



Optimización topológica de alta resolución mediante algoritmos multinivel y uso de mallados cartesianos

J.M. Navarro-Jiménez, A. Martínez-Martínez, R. Merli, E. Nadal, J.J. Ródenas

Instituto de Ingeniería Mecánica y Biomecánica (I2MB), Universitat Politècnica de València, jonaji@upv.es, anmar29@upv.es, ramergis@upvnet.upv.es, ennaso@upvnet.upv.es, jironena@mcm.upv.es

Las herramientas estándar de optimización topológica estructural son capaces de proponer una distribución óptima de material en un dominio definido, dadas unas cargas. Uno de los métodos más populares en este ámbito es el método SIMP ("Solid Isotropic Material with Penalization"), el cual subdivide el dominio de diseño en celdas y genera una distribución de material optimizada. Si se busca obtener un componente con detalles topológicos pequeños (por ejemplo, estructuras de tipo trabecular), el coste computacional se vuelve excesivo, puesto que se ha de aumentar drásticamente el número de celdas en las que se subdivide el dominio de diseño.

Para superar este inconveniente, el presente trabajo propone un método de optimización topológica de dos niveles en tres pasos principales. En primer lugar, se obtiene una distribución de material de baja resolución mediante el método SIMP. A continuación, se utiliza una técnica de equilibrado que proporciona continuidad en las tracciones entre celdas adyacentes. Por último, se genera un nuevo problema local de optimización topológica en cada celda (resolución alta) que se resuelve nuevamente mediante el SIMP, tomando como datos de entrada la densidad y las tracciones equilibradas provenientes del problema de baja resolución.

La distribución de material proporcionada por la solución de baja resolución tiene en cuenta un comportamiento de material homogéneo e isotrópico en cada una de las celdas. No obstante, una vez resuelto el problema de optimización en la resolución fina, es de esperar que la nueva distribución de material dentro de cada celda resulte en diferentes propiedades de material homogéneas. Entonces, las nuevas distribuciones optimizadas de las celdas cambian la rigidez de la discretización en el nivel de baja resolución. Dado que el campo de tracciones equilibradas en una celda depende de la solución elástica del problema de baja resolución, es necesario definir un proceso iterativo para hacer converger el algoritmo de optimización.

En este trabajo se propone un proceso iterativo del algoritmo de optimización multinivel descrito, donde se fija la distribución de densidades obtenida en el primer paso de optimización de baja resolución, y se modifica el comportamiento mecánico de las celdas con una técnica de homogeneización. Mediante este método es posible obtener de manera eficiente estructuras trabeculares estructuralmente óptimas utilizando métodos basados en densidad, lo cual es hoy en día inalcanzable, si se utilizan las metodologías actuales, utilizando medios de computación estándar.

1. Introducción

La optimización de componentes mecánicos representa un gran desafío en los campos científico e ingenieril. Antes del enorme desarrollo de la informática, la optimización estructural era el resultado de un largo proceso de prueba y error. Sin embargo, los crecientes requisitos económicos, industriales y sociales exigen procesos automatizados para desarrollar estructuras optimizadas que superen la velocidad de los procedimientos tradicionales.

Uno de los métodos más populares, el conocido como “*Solid Isotropic Material with Penalization*” (SIMP) [1-3] puede proporcionar resultados razonables para resolver modelos de gran tamaño utilizando una formulación relativamente simple. Otros métodos, como los evolutivos [4] o los métodos basados en “level-set” [5], han demostrado resultados satisfactorios.

Dado que muchas estructuras optimizadas por la naturaleza presentan topologías trabeculares que funcionan eficientemente con distribuciones de material ligero, sería altamente deseable reproducir esta trabecularidad con alta resolución como resultado de problemas de optimización topológica. De hecho, estas estructuras trabeculares abarcan múltiples escalas de longitud y, según [6], han demostrado su versatilidad para soportar variaciones de carga con respecto a las establecidas en el diseño inicial. Además, también son más tolerantes a las inestabilidades de las barras, ya que el pandeo local puede controlarse directamente mediante el tamaño de la celda y el espesor mínimo de las barras dentro de cada celda.

Si bien se podría conseguir esta trabecularidad con modelos de una sola escala (o escala completa) mediante un aumento en la discretización de la malla, esto implicaría un enorme coste computacional [7]. Por otra parte, el modelado multiescala asume una separación entre escalas de longitud utilizando la teoría de homogeneización numérica para evaluar las propiedades mecánicas efectivas de cada celda a macroescala a partir de los detalles de la microestructura. Esta ventaja numérica, junto con la posibilidad de fabricación aditiva de los diseños obtenidos, ha impulsado el desarrollo de enfoques multiescala, incluso si las soluciones obtenidas no son completamente óptimas.

