



## Rellenos de densidad pseudo-constante para Fabricación Aditiva No Plana

Álvaro Guzmán-Bautista<sup>1\*</sup>, Adrián López-Arrabal<sup>1</sup>, Elio Sánchez-Oro-Aguado<sup>1</sup>, Andrea Fernández-Gorgojo<sup>1</sup>, Ramiro García-Galán<sup>2</sup>, Enrique Chacón-Tanarro<sup>1</sup>, Francisco Javier Badesa-Clemente<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, \*alvaro.guzman.bautista@upm.es

<sup>2</sup> Departamento de Organización Industrial, ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid

<sup>3</sup> Centro de Automática y Robótica (CAR) UPM-CSIC, Universidad Politécnica de Madrid

---

*La Fabricación Aditiva No Plana (NPAM por sus siglas en inglés) es una técnica de Diseño orientado a la Fabricación Aditiva que permite variar localmente la dirección de apilamiento de las capas con el objetivo de mejorar las características geométricas o mecánicas de una pieza. En este ámbito, existe una necesidad de establecer estrategias y algoritmos de laminado no plano sistemáticos basados en conceptos topológicos para viabilizar la generación de trayectorias. En este trabajo se introduce la generación de trayectorias para realizar rellenos no planos de densidad pseudo-constante dentro de una lámina definida. Este algoritmo permite generar piezas mediante NPAM con relleno no sólido, lo que permite ahorrar material y reducir los tiempos de ciclo. Si se define la geometría de una plataforma de impresión a través de la revolución de una curva paramétrica, se conforma una variedad riemanniana. A partir del tensor métrico de la variedad evaluado en cada punto y la resolución de la ecuación geodésica, es posible generar una función de optimización consistente en la suma de la distancia geodésica entre puntos. Esta función de optimización permite generar un mallado cuasi-equidistante de puntos, que es posible unir mediante criterios como las direcciones preferentes del relleno o curvas fractales que llenan espacios, como las curvas de Hilbert. En este trabajo se detalla el algoritmo concebido, así como un caso de aplicación en una plataforma de impresión asimilable a una variedad de Riemann, con curvatura suavizada pero variable. Esto demuestra las capacidades del algoritmo y sirve de introducción a la viabilización de los procesos NPAM dentro del marco de los procesos productivos.*

---

## 1. Introducción

La fabricación aditiva (AM por sus siglas en inglés) comprende el conjunto de tecnologías consistentes en crear objetos tridimensionales a partir de la adición de capas sucesivas de material [1]. La mayoría de las máquinas de AM emplean 3 grados de libertad, lo que les posibilita el apilamiento de material en capas planas. No obstante, estas capas planas limitan el rango de piezas que se pueden fabricar, ya que introducen una fuerte anisotropía entre la resistencia mecánica en la dirección de la capa y la resistencia mecánica en la dirección perpendicular a la capa [2]. Este efecto es especialmente acusado en procesos de extrusión de material (MEX) y deposición direccionada de energía (DED) [3, 4]. Para mitigar esta limitación, se introduce la fabricación aditiva no plana (NPAM, *Non-Planar Additive Manufacturing*).

Estudios previos han demostrado la efectividad de apilar capas en direcciones no planas para mejorar la resistencia mecánica de las piezas en servicio [5 - 7]. Adicionalmente, las técnicas NPAM también pueden solventar problemas relacionados con la calidad superficial de las piezas, mitigando el efecto escalera característico de la AM [8, 9]. Por último, las técnicas NPAM permiten también la obtención de piezas más sostenibles, ahorrando material y energía en los procesos de fabricación aditivos [10, 11]. Para ampliar el rango de aplicaciones de la NPAM, especialmente en procesos MEX y DED, se suelen embarcar estos procesos en estaciones robóticas. En estas tecnologías, la introducción de nuevos grados de libertad permite una mayor versatilidad en los procesos, con aplicaciones en manufactura rápida de moldes [12], sector biomédico [13, 14], industria aeroespacial [15], entre otros.

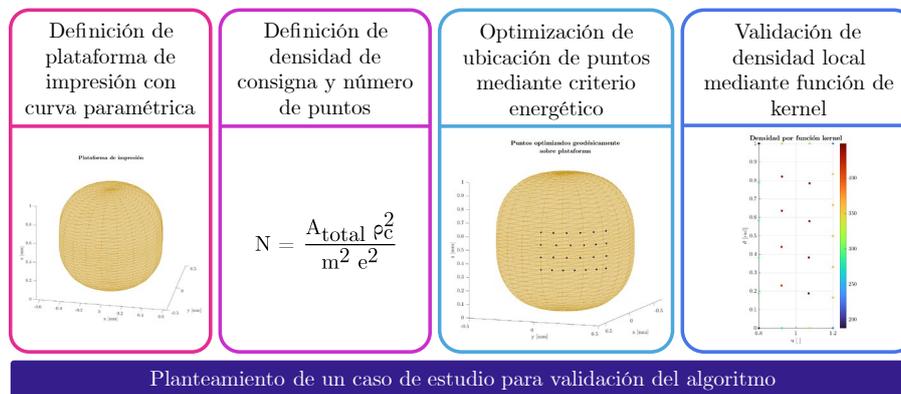
No obstante, en la gran mayoría de los trabajos mencionados en los que se robotizan procesos de NPAM, la densidad de relleno de las piezas que se muestran es del 100%, es decir, sólida por completo. Esto supone un gasto de material que en algunos casos sería posible evitar. Si se analiza la literatura científica, son pocos los trabajos en los que se afronta la realización de rellenos con densidad inferior al 100% en el ámbito de NPAM, destacando algunos trabajos de reparto de puntos para realización de rellenos con posible aplicación en NPAM [16, 17], o primeras iteraciones sin tener en cuenta el interior de la pieza [18, 19]. Esto es debido a la complejidad matemática del problema, que implica conocimientos avanzados de geometría diferencial para poder aportar una solución de carácter general, independiente de una proyección sobre un plano [20].

En este contexto, el objetivo de este trabajo es el desarrollo de un algoritmo capaz de generar nubes de puntos uniformemente distribuidos en una superficie con curvatura variable para poder realizar trayectorias y estrategias de relleno para NPAM. Al unir estos puntos mediante diferentes criterios, será posible generar patrones de relleno de densidad inferior al 100%, lo que implicará un ahorro significativo de material, tiempos y costes en procesos NPAM, sin renunciar a la ventaja principal de estos procesos, que es el alineamiento de capas en direcciones favorables para el caso de carga que desempeña la pieza. La contribución principal de este trabajo radica en la implementación de un algoritmo de fuerzas de repulsión basado en distancias geodésicas, el cual se facilita su cálculo debido a la definición parametrizada de plataformas de revolución axisimétricas. Esta definición, basada en un trabajo previo de los autores [21] simplifica el cálculo de las magnitudes topológicas necesarias para la resolución de la ecuación diferencial geodésica, ya que emplea un mapa encajado en la superficie frente a la definición explícita en el espacio cartesiano.

Esta metodología está orientada particularmente a procesos NPAM robotizados basados en tecnologías MEX y DED, ya que son las tecnologías más propicias para ser robotizadas. Además, estas tecnologías aprovechan la mayoría de las ventajas que proporciona la NPAM debido al efecto más acusado de la anisotropía que introduce el efecto de apilar capas de material. Adicionalmente, debido a la ausencia de lechos de material en estos procesos, especialmente cuando se robotizan, es de suma importancia la existencia de estructura de soporte suficiente para poder depositar la capa siguiente. En este aspecto, esta metodología aumenta la factibilidad de los procesos, ya que hace posible la variación de la densidad de cada capa, pudiendo regular el tamaño medio de voladizo para evitar descuelgues de material durante la fabricación.

