



APLICACIÓN PARA LA SÍNTESIS DE CUADRILÁTEROS ARTICULADOS COGNADOS

Enrique Soriano Heras¹, Higinio Rubio Alonso², Carlos Pérez Carrera³

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, esoriano@ing.uc3m.es

² Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Carlos III de Madrid, h Rubio@ing.uc3m.es

³ Department of Industrial Engineering, University of Salerno, Italy; cperezcarrera@unisa.it

El diseño de nuevos mecanismos es fundamental en muchas tecnologías cotidianas, desde maquinaria industrial hasta dispositivos domésticos. Su principal función es convertir el trabajo en movimiento para realizar tareas específicas de manera eficiente. Los mecanismos de cuatro barras son esenciales en este contexto por su sencillez y amplio rango de aplicaciones, tanto en términos académicos como prácticos.

Los métodos gráficos y analíticos actuales para diseñar mecanismos frecuentemente no resultan factibles económicamente o en términos de fabricación. Los métodos de construcción de mecanismos cognados proporcionan alternativas, con diferentes dimensiones y características, abordando la necesidad de un método intuitivo y original para su síntesis.

La presente investigación se centra en la creación y análisis de mecanismos cognados, los cuales, a pesar de tener geometrías diferentes, producen movimientos idénticos en sus acopladores. Este enfoque se basa en el Teorema de Roberts-Chebyshev, que permite a tres mecanismos cuadriláteros compartir una misma trayectoria de un punto del eslabón acoplador.

El Método Gráfico de Roberts-Chebyshev, utiliza diagramas geométricos para construir mecanismos cognados. Es sencillo, pero requiere habilidades gráficas. El Método Analítico de Samantha Sherman, emplea ecuaciones cinemáticas y permutaciones de rotaciones para identificar cognados. Es más preciso pero laborioso y requiere interpretación gráfica y simulación, para verificar resultados.

En este artículo se detalla un programa desarrollado para modelar mecanismos cognados de forma accesible, evitando conceptos geométricos y matemáticos complejos. El programa utiliza datos de entrada como la posición de los apoyos y las longitudes de los eslabones, generando representaciones gráficas de los mecanismos. Se presentan ejemplos prácticos de mecanismos originales y sus cognados, mostrando las ecuaciones de bucle y las relaciones entre las rotaciones de los eslabones, asegurando la consistencia en las trayectorias generadas.

El enfoque presentado en este artículo permite construir y analizar mecanismos cognados de manera eficiente y accesible, combinando métodos gráficos y analíticos para adaptarse a diversas necesidades de diseño de mecanismos en Ingeniería Mecánica.

1. Introducción

El presente artículo se centra en el diseño y síntesis de mecanismos de cuatro barras y sus mecanismos cognados. Los mecanismos de cuatro barras son componentes fundamentales en Ingeniería Mecánica debido a su simplicidad, versatilidad y amplia gama de aplicaciones. La síntesis de mecanismos implica determinar las dimensiones y configuraciones necesarias para lograr un movimiento o transformación de fuerza específico.

Si bien existen métodos para sintetizar mecanismos, estos a menudo no consideran de manera integral las restricciones económicas y de fabricación. El objetivo de este artículo es desarrollar un método sistemático e intuitivo para construir mecanismos cognados de cuatro barras que satisfagan tanto los requisitos funcionales como las limitaciones prácticas.

La síntesis de mecanismos de cuatro barras ha sido un área de investigación activa durante décadas. Numerosos estudios han explorado diversos métodos para diseñar estos mecanismos con el objetivo de obtener movimientos y fuerzas específicos.

Los trabajos pioneros de Reuleaux [1] sentaron las bases de la cinemática moderna, mientras que Grübler [2] y Grashof [3] desarrollaron criterios fundamentales para analizar la movilidad de los mecanismos. La notación de Hartenberg y Denavit [4] se convirtió en un estándar para describir la cinemática de los eslabones.