Los métodos multiescala suelen introducir parametrizaciones de microestructura, ya sea mediante laminados de rango-N [8, 9] o a través de la definición de celdas unitarias periódicas preestablecidas en función de unos pocos parámetros [10, 11]. En ambos casos se obtienen resultados de alta resolución, pero no es posible reproducir estructuras trabeculares debido a la configuración restringida de la parametrización de la microestructura.

En este sentido, en [12] se presentó un método de optimización topológica basado en SIMP a dos niveles. En una discretización de baja resolución, el proceso SIMP [1] con un valor de penalización bajo proporciona una distribución difusa del material, determinando la cantidad de material que debe considerarse en cada uno de estos elementos, también llamados celdas. Luego, en el nivel fino, se realiza otro proceso de optimización topológica basado en SIMP utilizando una malla fina en cada elemento del nivel grueso con un alto valor de penalización (normalmente $p = 3$), proporcionando así una representación precisa de la topología a nivel de celda.

La solución de baja resolución proporciona una distribución de material basada en un comportamiento homogéneo e isótropo en cada celda. Sin embargo, al resolver el problema de optimización a una resolución más fina, es esperable que la nueva distribución del material dentro de cada celda genere propiedades homogéneas distintas. Como resultado, las distribuciones optimizadas de las celdas alteran la rigidez de la discretización en el nivel de baja resolución.

Dado que el campo de tracciones equilibradas en una celda depende de la solución elástica del problema en baja resolución, se requiere un proceso iterativo para garantizar la convergencia del algoritmo de optimización. En este trabajo, se propone un enfoque iterativo para el algoritmo de optimización multinivel descrito. En este proceso, la distribución de densidades obtenida en la primera fase de optimización a baja resolución se mantiene fija, mientras que el comportamiento mecánico de las celdas se ajusta mediante una técnica de homogeneización. Este método permite obtener de manera eficiente estructuras trabeculares óptimas desde el punto de vista estructural utilizando enfoques basados en densidad, algo que, con las metodologías actuales y recursos computacionales estándar, resulta inalcanzable.

El resto del artículo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se presentan el método SIMP y la estrategia de optimización topológica en dos niveles en la que se basa este trabajo. En la sección 3 se describe el algoritmo iterativo de homogeneización propuesto para completar la estrategia de optimización, y en la sección 4 se muestra un ejemplo numérico de la metodología. Finalmente, se exponen las conclusiones del trabajo en la sección 5.

2. Metodologías

2.1. El método SIMP

En el método “*Solid Isotropic Material with Penalization*” (SIMP) [1] se utiliza para resolver el problema de optimización topológica de la siguiente forma: sea Ω el dominio del problema (este trabajo se limitará a casos 2D sin pérdida de generalización), sometido a una serie de condiciones de contorno esenciales (desplazamientos) y naturales (tensiones). El problema elástico se puede definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \varepsilon(u)^T D \varepsilon(v) d\Omega \\ l(v) &= \int_{\Omega} b^T v d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{t}^T v d\Gamma_N \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de desplazamientos (incógnita del problema elástico) que satisface las condiciones de contorno impuestas, $\mathbf{v}$ es un campo virtual de desplazamientos que cumple con las condiciones de contorno esenciales, $\boldsymbol{\varepsilon}$ el campo de deformaciones, $\mathbf{D}$ la ecuación constitutiva del material (asumido lineal elástico), $\mathbf{b}$ y $\bar{\mathbf{t}}$ representan las cargas por unidad de volumen, y área respectivamente y Γ_N el contorno de Neumann.

A continuación, se asume que existe una cantidad total de material V_0 fija, y se busca la distribución óptima de ese material de manera que minimice la flexibilidad (equivalente a maximizar rigidez) como

$$\min\{a(\rho; \mathbf{u}, \mathbf{u})\} \quad (2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{u}) &= a(\rho; \mathbf{u}, \mathbf{u}), \\ \int_V \rho(\mathbf{x}) dV &= V_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \rho_{min} &\leq \rho \leq 1, \end{aligned}$$

donde ρ es el valor de densidad relativa de material en cada punto (comprendido entre 1 y un valor mínimo necesario para evitar singularidades, en este caso se toma 10^{-3}).