## 2. Metodología

A continuación se expone la metodología seguida en este trabajo. En primer lugar, se define la plataforma de impresión sobre la que se desea realizar un relleno de densidad no unitaria a través de una curva paramétrica (Subsección 2.1). Posteriormente, se define una densidad de consigna, que a su vez, define un número de puntos a distribuir (Subsección 2.4). Una vez definido el número de puntos, se distribuyen uniformemente sobre la superficie empleando un algoritmo basado en el potencial de repulsión entre puntos (Subsección 2.3 para la teoría, Subsección 2.5 para la aplicación en plataformas de impresión). Finalmente, se valida la uniformidad del mallado resultante a través de una métrica de densidad basada en una función de kernel (Subsección 2.6). Todos estos conceptos se demuestran a través de un caso de estudio en una plataforma de impresión con forma de barril. En la Figura 1 se muestra un resumen esquematizado de esta metodología.

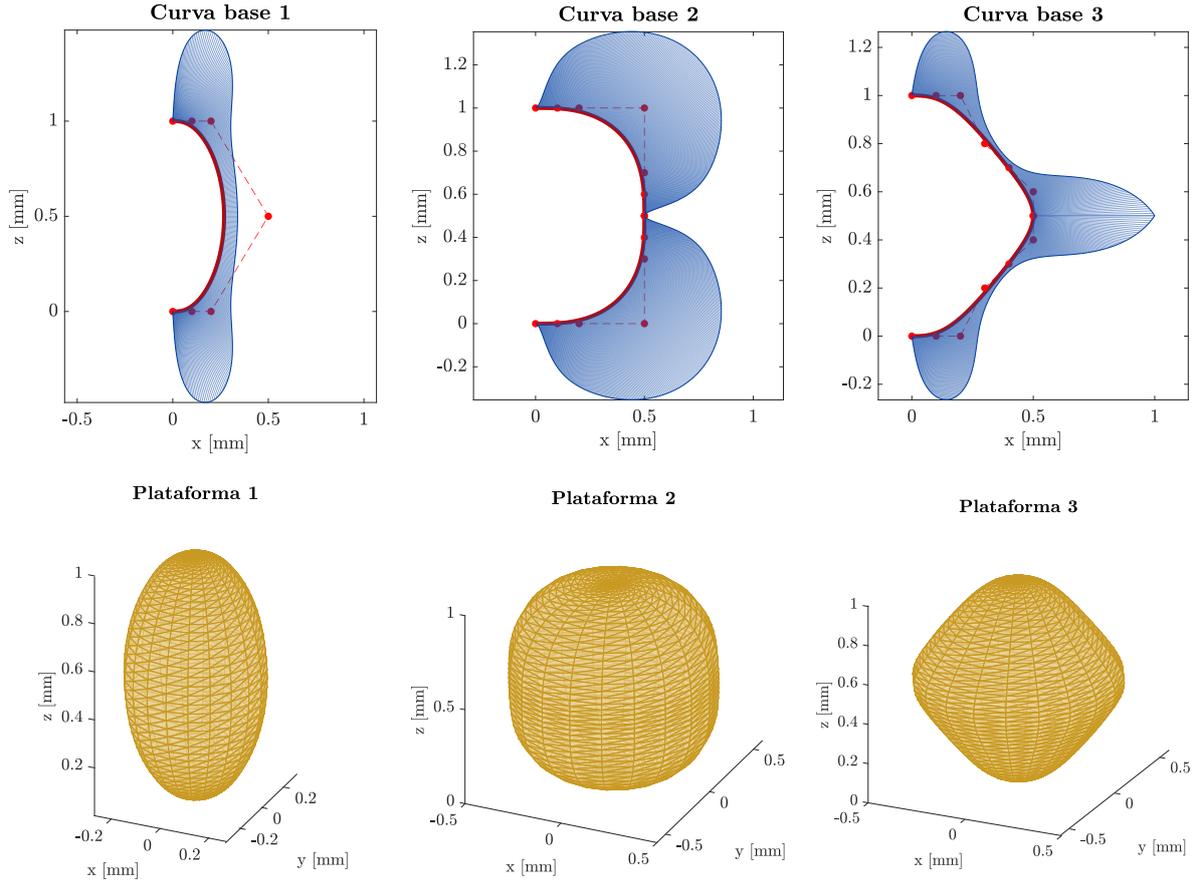


**Figura 1:** Diagrama esquematizado de la metodología seguida en este trabajo.

### 2.1. Definición de la plataforma de impresión

El primer paso para llevar a cabo la generación no-plana de rellenos de densidad pseudo-uniforme es la definición de la plataforma de impresión. En [21] se estableció que cualquier curva parametrizada que cumpla unas condiciones de continuidad, tangencia y complejidad es adecuada para los métodos de mapa encajado expuestos. No obstante, para la generación de rellenos se han detectado nuevas restricciones que limitan el tipo de curvas y geometrías que se pueden emplear. Estas restricciones se describen a continuación.

La noción fundamental que han de seguir las plataformas de impresión para la aplicación de esta metodología es que sean variedades de Riemann. En términos topológicos, una variedad de Riemann es un tipo de variedad que se caracteriza por tener una curvatura variable y diferenciable. Si se desea crear una variedad riemanniana mediante la concatenación y revolución de curvas parametrizadas, esta condición da lugar a limitaciones geométricas en términos de complejidad de las curvas, continuidad en la concatenación y conexión con el eje de revolución. En primer lugar, la curva no puede tener cúspides ni auto-seccionarse. Si la curva a revolucionar es una composición de splines, esta condición es comprobable analizando la complejidad del polígono de control, es decir, el polígono formado por los puntos que definen la spline, ya sean de paso o intermedios. Si el polígono de control no se auto-secciona, entonces la composición de splines tampoco lo hará. En cuanto a la continuidad en la concatenación, para que la variedad resultante de la revolución tenga curvatura diferenciable, se ha de asegurar al menos una continuidad  $C^3$  en las uniones entre curvas. Si la curva a revolucionar es una composición de splines, esta condición resulta en la restricción de al menos cuatro grados de libertad de los polígonos de control de todos los segmentos de spline, exceptuando el primero. Por último, para asegurar una curvatura diferenciable en los polos de la variedad (los puntos de intersección con el eje de revolución), la curva ha de ser ortogonal al eje de revolución en los polos, así como una curvatura nula en los polos. Gracias a la simetría de revolución, estas condiciones son suficientes para asegurar que la curvatura sea diferenciable en los polos. En términos de curvas generadas mediante composición de splines, esta condición levemente restringe tres grados de libertad de los polígonos de control del primer y último segmento, teniendo que haber tres puntos colineales a lo largo de una dirección ortogonal al eje de revolución. En la Figura 2 se representan ejemplos de curvas base (generatrices) y sus plataformas de impresión correspondientes, definiendo cuáles de ellas son válidas y cuáles incorrectas para ejemplificar las condiciones anteriores.



**Figura 2:** Ejemplos de plataformas válidas (plataformas 1 y 2) y plataforma incorrecta (plataforma 3). La plataforma 3 se considera incorrecta ya que la curvatura no es derivable en la región situada en  $z = 0.5$  [mm].

En el trabajo previo de los autores [21], se emplean splines de Bézier de grado 3 (con tres grados de libertad cuando se impone continuidad  $C^0$  en la concatenación), ya que son suficientemente sencillas de manejar, pero ampliamente versátiles para representar geometrías. No obstante, en este trabajo se emplean composiciones de splines de Bézier de grado 6, que son análogas a las splines de grado 3 cuando se impone la necesidad de existir continuidad  $C^3$  en la concatenación entre segmentos, ya que permiten tres grados de libertad. Estos tres grados de libertad son necesarios para asegurar la condición de conexión con el eje de revolución y asegurar la continuidad  $C^2$  y nulidad de la curvatura en los polos. A pesar de estos cambios, todos los métodos expuestos en [21] siguen siendo válidos, ya que son independientes de la curva parametrizada que se emplee.

## 2.2. Mallado uniforme de una variedad

Para poder generar un relleno de densidad uniforme, es necesario mallar el área a rellenar de manera uniforme (es decir, mediante puntos equidistantes, bien según una métrica euclídea o geodésica). A diferencia de un mallado euclídeo o una variedad gaussiana (donde la curvatura es constante en todo el dominio de un mapa encajado), la superficie a mallar es una variedad de Riemann. No obstante, los conceptos básicos de mallados uniformes euclídeos siguen siendo aplicables. Para este trabajo, se ha optado por implementar un algoritmo basado en fuerzas de repulsión entre puntos debido a su simplicidad, aunque otros algoritmos [16] podrían ser aplicables para aliviar la carga computacional del proceso.