Investigadores como Wampler et al. [5] resolvieron el problema de la síntesis de trayectorias de nueve puntos, estableciendo un hito en el campo. Roth y Freudenstein [6] introdujeron métodos numéricos para abordar problemas más complejos, y Kramer y Sandor [7] desarrollaron el método SPS para optimizar el diseño. Estudios más recientes, como los de Li et al. [8] y Hernández et al. [9], han explorado nuevas técnicas para la generación de trayectorias.

El concepto de mecanismos cognados, introducido por Roberts [10], ha sido ampliamente estudiado. Soni [11], [12] y Lakshminarayana y Butchi Raju [13] realizaron contribuciones significativas en este campo. Sherman et al. [14], [15] desarrollaron métodos algebraicos para construir mecanismos cognados.

El término "cognado" se utilizó para describir un mecanismo, de geometría diferente, que genera la misma trayectoria del punto de acoplamiento [11], [12]. A veces, una buena solución a un problema de síntesis de mecanismos que satisface la realización de la trayectoria deseada presenta problemas dimensionales, como posiciones de soporte inadecuadas o un tamaño excesivo del mecanismo. Para resolver estos casos, puede ser útil el uso de un cognado del mecanismo.

Samuel Roberts y Chebyshev [10] propusieron un teorema basado en métodos gráficos para la construcción de mecanismos cognados, que actualmente se conoce como "Teorema de Roberts-Chebyshev". Este teorema establece que tres mecanismos planares de cuatro barras comparten el mismo punto de acoplamiento P, por lo tanto, compartirán el mismo movimiento de trayectoria en sus curvas de acoplamiento, Figura 4. El Teorema de Roberts-Chebyshev se basa en el uso de diagramas y representaciones geométricas para construir y visualizar mecanismos cognados y es conocido por su simplicidad y aplicación directa a través de dibujos. Este método tiene la desventaja de ser un método laborioso y requiere que el usuario tenga buenas habilidades para interpretar y aplicar las técnicas gráficas necesarias.

Otro método útil para construir mecanismos cognados es el método propuesto por Samantha Sherman et al. [14], [15], que se basa en el Teorema de Roberts-Chebyshev pero contiene un enfoque más analítico y matemático. El núcleo de este método radica en permutar las rotaciones de los enlaces del mecanismo inicial. Esto implica intercambiar las posiciones y conexiones de las rotaciones para crear un nuevo mecanismo que preserve las características del mecanismo original. Este método solo es aplicable a mecanismos de un grado de libertad que satisfacen el principio de Grashof. Como se discutió anteriormente, este método utiliza un enfoque más analítico y matemático, utilizando ecuaciones cinemáticas y permutaciones de rotaciones para identificar cognados. Esto conduce a una mayor comprensión de las matemáticas y la cinemática avanzadas. También ofrece una mayor flexibilidad y puede aplicarse a una variedad más amplia de mecanismos, incluidos aquellos con un mayor número de barras. El método propuesto por Samantha puede ser útil en entornos donde la precisión y la validación matemática son cruciales, pero puede ocurrir que el intercambio de rotaciones no corresponda a un mecanismo cognado, creando una inconsistencia en las ecuaciones lineales resultantes, lo que resulta en un trabajo laborioso que consume una cantidad significativa de tiempo. Este método también se basa en la interpretación gráfica y la necesidad de simulación para verificar los resultados.

La llegada de las computadoras ha permitido el desarrollo de métodos numéricos y computacionales más sofisticados. Plecnik y McCarthy [16] y Baskar y Plecnik [17] aplicaron métodos numéricos para sintetizar mecanismos de seis barras.

Los mecanismos de cuatro barras y sus cognados encuentran aplicaciones en diversas áreas, desde la robótica hasta la maquinaria industrial. Soriano-Heras et al. [18], por ejemplo, utilizaron mecanismos de cuatro barras en el diseño de una mano protésica.

A pesar de los avances, aún existen desafíos en la síntesis de mecanismos, como la consideración de restricciones de fabricación y costos. Los investigadores actuales se centran en desarrollar métodos más flexibles y adaptables que puedan explorar un amplio espacio de diseño.