La ecuación constitutiva del material se define ahora con respecto a la del material con densidad relativa 1, que será la de referencia, $\mathbf{D}_0$, como

$$D(x) = \rho^p(x) D_0,$$

donde $p \geq 1$ es el parámetro que penaliza la aparición de densidades intermedias (normalmente se utiliza $p = 3$). De esta manera, el funcional descrito en (1) se puede reescribir como

$$a(\rho; u, u) = \int_{\Omega} \rho^p \varepsilon(u)^T D_0 \varepsilon(u) d\Omega \quad (3)$$

El problema de minimización con restricciones (2) se puede entonces resolver usando multiplicadores de Lagrange, lo cual da lugar al “*optimality criteria*” descrito en [2]. Este problema es fácilmente resoluble mediante el método de elementos finitos (EF). Además, se pueden utilizar discretizaciones basadas en mallados cartesianos [13] con elementos bilineales cuadrados de cuatro nodos, ya que son mucho más eficientes computacionalmente, y se tiene libertad completa para definir la discretización de densidades. Para simplificar la implementación, en este trabajo solo se incluyen dominios que pueden ajustarse a mallas cartesianas. Sin embargo, la metodología presentada en este artículo podría extenderse a otras geometrías utilizando la metodología cgFEM de mallados cartesianos independientes de la geometría [14].

2.2. Estrategia de optimización topológica multinivel

La Figura 1 muestra un esquema general de la estrategia de optimización topológica en dos niveles presentada en [12]. A continuación, se describen los principales pasos de esta metodología. En primer lugar, se discretiza el dominio del problema con una baja resolución (escala basta) y resuelve un problema de optimización topológica mediante el método SIMP utilizando un valor de penalización $p = 1$ en (ver ecuación (3)). Se escoge este valor con el objetivo de distribuir densidades en todo el dominio, sin perjuicio de que aparezcan densidades intermedias.

Una vez ha convergido el problema de la escala basta, se aplica un método de equilibrado de tracciones [15] que permite calcular un conjunto de tracciones equilibradas en los bordes de los elementos de esta malla de baja resolución (en la solución de EF del problema de baja resolución los campos de tensiones son discontinuos entre elementos).

En el segundo paso de esta estrategia, cada uno de los elementos de la malla gruesa define una celda, que se discretiza con una malla fina. Las tracciones equilibradas obtenidas previamente son convertidas en fuerzas nodales que actúan sobre los nodos externos de la malla fina de cada celda, y se resuelve un nuevo problema de optimización topológica en cada una de estas celdas utilizando el SIMP, esta vez con un parámetro de penalización $p = 3$. Al aplicar el método SIMP, generalmente se considera un valor de penalización $p = 3$ para restringir la aparición de densidades intermedias (las cuales presentarían problemas desde el punto de vista de la fabricabilidad de la solución), como se ha hecho aquí a en el nivel de discretización fino. Sin embargo, en el nivel de discretización basto se adopta un valor que no penaliza las densidades intermedias con el fin de obtener una descripción de baja resolución de la distribución óptima del material.

Además, dado que las tracciones entre celdas adyacentes están equilibradas, se garantiza la continuidad mecánica entre ellas, lo que representa una mejora significativa respecto a trabajos anteriores, al proporcionar soluciones estructuralmente viables.

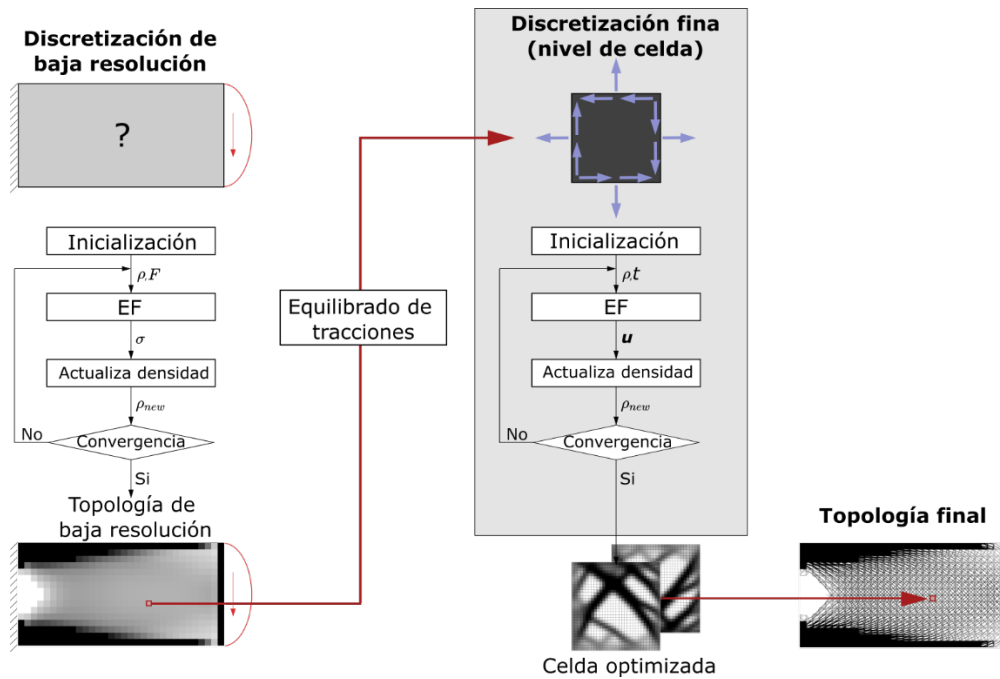


Figura 1: Procedimiento de optimización topológica en dos niveles desarrollado en [12].