Un punto  $i$  genera un potencial de repulsión  $E_{ij}$  con respecto a otro punto  $j$  (ambos contenidos en un dominio de un mapa encajado de una variedad de Riemann) definido como:

$$E_{ij} = d_{ij}^{-m} \quad (1)$$

Donde  $d_{ij}$  es la distancia euclídea entre los puntos  $i$  y  $j$ , y  $m$  es un exponente de penalización. Es necesario que  $m > 1$ , teniendo un valor más alto cuanto más se desee penalizar la falta de uniformidad en el mallado. Para este estudio, se ha seleccionado  $m = 5$ . En total, la energía de repulsión del mallado  $E$  se expresa como:

$$E = \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} E_{ij} \quad (2)$$

Cuando esta energía de repulsión del mallado es mínima globalmente, se puede considerar que los puntos están cuasi-uniformemente distribuidos. Por lo tanto, se puede establecer un algoritmo de minimización, en el cual se desplazan los puntos a lo largo de la dirección de la fuerza de repulsión. Para un punto  $i$ , la fuerza de repulsión  $\mathbf{F}_i$  a la que se encuentra expuesto se puede expresar como:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i \neq j} -\nabla E_{ij} \quad (3)$$

En el caso euclídeo,  $\mathbf{F}_i$  se define como:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i < j} \frac{1}{m} d_{ij}^{-m-2} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (4)$$

No obstante, en una variedad de Riemann, se puede sustituir la distancia euclídea  $d_{ij}$  por la distancia geodésica  $d_{ij}^{geo}$ . Adicionalmente, este algoritmo requiere de un número de puntos a distribuir  $N$  fijo. En las siguientes subsecciones, se detallan los cálculos de la distancia geodésica y el número de puntos.

### 2.3. Distancia geodésica entre puntos $d_{ij}^{geo}$

La distancia geodésica entre dos puntos implica la integración en un intervalo de la ecuación geodésica. Para ello, es necesario introducir conceptos previos de topología como el tensor métrico. El tensor métrico de una variedad  $\mathcal{M}$  definida en el mapa cartesiano a través de un mapa encajado  $\mathbf{r}_{\mathcal{M}}(u, \theta) = \{x(u, \theta), y(u, \theta), z(u, \theta)\}$  se define en un punto  $p$  como:

$$g_{p,ij} = \mathbf{e}_p^i \cdot \mathbf{e}_p^j \quad (5)$$

Donde  $i$  y  $j$  son índices que barren las coordenadas del mapa encajado  $\{u, \theta\}$ , y  $\mathbf{e}^i$  y  $\mathbf{e}^j$  denotan los vectores de la base del mapa encajado expresados en el espacio cartesiano. Dado que los vectores base del mapa encajado son ortonormales por definición,  $g_{ij}$  es un tensor diagonal para todo punto  $p$ . El mapa encajado  $\{u, \theta\}$  definido en [21] se resume en la definición de la curva paramétrica  $\mathcal{S}$  (Ecuación 6), así como la definición de los vectores de la base (Ecuaciones 7 y 8):

$$\mathcal{S} = \mathbf{uBP} = [u^6 \quad u^5 \quad \dots \quad u \quad 1] [\mathbf{B}_6] \begin{bmatrix} P_1^x & P_1^z \\ \vdots & \vdots \\ P_7^x & P_7^z \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{e}^u = \frac{d}{du} (\mathcal{S}) \quad (7)$$

$$\mathbf{e}^\theta = \mathbf{e}^v \times \mathbf{e}^u \quad (8)$$

Donde  $\mathbf{B}_6$  es la matriz de base de la spline de grado 6, y  $\mathbf{P}$  es el polígono de control de la spline. Dado este mapa encajado euclídeo  $\{u, \theta\}$ , el tensor métrico  $g_p$  se puede expresar en forma de matriz como:

$$g_p = \begin{bmatrix} (\mathbf{u}'\mathbf{BP})^x + (\mathbf{u}'\mathbf{BP})^z & 0 \\ 0 & (\mathbf{uBP})^x \end{bmatrix} \quad (9)$$

A través de este tensor métrico, es posible extraer los símbolos segundos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  de la plataforma  $\mathcal{M}$  mediante:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} (g^{-1})_{il} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} g_{lk} + \frac{\partial}{\partial x^k} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} \right) \quad (10)$$

Donde los índices  $i, j$  y  $k$  son índices que van permutando por las variables del mapa encajado  $u$  y  $\theta$ . Debido a que la plataforma  $\mathcal{M}$  se define a partir de la revolución de una curva paramétrica continua  $C^3$  en todo su dominio (exceptuando los polos), los símbolos  $\Gamma_{u\theta}^u = \Gamma_{\theta u}^u$ ,  $\Gamma_{uu}^\theta$  y  $\Gamma_{\theta\theta}^\theta$  son nulos en todo el mapa encajado  $\{u, \theta\}$ . En la Figura 8 de la sección de Resultados se representan todos los símbolos de Christoffel para una variedad, donde se puede visualizar esta afirmación.

Los símbolos de Christoffel no nulos  $\Gamma_{uu}^u$ ,  $\Gamma_{\theta\theta}^u$  y  $\Gamma_{u\theta}^\theta = \Gamma_{\theta u}^\theta$  son de especial interés para determinar el camino más corto entre dos puntos situados sobre  $\mathcal{M}$ , esto es, la curva geodésica. Si se define un parámetro  $\tau$ , la curva geodésica  $\mathcal{G} = \{u(\tau), \theta(\tau)\}$  se obtiene de la resolución de la ecuación geodésica (11), en la que  $\dot{u}$ ,  $\dot{\theta}$ , y  $\ddot{u}$ ,  $\ddot{\theta}$  representan las derivadas primera y segunda de las variables respecto a  $\tau$ , respectivamente:

$$\begin{cases} \ddot{u} = -\Gamma_{uu}^u (\dot{u})^2 - \Gamma_{\theta\theta}^u (\dot{\theta})^2 \\ \ddot{\theta} = -2\Gamma_{u\theta}^\theta \dot{u} \dot{\theta} \end{cases} \quad (11)$$

Las condiciones de contorno del problema son:

$$\begin{cases} \mathcal{G}(\tau = 0) = \{u_{inicio}, \theta_{inicio}\} \\ \mathcal{G}(\tau = 1) = \{u_{fin}, \theta_{fin}\} \end{cases} \quad (12)$$

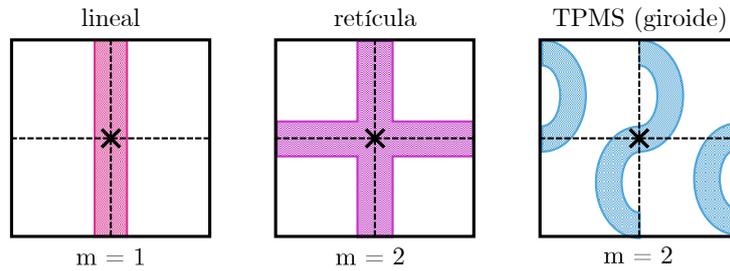
Por lo tanto, la distancia geodésica entre los puntos de inicio ( $i$ ) y fin ( $j$ ) es la integral a lo largo de la curva  $\mathcal{G}$  entre los límites del parámetro  $\tau$ :

$$d_{ij}^{geo} = \int_0^1 \sqrt{g_{uu} \dot{G}^u(\tau) + g_{\theta\theta} \dot{G}^\theta(\tau)} d\tau \quad (13)$$

#### 2.4. Número de puntos a distribuir en la malla

El algoritmo de energía de repulsión previamente descrito requiere conocer previamente el número de puntos que se quieren distribuir. Para ello, es necesario realizar algunas asunciones sobre el resultado final. En primer lugar, dado el algoritmo de distribución de puntos mediante potencial de repulsión, se puede asumir que la separación en celdas de la distribución final tiene propiedades similares a un diagrama de potencia de Laguerre-Voronoi [22]. En este tipo de diagramas, todas las áreas de las celdas son similares entre sí.

