
- [22] Giusti SM, Ferrer A, Oliver J. "Topological sensitivity analysis in heterogeneous anisotropic elasticity problem. Theoretical and computational aspects". *Comput Methods Appl Mech Eng*, **311**, 134–50 (2016).
- [23] Bourdin B. "Filters in topology optimization". *Int J Numer Methods Eng*, **50**, 2143–58 (2001).