Para simplificar la implementación, solo se incluyen dominios que pueden ajustarse a mallas cartesianas. Sin embargo, la metodología presentada en este artículo podría extenderse a otras geometrías si se consideraran metodologías de frontera inmersa, como el método FEM con malla cartesiana (cgFEM) [1] o el método de Celdas Finitas [33].

En cuanto a la eficiencia computacional, además de utilizar mallas cartesianas en ambos niveles de discretización, el esquema de dos niveles reduce considerablemente el coste computacional en comparación con un enfoque de un solo nivel con la misma resolución de malla. Además de resolver muchos problemas de tamaño reducido en vez de uno de gran tamaño, la optimización fina de cada celda podría resolverse en paralelo dada su independencia numérica.

3. Algoritmo iterativo de homogeneización

Una de las limitaciones del método de optimización topológica de dos niveles es la necesidad de considerar el comportamiento mecánico de las celdas optimizadas dentro del flujo de trabajo.

Obsérvese el flujo de trabajo definido en la Figura 1 para una única celda de la discretización basta, por simplicidad en la explicación. El campo de tracciones equilibradas se calcula a partir de la solución inicial de la optimización topológica de baja resolución, cuando la distribución de densidad dentro de la celda se supone homogénea. A continuación, se optimiza topológicamente dicha celda. En este punto, el comportamiento mecánico global de esta celda ya no puede considerarse aquél de un material isótropo homogéneamente distribuido, por lo que es necesario definir una estrategia para resolver nuevamente el problema elástico a nivel basto considerando estas nuevas propiedades mecánicas de las celdas.

Por ello, en este trabajo se propone un nuevo algoritmo para cerrar el ciclo del proceso de optimización topológica de dos niveles presentado en la Sección 2, mejorando la eficacia del procedimiento original en [12]. En la Figura 2 se expone el nuevo flujo de trabajo del proceso de optimización de dos niveles.

Aquí, se define un proceso iterativo de punto fijo, donde la distribución de densidad obtenida en la optimización topológica a nivel macro permanece inalterada. Tras obtener la primera solución de la optimización topológica a nivel de la celda, se obtienen unas nuevas propiedades homogéneas que representen de manera global el comportamiento mecánico de dicha celda (al haberse distribuido el material heterogéneamente en la optimización, dicho comportamiento será ahora anisótropo generalmente). Para obtener esta nueva ecuación constitutiva del material se empleará un método de homogeneización de ventana, descrito en el apartado 3.1. Este nuevo comportamiento mecánico es introducido en (3) para resolver nuevamente el problema EF de la discretización de baja resolución (manteniendo las densidades de esta resolución fijas).

La nueva solución de la discretización basta resultará en un campo diferente de tensiones en los contornos de las celdas. Entonces, se obtendrá un nuevo campo de tracciones equilibradas en la celda para proceder nuevamente a su optimización topológica.