Si se asume que cada punto del mallado  $p_i$  se encuentra inscrito en una celda  $c_i$  de área  $A_i$  (asimilable a un cuadrado), entonces la densidad del relleno  $\rho_i$  dependerá del número de líneas que atraviesen la celda  $c_i$  pasando por el punto  $p_i$ . En el caso de realizar una estrategia de relleno basada en caminos de Hilbert, cada celda solo es atravesada una vez (Figura 3, izquierda). Por el contrario, si se realiza otro tipo de estrategias (como retículas o patrones basados en superficies mínimas triplemente periódicas, TPMS por sus siglas en inglés), es posible que cada celda sea atravesada dos o más veces (Figura 3, centro y derecha).



**Figura 3:** Ejemplos de celdas de relleno con patrones lineal ( $m = 1$ ), en retícula ( $m = 2$ ) y siguiendo una TPMS de tipo giroide ( $m = 2$ ).

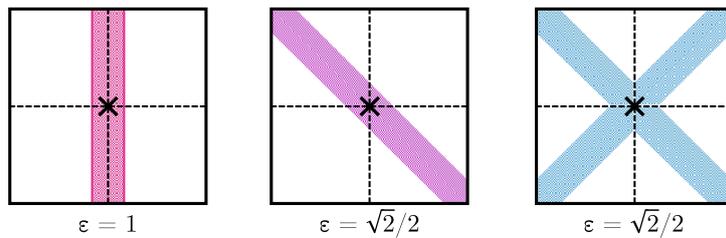
En ambos casos, si se asume la simplificación de que cada celda  $c_i$  es asimilable a un cuadrado de lado  $l_i$  y área  $A_i = l_i^2$ , la densidad de la celda  $\rho_i$  se puede expresar como:

$$\rho_i \approx \frac{m e l_i}{A_i} = \frac{m e}{\sqrt{A_i}} \quad (14)$$

Donde  $m$  es el número de líneas de relleno que atraviesan la celda y  $e$  es el espesor de cada línea de relleno. Esta densidad  $\rho_i$  es dependiente de la trayectoria real de la línea en el interior de la celda. Siempre que se asuma que cada línea está obligada a pasar por el punto  $p_i$  y solo puede cambiar de dirección en ese punto (dentro de un mapa euclídeo), esta suposición es coherente. La suposición introduce un error de densidad  $\varepsilon = \rho_{min}/\rho_i$ . Este error es el cociente entre dos situaciones: la densidad de la línea propuesta frente a la densidad mínima que podría existir, que se da cuando la línea atraviesa la celda desde el centro de una arista hasta el centro de la arista opuesta pasando por el centro de la celda. Cuando  $m = 1$  o  $2$ , el error máximo  $\varepsilon_{m\acute{a}x}$  introducido por esta suposición es:

$$\varepsilon_{m\acute{a}x} = \frac{\rho_{min}}{\rho_{m\acute{a}x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (15)$$

Este error  $\varepsilon$  siempre tiende a hacer las celdas más densas respecto de la densidad de consigna, por lo que va a favor de la viabilidad del proceso. En la Figura 4 se representan algunos ejemplos de celdas, así como el error de densidad  $\varepsilon$  introducido en cada una de ellas.



**Figura 4:** Ejemplos de celdas de relleno con  $m = 1, 2$ . En ambos casos oblicuos, el error máximo  $\varepsilon$  es  $\sqrt{2}/2$ .

Asumiendo estas simplificaciones, el número de puntos a distribuir en la malla  $N$  toma la siguiente expresión:

$$N = \frac{A_{total}}{A_i} = \frac{A_{total} \rho_{consigna}^2}{m^2 e^2} \quad (16)$$

### 2.5. Aplicación a una plataforma de fabricación aditiva de Riemann

Todos los conceptos anteriores son aplicables en el caso de que la plataforma de fabricación aditiva sea una variedad de Riemann. En primer lugar, para determinar el número de puntos a introducir en la malla, es necesario calcular el área total. En una variedad de Riemann, el área total de un dominio  $\Omega$  se puede calcular según:

$$A_{total} = \iint_{\Omega} \sqrt{\det \mathbf{g}} d\Omega \quad (17)$$

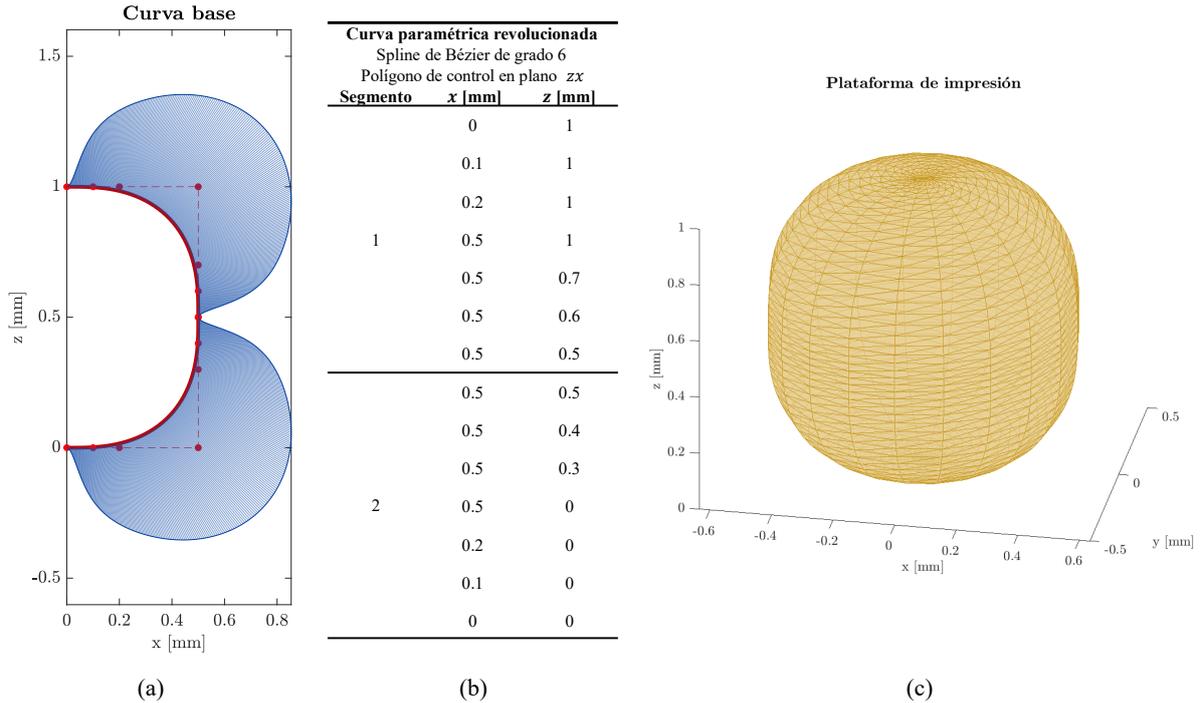
Esto permite calcular el número de puntos de la malla según (16). Estos  $N$  puntos se distribuyen aleatoriamente en el dominio  $\Omega$ . La distribución de los puntos se realiza mediante un algoritmo iterativo de optimización, en el que se calcula el potencial de repulsión en cada punto  $E_i$ , así como la fuerza resultante  $F_i$  en el mapa encajado  $\{u, \theta\}$  a través de:

$$E_i = \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} (d_{ij}^{geo})^{-m} \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i < j} \frac{1}{m} (d_{ij}^{geo})^{-m-2} \dot{\mathbf{g}}(\tau) \quad (19)$$

### 2.6. Caso de estudio para demostrar la metodología y validación

Para demostrar las capacidades del algoritmo descrito, se ha realizado un caso de estudio sobre una plataforma de impresión con forma de barril. En la Figura 5 se presenta la plataforma, así como la curva parametrizada que se revoluciona, definida a través de composición de splines de Bézier de grado 6. El barril es una variedad riemanniana, ya que posee curvatura variable. Este caso cuenta con la virtud de tener curvaturas estrictamente no negativas en ambas direcciones, lo que habilita la biyectividad del homeomorfismo (isomorfismo) entre el mapa cartesiano y el mapa encajado  $\{u, \theta\}$ .