2. Materiales y métodos

Esta sección detalla el método propuesto para la síntesis de mecanismos de cuatro barras y sus cognados. Se divide en tres partes principales: fundamentos teóricos, proceso de obtención de mecanismos cognados, e implementación práctica.

2.1. Fundamentos Teóricos

- Mecanismos y sus componentes:

Un mecanismo se compone de un conjunto de sólidos unidos entre sí con el objetivo de realizar un movimiento específico. Este movimiento puede ser rotatorio, como el de una rueda, o traslacional, como el de un pistón en un cilindro, tal como se muestra en la Figura 1.

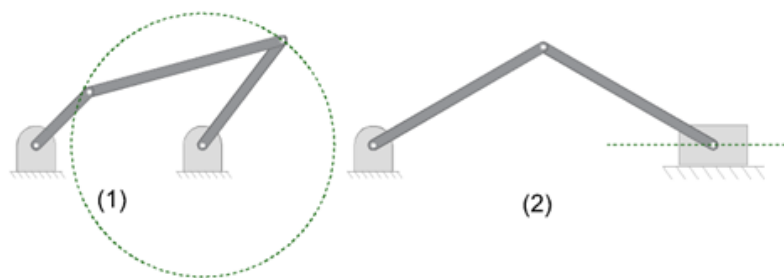


Figura 1: Ejemplos de movimiento rotatorio (1) y traslacional (2)

Los mecanismos pueden adoptar una gran variedad de configuraciones y estar compuestos por una amplia gama de partes, pero su función sigue siendo la misma: trazar una trayectoria específica en un punto dado del mecanismo mediante el movimiento del eslabón de entrada. Para simplificar estos sistemas, los componentes del mecanismo se representan simbólicamente, creando así un diagrama que facilita la comprensión visual del mecanismo.

Los mecanismos se componen de tres tipos principales de componentes, como se muestra en la Figura 2:

- Eslabones: Son las partes sólidas del mecanismo que se conectan entre sí para transmitir el movimiento. Según el número de nodos (puntos de conexión entre los eslabones), los eslabones se clasifican como binarios, ternarios o cuaternarios.
- Juntas o pares de rotación: Son los puntos de conexión entre dos o más eslabones donde se permite cierto movimiento entre los eslabones interconectados. Reuleaux acuñó el término par inferior para describir las juntas con un contacto menor y el término par superior para describir las juntas con un contacto puntual o lineal.
- Soportes: Son los puntos fijos del mecanismo que proporcionan estabilidad y soporte al mecanismo.

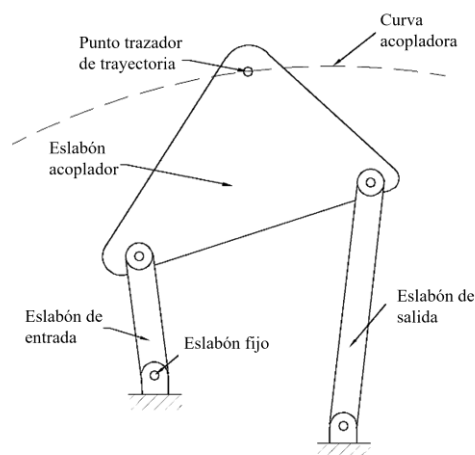


Figura 2: Mecanismo de cuatro barras

- Grados de libertad:

Una característica que determina si el mecanismo estudiado puede moverse o es, en cambio, una estructura estática, son los grados de libertad (GDL) del mecanismo. Esta característica determina el número de coordenadas independientes necesarias para definir su posición o, en otras palabras, indica el número de direcciones en las que un mecanismo puede moverse.

Para determinar los GDL de un mecanismo, se debe considerar el número de eslabones, juntas y la interacción entre ellos. Para ello, se aplica el criterio de Grübler, que establece que el grado de libertad de una cadena cinemática depende del número de sus eslabones y pares de rotación, ecuación 1.

$$GDL = 3 \cdot (N - 1) - 2 \cdot f_1 - f_2 \quad (1)$$

En la ecuación 1, N es el número de eslabones, f_1 son los pares de un grado de libertad y f_2 son los pares de dos grados de libertad. En el caso en que $GDL \geq 1$, el sistema se considerará un mecanismo, mientras que si $GDL=0$, el sistema se considerará una estructura fija.