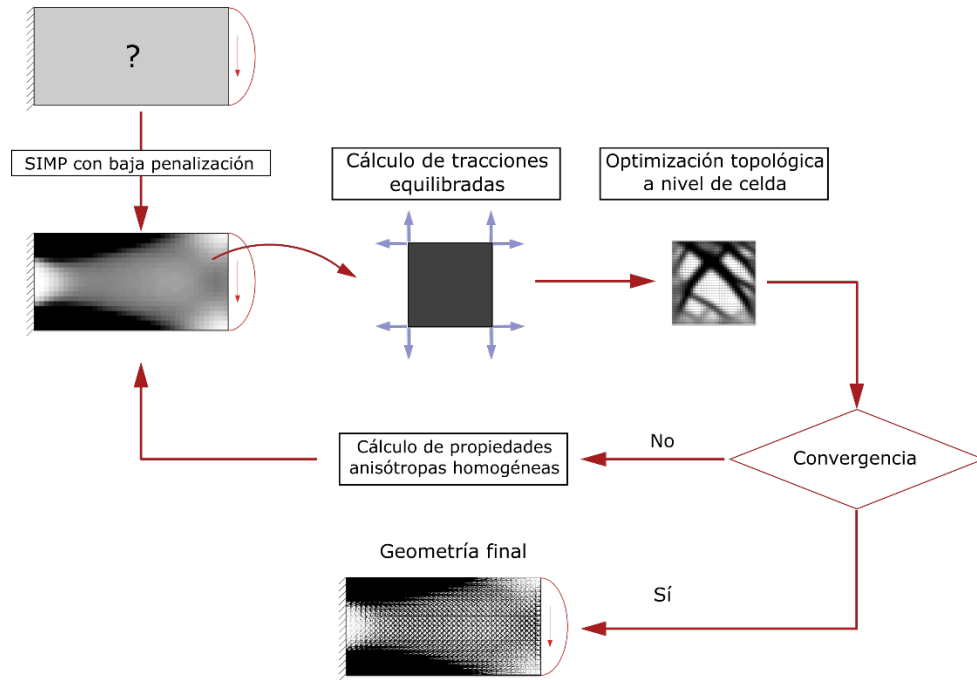


Figura 2: Propuesta de mejora del procedimiento de optimización de dos niveles [12]: se incluye un algoritmo iterativo entre los dos niveles que considera comportamiento mecánico anisótropo de las celdas optimizadas en el problema estructural de la discretización de baja resolución.

Finalmente, el campo de tracción de las celdas debe alinearse con la distribución de densidad optimizada de las mismas. Como resultado, también es necesario definir un criterio para determinar cuándo se puede considerar que este proceso ha convergido. Se pueden utilizar varias métricas para evaluar la convergencia a lo largo de las iteraciones del bucle, como los cambios en la densidad de las celdas optimizadas, las variaciones en el campo de tracciones o las modificaciones en la matriz de rigidez homogeneizada de las celdas. Sin embargo, dado que el método de optimización topológica se basa en minimizar la flexibilidad, que está intrínsecamente ligada a la energía de deformación, la métrica propuesta para medir la convergencia del bucle será, como primera aproximación, la energía de deformación del problema en la escala gruesa, definida como

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U},$$

donde $\mathbf{U}$ es el vector de desplazamientos y $\mathbf{K}$ la matriz de rigidez globales del problema de EF. A partir de esto, el indicador de convergencia es la diferencia relativa de energía de deformación entre iteraciones, definida como:

$$\eta = \frac{\|\Pi_i - \Pi_{i-1}\|}{\|\Pi_i\|}. \quad (4)$$

3.1. Homogeneización de la escala fina

El objetivo de la homogeneización es determinar los coeficientes de la ecuación constitutiva de un material homogéneo equivalente al comportamiento de un material heterogéneo en un Elemento de Volumen Representativo (EVR). En este trabajo, el EVR se corresponde con cada una de las celdas de la discretización gruesa del dominio, del cual se ha obtenido una distribución heterogénea de material a través de la optimización topológica de su discretización fina. En este caso se asume un comportamiento elástico lineal del material bidimensional, por lo que se buscarán las 6 constantes elásticas independientes de la matriz $\mathbf{D}$ en (1).

La técnica de homogeneización numérica más común consiste en utilizar el análisis mediante elementos finitos (EF) para ensayar virtualmente este material heterogéneo. Para realizar esta homogeneización se ha utilizado el “método de ventana”, propuesto en [16]. Este método fue aplicado al análisis de imágenes médicas en [17] para homogeneizar celdas trabeculares, que guardan cierta similitud topológica con las celdas obtenidas en esta optimización topológica de nivel fino.

El método de la ventana consiste en incrustar el EVR en un volumen mayor de este material equivalente ($\mathbf{D}^*$) y aplicar las condiciones de contorno adecuadas en el contorno externo de la ventana en lugar de en el límite del EVR. Dado que los coeficientes de este material homogéneo equivalente $\mathbf{D}^*$ son desconocidos, se utiliza un proceso iterativo para su evaluación. Concretamente, se aplican condiciones de contorno que representan estados cinemáticos uniformes (deformaciones normales y angulares constantes) en los límites externos de la ventana y se calcula la tensión media en el EVR (ver Figura 3). El procedimiento comienza aplicando la regla de la mezcla en el EVR para definir el tensor de propiedades del material, que se asigna a los elementos de la ventana como una estimación inicial. Luego, se crea el modelo de EF, reutilizando la discretización proveniente del problema de optimización topológica en la escala fina para el EVR y añadiendo el mallado correspondiente a la ventana.