**Figura 5:** Caso de estudio con plataforma en forma de barril. (a) Curva base a revolucionar (línea roja gruesa), obtenida como una composición de splines de Bézier de grado 6 definidas a través de sus polígonos de control (línea roja discontinua). El área azul representa el peine de curvatura del perfil. (b) Definición de los polígonos de control. (c) Plataforma de impresión final tras la revolución de la curva base.

Se ha optado por elegir un área definida por  $u \in [0.8, 1.2] \times \theta \in [0, 1]$  para distribuir  $N = 25$  puntos. Con un espesor de línea  $e = 0.04$  [mm] y un número  $m = 1$  de superposición de líneas, esto da lugar a una densidad de consigna de  $\rho = 53.9$  [%] sobre el área total. La elección de estos valores es arbitraria, ya que el caso de estudio pretende proporcionar una visualización de las capacidades del algoritmo en un caso sencillo de entender, aunque es extrapolable a cualquier otra combinación de parámetros.

Para validar el espaciado uniforme de los puntos, se recurre a una métrica de densidad continuas para cada punto  $i$  basada en una función de kernel [16]:

$$\rho_i = \sum_{i \neq j} m_j W_{ij} \quad (20)$$

$$W_{ij} = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - d_{ij}^{geo})^3, & 0 \leq d_{ij}^{geo} \leq h \\ 0, & d_{ij}^{geo} > h \end{cases} \quad (21)$$

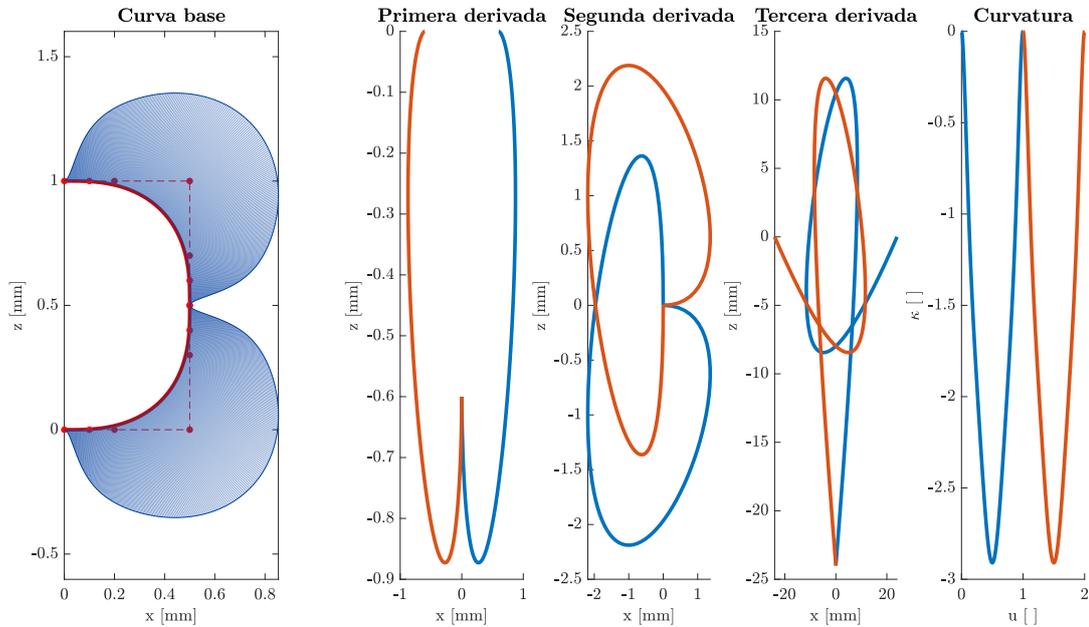
Donde  $\rho_i$  es la densidad de cada punto,  $m_j$  es la masa de cada punto (para el caso presentado, se supone que todos los puntos contribuyen de igual manera a la densidad y por tanto  $m = 1$ ),  $W_{ij}$  es la función de kernel, que es dependiente de un radio de vecindad  $h$ . Como se puede observar en (21),  $W_{ij} = 0$  cuando la distancia geodésica entre dos puntos es mayor a un cierto umbral  $h$ . Para realizar la validación en este trabajo, se ha presupuesto un valor de  $h = 4\sqrt{A} = 4 \frac{m \cdot e}{\rho_{consigna}}$ . Este valor se considera adecuado, ya que permite capturar la contribución a la densidad de los puntos que se encuentran a lo sumo cuatro celdas de distancia. Se considera que la distribución de puntos es suficientemente uniforme si, además de la comprobación visual, existen tres valores diferentes de densidad: un valor bajo, correspondiente a los vértices de la región en la que se distribuyen puntos, un valor intermedio, correspondiente a la frontera de la región (excluyendo los vértices) y un valor alto y constante, correspondiente a los puntos en el interior de la región.

### 3. Resultados y Discusión

A continuación se presentan los resultados del caso de estudio planteado. Esta Sección se divide en tres partes: en primer lugar, se presentan algunas consideraciones de continuidad sobre la plataforma de impresión propuesta (Subsección 3.1). En segundo lugar, se aportan los resultados visuales del algoritmo de optimización para mado uniforme en distancia geodésica (Subsección 3.2). Finalmente, se evalúa la métrica de densidad mediante función de kernel para verificar la uniformidad del mado (Subsección 3.3).

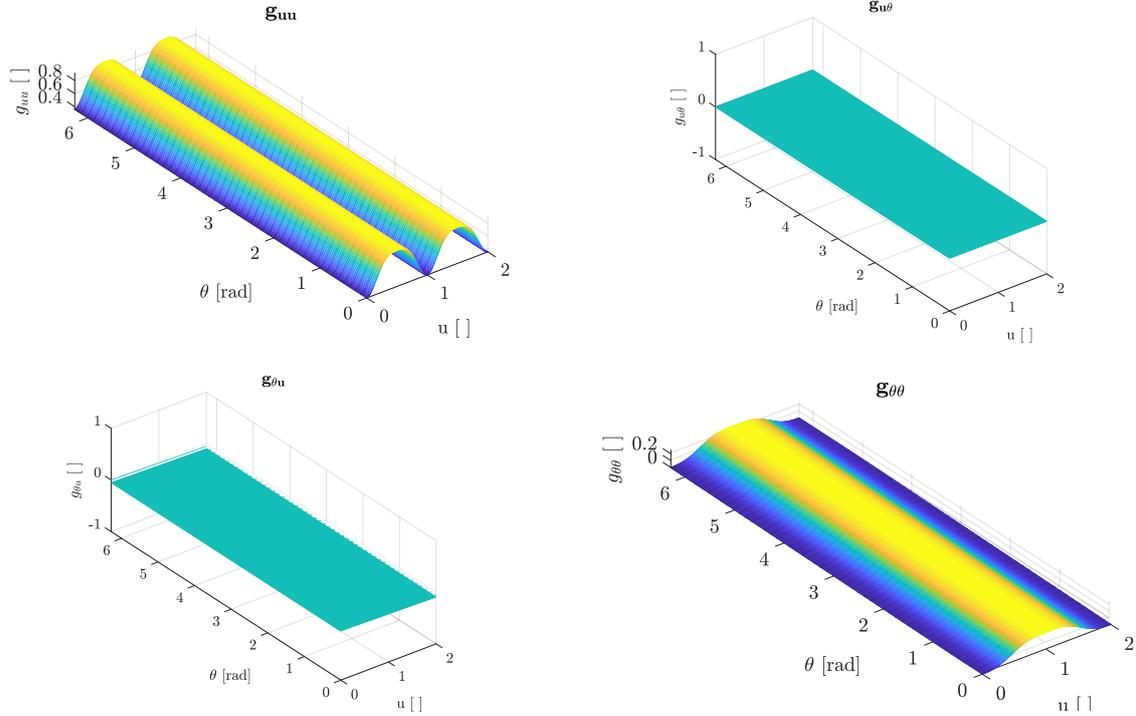
#### 3.1. Validación de las consideraciones de continuidad de la plataforma

El objetivo de esta Subsección es la demostración de las consideraciones sobre la continuidad de la plataforma, su tensor métrico y sus símbolos segundos de Christoffel, planteadas en la Subsección 2.1 de la Metodología. En primer lugar, en la Figura 6 se validan los planteamientos sobre la continuidad  $C^3$  de la cama a través de la evaluación de las derivadas primera, segunda y tercera, así como la curvatura de la curva base. Las gráficas de derivadas representan el extremo de los vectores derivada  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{S}$  y  $\mathfrak{S}$  respectivamente, y se puede comprobar la continuidad de dichos vectores entre ambos segmentos de la composición de splines. En el caso de la curvatura, la condición de continuidad  $C^3$  entre segmentos también posibilita la derivabilidad de esta magnitud, lo que confirma que la plataforma propuesta es una variedad riemanniana.

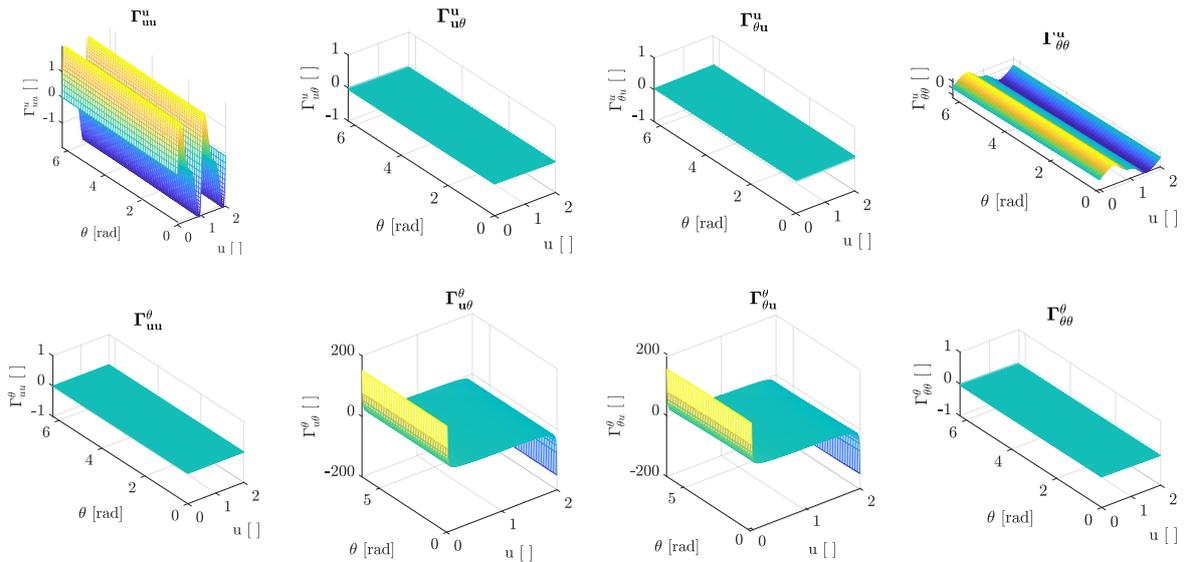


**Figura 6:** A la izquierda, sección de la curva base, con la curva base en línea roja gruesa, polígono de control en línea discontinua roja, peine de curvatura en azul. A la derecha, evaluación del vector derivada primera, segunda, tercera, y curvatura a lo largo de la curva base. En línea azul, primer tramo de la curva base ( $u \in [0,1]$ ). En línea naranja, segundo tramo de la curva base ( $u \in [1,2]$ ).

Adicionalmente, en las Figuras 7 y 8 se muestran los resultados de las componentes del tensor métrico  $g_{ij}$  y los símbolos segundos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ . En la Figura 7 se puede comprobar la ortonormalidad del mapa encajado  $\{u, \theta\}$ , ya que las componentes  $g_{u\theta}$  son nulas. Por otra parte, la Figura 8 valida la curvatura constante en la dirección de  $\theta$ , ya que los símbolos  $\Gamma_{uu}^\theta$  y  $\Gamma_{\theta\theta}^\theta$  son nulos. Adicionalmente, se puede comprobar que el planteamiento de continuidad  $C^3$  posibilita que todos los símbolos de Christoffel no nulos sean continuos y suavizados. Esta condición facilita el cálculo numérico de las curvas geodésicas  $\mathcal{G}(\tau)$ . No obstante, se comprueba que en el entorno de los polos, el símbolo  $\Gamma_{u\theta}^\theta = \Gamma_{\theta u}^\theta$  tiende a infinito. Esto es debido a que el tensor métrico  $g_{ij}$  pierde condicionamiento, ya que la componente  $g_{\theta\theta}$  se anula en ambos polos. Por ello, se recomienda emplear el algoritmo en regiones suficientemente alejadas de los polos para facilitar la convergencia numérica de la resolución de la ecuación geodésica.



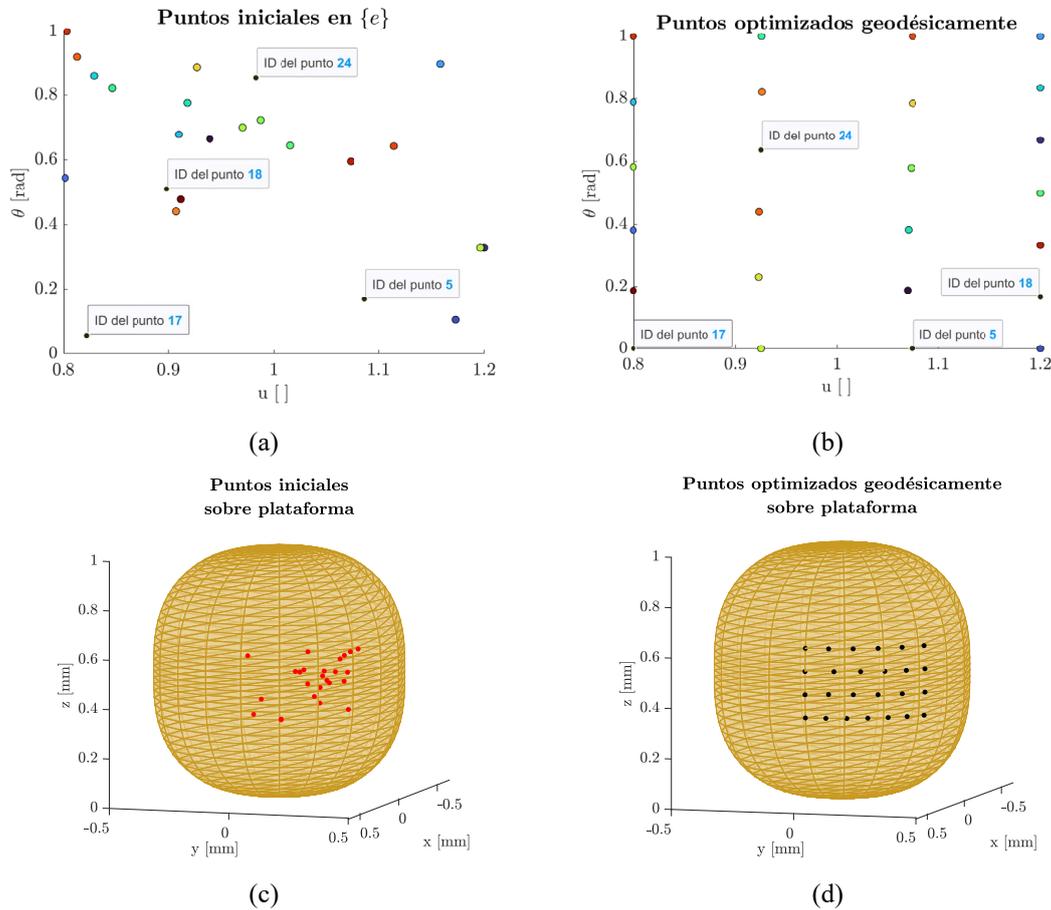
**Figura 7:** Componentes  $g_{ij}$  del tensor métrico de la curva base planteada en el caso de estudio. El color de la superficie va acorde con la cota en z de la variable.



**Figura 8:** Símbolos segundos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  para la curva base propuesta. El color de la superficie va de acuerdo con la cota en z de la variable.