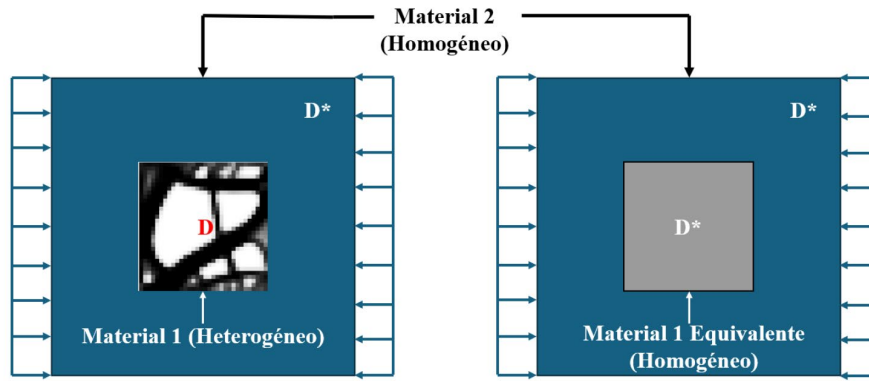


Figura 3: Esquema del método de la ventana para obtener las propiedades de material homogéneo equivalentes a la heterogeneidad de material proveniente de la optimización topológica de la discretización fina. Se aplican diferentes condiciones de contorno que representan estados cinemáticos uniformes (por ejemplo, las flechas azules en este caso representan un estado de deformación normal constante en todo el contorno).

Se resuelve el problema para las 3 condiciones de contorno equivalentes a ϵ_x , ϵ_y y γ_{xy} constantes, y se calcula el tensor de propiedades elásticas del material a partir de los valores medios del tensor de tensiones en el EVR y de las condiciones medias de deformación aplicadas. Este tensor se asigna luego a los elementos de la ventana en la siguiente iteración, hasta que se llega a la convergencia de la matriz de comportamiento material (para este trabajo se ha considerado una diferencia del 1% en norma L2 de dos matrices consecutivas).

La solución de este problema de homogeneización, la matriz $\mathbf{D}^*$ se introducirá como nueva ecuación constitutiva de la celda correspondiente en el problema de optimización de discretización basta, manteniendo fija la distribución de densidades.

4. Ejemplo numérico

En esta sección se muestra un ejemplo numérico de la aplicación del algoritmo iterativo de optimización topológica de 2 niveles. Para ello se va a utilizar el ejemplo mostrado en la Figura 4 (similar al primero de los mostrados en [12]). El material de referencia tiene módulo de rigidez $E = 1.000$ MPa y coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, la carga aplicada en el extremo libre de la viga se define como una distribución parabólica de esfuerzo cortante con $\tau_{\max} = 1$ MPa. Las dimensiones de la viga son 2×1 m y la fracción de volumen prescrita es $V_0 = 0,5$. La discretización de baja resolución es de 32×16 elementos, mientras que en cada una de esas celdas se ha utilizado una

discretización fina de 32 x 32 elementos. Nótese que la resolución final de la optimización topológica obtenida es de 32 x 32 elementos en 512 celdas, resultando un total de 524.288 elementos.

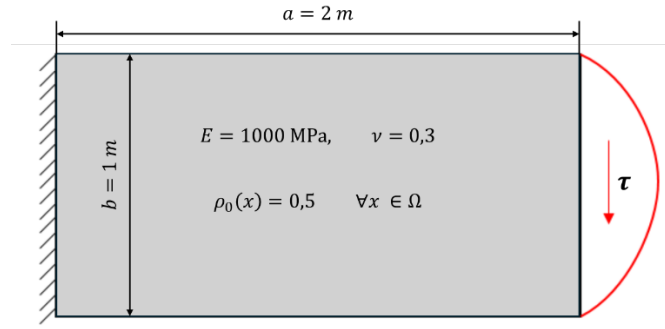


Figura 4: Definición del ejemplo numérico.

Para observar el comportamiento del bucle de punto fijo se ha ejecutado el algoritmo descrito en la Figura 2 con un número fijo de 39 iteraciones. En la Figura 5(a) se muestra la evolución del cambio relativo en la energía de deformación del problema global (ver Ecuación (4)), donde se observa una estabilización alrededor de 0.01 después de las primeras iteraciones. En la etapa final del proceso iterativo este indicador presenta oscilaciones debido a la naturaleza del proceso SIMP. La Figura 5(b) muestra la variación relativa de la flexibilidad de una celda durante el proceso de optimización topológica de resolución fina. Como se puede observar, los procesos de optimización individuales de cada celda también experimentan este comportamiento oscilatorio con una magnitud similar, lo que hace que el indicador global η refleje esta tendencia. En otras palabras, el bucle iterativo depende de la convergencia de la optimización topológica de las celdas.

Finalmente, la Figura 6 muestra la evolución de la distribución de densidad de las celdas dentro del dominio del problema macro a lo largo de las iteraciones del bucle de homogenización. Como era de esperar, hay ciertas diferencias en la topología de algunas celdas entre la distribución de material obtenida en la primera iteración (que se correspondería con el resultado de la metodología [12]) y la final.