### 3.2. Desempeño del algoritmo de optimización de puntos basado en fuerzas de repulsión

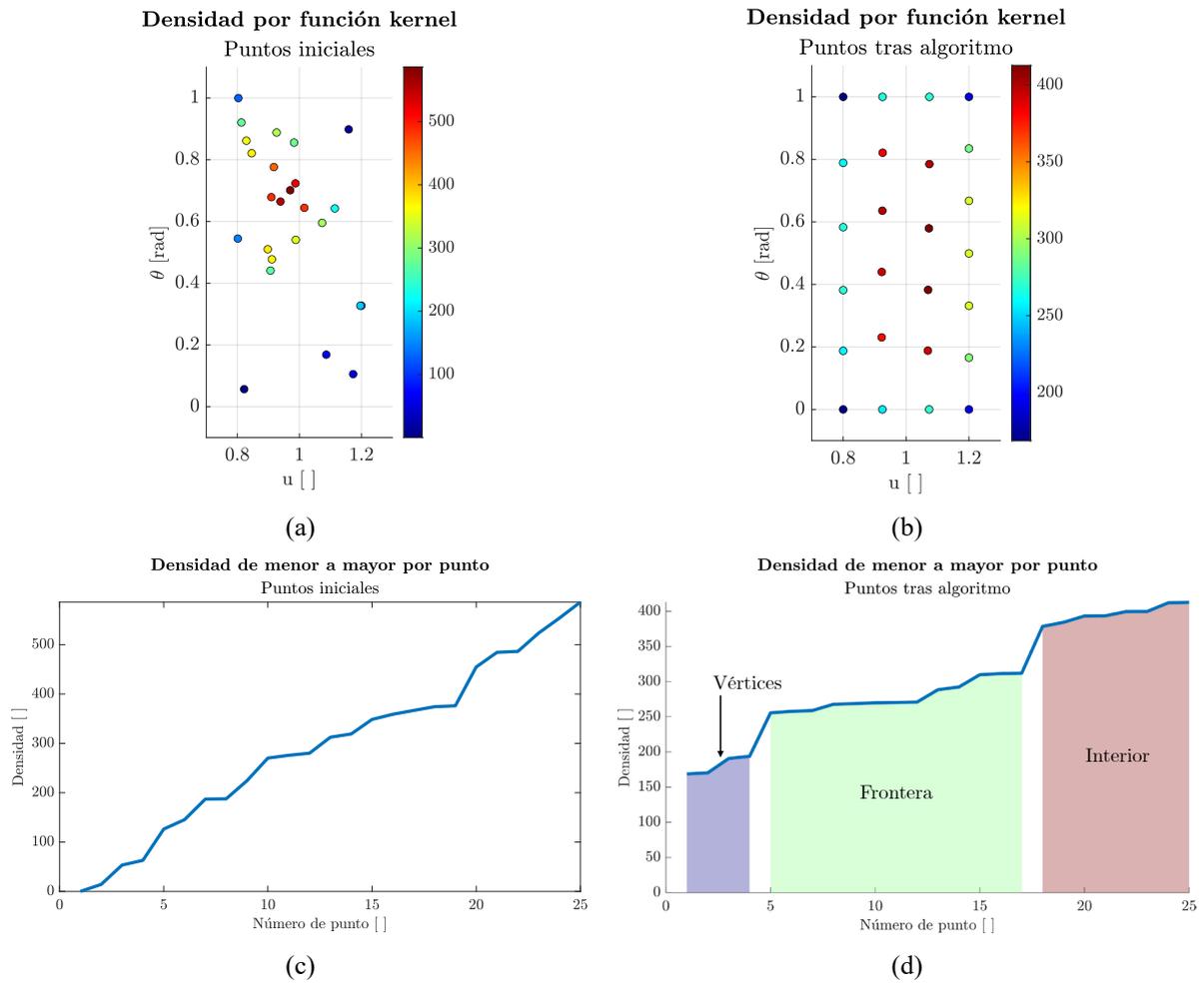
En cuanto al desempeño del algoritmo de reparto de puntos, en la Figura 9 se muestran a la izquierda los puntos iniciales (distribuidos aleatoriamente, arriba en el mapa encajado  $\{u, \theta\}$ , abajo en la plataforma en el mapa cartesiano) y a la derecha el resultado de la aplicación del algoritmo. Visualmente se puede comprobar la efectividad del algoritmo, que distribuye inicialmente los puntos por la frontera de la región  $u \in [0.8, 1.2] \times \theta \in [0, 1]$  y posteriormente por el interior de la región, cubriendo uniformemente el espacio propuesto. Se han coloreado los puntos en el mapa encajado para poder identificar qué punto corresponde a cuál tras la optimización. Adicionalmente, se han incluido leyendas en algunos puntos para reforzar el emparejamiento de puntos en el interior, en la frontera, y en los vértices.



**Figura 9:** Resultados del algoritmo de distribución de puntos mediante fuerzas de repulsión. (a) Puntos iniciales, distribuidos aleatoriamente en el mapa encajado. (b) Puntos distribuidos tras la aplicación del algoritmo en el mapa encajado. (c) Puntos iniciales dispuestos sobre la plataforma de impresión. (d) Puntos distribuidos tras el algoritmo sobre la plataforma de impresión.

### 3.3. Validación cuantitativa del desempeño del algoritmo mediante función de densidad

La comprobación visual de la Figura 9 se complementa con una evaluación de la función de densidad para ambas distribuciones de puntos, para establecer un criterio de aceptación cuantitativo. La Figura 10 muestra los resultados de la función de densidad de kernel con  $h = 4\sqrt{A}$ , tanto para los puntos iniciales como los puntos optimizados por el algoritmo.



**Figura 10:** Evaluación de la función de densidad de kernel. (a) Puntos iniciales sobre el mapa encajado, colores en función de la densidad. (b) Resultados de densidad ordenados de menor a mayor. (c) Puntos optimizados sobre el mapa encajado, colores en función de la densidad. (d) Densidad de cada punto ordenada de menor a mayor. En esta última, se representan las tres áreas esperadas: vértices, frontera e interior.

Como se comentó en la Subsección 2.6, la función de densidad ha de tener tres intervalos principales, correspondientes a los vértices, la frontera y el interior de la región en la que se distribuyen puntos. Estas tres regiones se encuentran representadas en la Figura 10, y son considerablemente más apreciables que en el caso inicial. Adicionalmente, se estima que cuanto mayor sea el número de puntos, más elongada será la región de puntos interiores, dado que la mayoría se encontrarán en esa región frente a la frontera. Esto refuerza las futuras aplicaciones del algoritmo. Por lo tanto, se considera satisfactorio el desempeño del algoritmo, y podrá ser empleado para realizar rellenos de densidad uniforme inferior al 100% en aplicaciones de NPAM, lo que conllevará un ahorro de tiempo, material y energía en estos procesos.

## 4. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un algoritmo de optimización de posiciones de puntos que permite la realización de rellenos de densidad uniforme inferior al 100%. El algoritmo está basado en conceptos topológicos como la distancia geodésica sobre una variedad que permiten extender la metodología a cualquier plataforma de impresión que esté basada en una curva de revolución. Esta metodología permite la distribución de puntos sobre un mapa encajado de una variedad de Riemann, que es el caso más general de plataforma de impresión axisimétrica para NPAM. El algoritmo demuestra su efectividad a la hora de distribuir puntos sobre este tipo de superficies de curvatura variable, lo que posibilita la creación de patrones de relleno conformes y uniformes en el contexto de NPAM.

Se han detectado algunas limitaciones en el desarrollo del trabajo, que serán objeto de estudio en el futuro. En primer lugar, la necesidad de calcular la ecuación geodésica entre todas las parejas de puntos para cada iteración del algoritmo de optimización es computacionalmente costoso, lo que da lugar a largos tiempos de ejecución. Este problema se puede subsanar a través de varios frentes: realizando el cálculo explícito del gradiente de la función distancia geodésica (como se ha realizado en el trabajo), aplicando distintos factores de normalización de la energía de la malla y su gradiente para facilitar la convergencia del algoritmo, o proveyendo al algoritmo una distribución

inicial de puntos cercana a la solución final, como puede ser la distribución euclídea de puntos en el mapa encajado. Con estas mejoras, se estima que se pueden obtener reducciones de tiempo de ejecución de hasta un 90%, lo que viabiliza completamente la inclusión de este tipo de algoritmos en laminadores para NPAM. Otro frente de mejora es el establecimiento de nuevas métricas de validación más cercanas a la realidad física, como puede ser un histograma de las áreas del diagrama de Voronoi basado en la métrica de la distancia geodésica. Esto permitirá confirmar el desempeño del algoritmo a través de magnitudes con un significado físico, como es el área.

Por último, se concluye que la metodología aportada en este trabajo permitirá una planificación más eficiente de procesos de NPAM, en términos de tiempos, costes, ahorro de material, eficiencia energética y sostenibilidad; ya que actualmente los procesos de NPAM se realizan mediante patrones de relleno completamente sólidos. Esta metodología puede resultar de interés en sectores de la industria donde el diseño orientado a NPAM pueda dar lugar a piezas de alta exigencia mecánica y alto valor añadido, como el sector aeroespacial o biomédico, la industria del automóvil, robótica blanda, piezas inteligentes con sensores encajados o manufactura rápida de moldes para material compuesto.

## 5. Agradecimientos

Este trabajo ha sido respaldado por el Ministerio de Ciencia e Innovación a través de la concesión del proyecto “Reducción del coste de producción de piezas actuales y futuras basado en nuevos materiales a partir de composites” de la convocatoria de Proyectos en Colaboración Público-Privada 2023, con código de concesión CPP2023-010651, así como el apoyo del Departamento de Ingeniería Mecánica ETSII de la Universidad Politécnica de Madrid.

## 6. Referencias

- [1] “Additive manufacturing - General principles - Fundamentals and vocabulary - ISO/ASTM 52900:2021.” 2021.
- [2] M. N. M. Azlin, R. A. Ilyas, M. Y. M. Zuhri, S. M. Sapuan, and M. M. Harussani, “3D Printing and Shaping Polymers, Composites, and Nanocomposites: A Review,” *Polymers (Basel)*, vol. 14, no. 180, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/polym14010180>.
- [3] P. Urhal, A. Weightman, C. Diver, and P. Bartolo, “Robot assisted additive manufacturing : A review,” *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 59, no. July 2018, pp. 335–345, 2019, doi: 10.1016/j.rcim.2019.05.005.
- [4] P. Tang *et al.*, “A review of multi-axis additive manufacturing : Potential , opportunity and challenge,” *Addit. Manuf.*, vol. 83, no. March, 2024, doi: 10.1016/j.addma.2024.104075.
- [5] M. Palmer and J. Laliberte, “Effects of non-planar slicing techniques and carbon fibre material additives on the mechanical properties of 3D-printed drone propellers,” *Drone Syst. Appl.*, 2023, doi: <https://doi.org/10.1139/dsa-2023-0007>.
- [6] D. Bi, M. Duan, T. Y. Lau, F. Xie, and K. Tang, “Strength-enhanced volume decomposition for multi-directional additive manufacturing,” *Addit. Manuf.*, vol. 69, no. March, p. 103529, 2023, doi: 10.1016/j.addma.2023.103529.
- [7] X. Li *et al.*, “Supportless 3D-printing of non-planar thin-walled structures with the multi-axis screw-extrusion additive manufacturing system,” *Mater. Des.*, vol. 240, no. March, p. 112860, 2024, doi: 10.1016/j.matdes.2024.112860.
- [8] C. Rodriguez-Padilla, E. Cuan-Urquizo, A. Roman-Flores, J. L. Gordillo, and C. Vázquez-Hurtado, “Algorithm for the conformal 3d printing on non-planar tessellated surfaces: Applicability in patterns and lattices,” *Appl. Sci.*, vol. 11, no. 16, 2021, doi: 10.3390/app11167509.
- [9] J. Etienne *et al.*, “Curvislicer: Slightly curved slicing for 3-axis printers,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 38, no. 4, 2019, doi: 10.1145/3306346.3323022.
- [10] A. M. Cendrero, G. M. Fortunato, J. M. Munoz-Guijosa, C. De Maria, and A. D. Lantada, “Benefits of non-planar printing strategies towards eco-efficient 3d printing,” *Sustain.*, vol. 13, no. 4, pp. 1–17, 2021, doi: 10.3390/su13041599.
- [11] G. Carabin, L. Scalera, T. Wongratanaphisan, and R. Vidoni, “An energy-efficient approach for 3D printing with a Linear Delta Robot equipped with optimal springs,” *Robot. Comput. Integr. Manuf.*, vol. 67, no. July 2020, p. 102045, 2021, doi: 10.1016/j.rcim.2020.102045.
- [12] K. Altaf, A. Majdi Abdul Rani, and V. R. Raghavan, “Prototype production and experimental analysis for circular and profiled conformal cooling channels in aluminium filled epoxy injection mould tools,”

- Rapid Prototyp. J.*, vol. 19, no. 4, pp. 220–229, 2013, doi: 10.1108/13552541311323236.
- [13] G. M. Fortunato, M. Nicoletta, E. Batoni, G. Vozzi, and C. De Maria, “A fully automatic non-planar slicing algorithm for the additive manufacturing of complex geometries,” *Addit. Manuf.*, vol. 69, no. December 2022, p. 103541, 2023, doi: 10.1016/j.addma.2023.103541.
- [14] A. Lopez-Arrabal, A. Guzman-Bautista, W. Solorzano-Requejo, A. Sancho-Arellano, F. Franco-Martinez, and A. Diaz Lantada, “Path planning design for robot based non-planar additive manufacturing case study: coronary stent,” in *International Conference on Mechanical Engineering and Robotics Research 2025 (Proceedings Pending)*, 2025, pp. 1–5.
- [15] C. Li, B. Wu, Z. Zhang, and Y. Zhang, “A novel process planning method of 3 + 2-axis additive manufacturing for aero-engine blade based on machine learning,” *J. Intell. Manuf.*, vol. 34, no. 4, pp. 2027–2042, 2023, doi: 10.1007/s10845-021-01898-6.
- [16] M. Jiang, Y. Zhou, R. Wang, R. Southern, and J. J. Zhang, “Blue noise sampling using an SPH-based method,” *ACM Trans. Graph.*, vol. 34, no. 6, pp. 1–11, 2015, doi: 10.1145/2816795.2818102.
- [17] S. Singh, A. Singh, S. Kapil, and M. Das, “Generation of continuous and sparse space filling toolpath with tailored density for additive manufacturing of biomimetics,” *CAD Comput. Aided Des.*, vol. 173, no. April, p. 103718, 2024, doi: 10.1016/j.cad.2024.103718.
- [18] J. Pierre *et al.*, “Non-planar material-extrusion additive manufacturing of multifunctional sandwich structures using carbon-reinforced polyetheretherketone (PEEK),” *Addit. Manuf.*, vol. 84, no. March, 2024, doi: 10.1016/j.addma.2024.104124.
- [19] F. Insero, V. Furlan, and H. Giberti, “A Novel Infill Strategy to Approach Non-Planar 3D-printing in 6-Axis Robotized FDM,” *MESA 2022 - 18th IEEE/ASME Int. Conf. Mechatron. Embed. Syst. Appl. Proc.*, pp. 1–6, 2022, doi: 10.1109/MESA55290.2022.10004465.
- [20] F. Insero, V. Furlan, and H. Giberti, “Non-planar slicing for filled free-form geometries in robot-based FDM,” *J. Intell. Manuf.*, no. May, 2023, doi: 10.1007/s10845-023-02250-w.
- [21] A. López-Arrabal, Á. Guzmán-Bautista, W. Solórzano-Requejo, F. Franco-Martínez, and M. Villaverde, “Axisymmetric non-planar slicing and path planning strategy for robot-based additive manufacturing,” *Mater. Des.*, vol. 241, no. March, 2024, doi: 10.1016/j.matdes.2024.112915.
- [22] M. Balzer, T. Schlömer, and O. Deussen, “Capacity-constrained point distributions,” vol. 1, no. 212, pp. 1–8, 2009, doi: 10.1145/1576246.1531392.