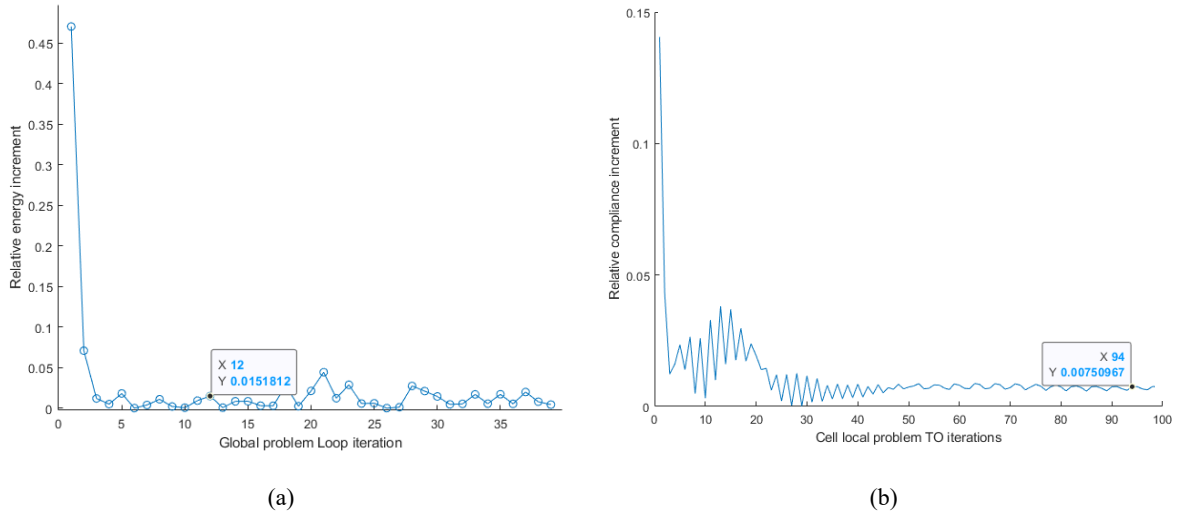
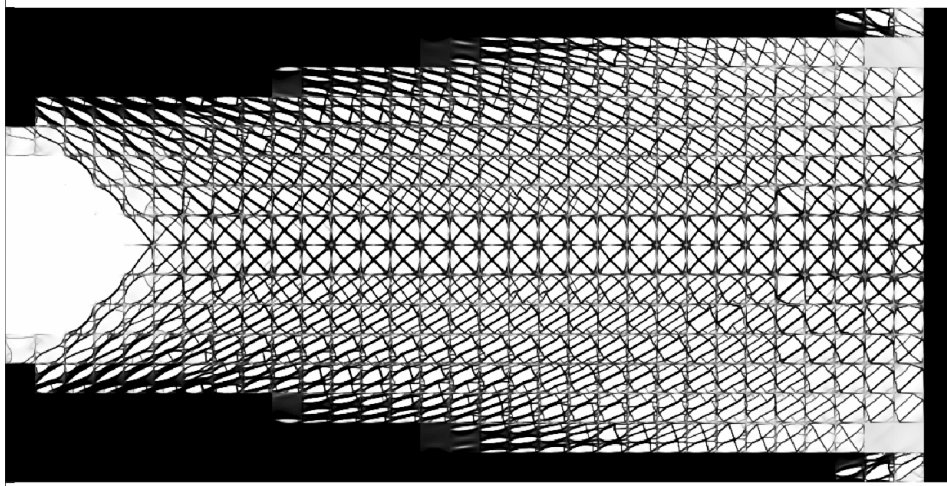
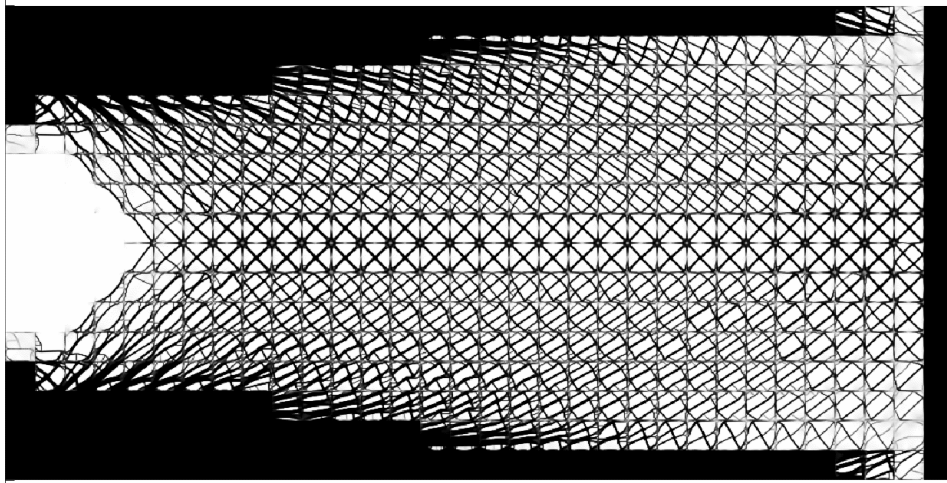


Figura 5: Resultados del ejemplo numérico de optimización topológica en dos niveles. Evolución relativa de la norma energética del problema global (a), y evolución relativa de la flexibilidad durante la optimización de una celda (b).



(a)



(b)

Figura 6: Resultados del ejemplo numérico de optimización topológica en dos niveles. Distribución de densidades tras la primera iteración del algoritmo de punto fijo (a), y resultado final (b).

5. Conclusiones

La metodología presentada en este trabajo permite incorporar la distribución heterogénea de densidad de celdas optimizadas topológicamente en el problema elástico a nivel de celda (discretización de baja resolución). Específicamente, este enfoque utiliza una técnica de homogeneización del comportamiento material de la discretización fina para obtener la ecuación constitutiva de material equivalente de la celda.

Esta metodología se ha integrado en un proceso iterativo que alinea el campo de tracciones obtenido de la solución elástica del problema de baja resolución con el resultado de la optimización topológica de las celdas. Los resultados demuestran la convergencia en el cambio relativo de la norma de energía. No obstante, se observan oscilaciones en las iteraciones finales debido al comportamiento del proceso de optimización topológica de las celdas calculado mediante el método SIMP.

Con este algoritmo iterativo se completa el proceso de optimización topológica a dos niveles, permitiendo el diseño de estructuras trabeculares que consideran el comportamiento mecánico real de la estructura final optimizada. El proceso logra la convergencia tanto en las tracciones de las celdas como en sus topologías óptimas.

6. Agradecimientos

Los autores de este artículo quieren agradecer el apoyo financiero recibido por parte de la Agencia Estatal de Investigación y FEDER (PID2022-141512NB-I00) y la Generalitat Valenciana (Prometeo/2021/046).

7. Referencias

- [1] Bendsoe, M. P., and O. Sigmund. "Material interpolation schemes in topology optimization, Archive of Applied Mechanics." (1999): 635-54.
- [2] Bendsoe, Martin Philip, and Ole Sigmund. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, (2013).
- [3] Ferrari, Federico, and Ole Sigmund. "A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 62 (2020): 2211-2228.
- [4] Xie, Yi Min, and Grant P. Steven. "A simple evolutionary procedure for structural optimization." *Computers & structures* 49.5 (1993): 885-896.
- [5] Allaire, Grégoire, et al. "Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method." *Control and cybernetics* 34.1 (2005): 59-80.
- [6] Wu, Jun, Ole Sigmund, and Jeroen P. Groen. "Topology optimization of multi-scale structures: a review." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 63 (2021): 1455-1480.
- [7] Smit, Thijs, et al. "Conceptual design of compliant bone scaffolds by full-scale topology optimization." *journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 143 (2023): 105886.
- [8] Allaire, G. "The homogenization method for topology and shape optimization." *Topology optimization in structural mechanics*. Vienna: Springer Vienna, 1997. 101-133.
- [9] Träff, Erik, Ole Sigmund, and J. P. Groen. "Simple single-scale microstructures based on optimal rank-3 laminates." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 59 (2019): 1021-1031.
- [10] Wu, Zijun, et al. "Topology optimization of hierarchical lattice structures with substructuring." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 345 (2019): 602-617.
- [11] Wang, Chuang, et al. "Concurrent topology optimization design of structures and non-uniform parameterized lattice microstructures." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58 (2018): 35-50.
- [12] Merli, Rafael, et al. "Two-Level High-Resolution Structural Topology Optimization with Equilibrated Cells." *Computer-Aided Design* 179 (2025): 103811.
- [13] Nadal, E., et al. "Efficient finite element methodology based on cartesian grids: application to structural shape optimization." *Abstract and applied analysis*. Vol. 2013. No. 1. Hindawi Publishing Corporation, 2013.
- [14] Marco, Onofre, et al. "Structural shape optimization using Cartesian grids and automatic h-adaptive mesh projection." *Structural and Multidisciplinary Optimization* 58 (2018): 61-81.
- [15] Ladeveze, P., and EAW0886 Maunder. "A general method for recovering equilibrating element tractions." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 137.2 (1996): 111-151.
- [16] Hain, M., and P. Wriggers. "Numerical homogenization of hardened cement paste." *Computational Mechanics* 42 (2008): 197-212.
- [17] Giovannelli, L. "Direct creation of patient-specific Finite Element models from medical images and preoperative prosthetic implant simulation using h-adaptive Cartesian grids" (2018). Universitat Politècnica de València.