En el caso de los mecanismos de cuatro barras estudiados en este artículo, tienen un grado de libertad. Esto significa que el mecanismo solo puede moverse en un eje fijo o moverse en una dirección lineal específica.

- Condición de Grashof:

Los mecanismos de cuatro barras se diferencian entre sí en función de sus características cinemáticas. Por lo tanto, estos mecanismos se dividen en dos clases:

- Clase I: Se definen como mecanismos de manivela donde al menos uno de sus eslabones realiza una rotación completa.
- Clase II: Se definen como mecanismos de balancín donde ninguno de los elementos del cuadrilátero realiza una rotación completa.

Para clasificar los mecanismos de cuatro barras en una de estas dos clases, el ingeniero y profesor de mecánica aplicada Franz Grashof desarrolló un teorema conocido como "Teorema de Grashof" donde, dependiendo de las longitudes de los eslabones del mecanismo, se puede asignar una de estas dos clases al mecanismo.

El teorema de Grashof consiste en medir las longitudes de los eslabones del mecanismo y observar si se cumple la siguiente condición, ecuación 2.

$$a + d \leq b + c \quad (2)$$

En la ecuación 2, "a" es la longitud del eslabón más corto. "d" es la longitud del eslabón más largo. "b" y "c" son las longitudes de los otros dos eslabones, ver Figura 3.

Por lo tanto, si se encuentra que el mecanismo cumple con Grashof, al menos uno de los eslabones podrá realizar una rotación completa con respecto al eslabón fijo. Este tipo de cadena cinemática pertenece a la clase I. Si, por el contrario, el mecanismo no cumple con Grashof, ningún eslabón podrá realizar una rotación completa. Este tipo de cadena cinemática se denomina clase II.

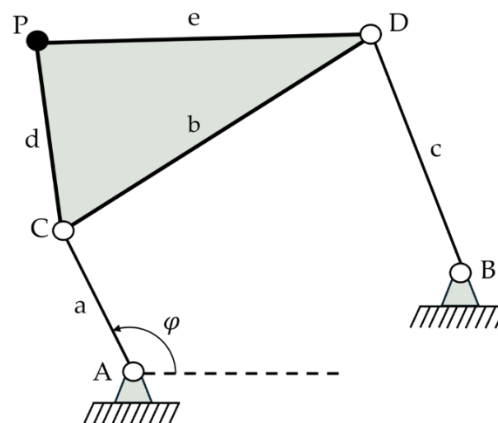


Figura 3: Parámetros de un mecanismo de cuatro barras

- Coordenadas naturales:

Las coordenadas naturales son aquellas variables que describen completamente la configuración y posición de un mecanismo y están relacionadas por consideraciones geométricas. Estas relaciones se expresan mediante ecuaciones de restricción. El número de ecuaciones de restricción está determinado por los GDL y las coordenadas dependientes del mecanismo, que se obtienen aplicando la ecuación 3 [19], [20].

$$m = n - F \quad (3)$$

En la ecuación 3, "m" indica el número de ecuaciones de restricción, "n" indica el número de coordenadas dependientes y "F" indica los grados de libertad del mecanismo.

Como se indicó en la sección anterior, el mecanismo de cuatro barras que se va a modelar consta de un grado de libertad definido por la coordenada angular φ y seis coordenadas dependientes que se refieren a la posición de los pares cinemáticos del mecanismo. Aplicando la ecuación 3, se obtiene que se necesitan seis ecuaciones de restricción para definir la posición del mecanismo, ver Figura 3.

Las ecuaciones de restricción que definen el mecanismo se obtienen aplicando el teorema del lazo vectorial sumando la longitud y el ángulo del eslabón de entrada. Las ecuaciones de restricción para un mecanismo de cuatro barras con triángulo de acoplamiento, como se muestra en la Figura 3, son las ecuaciones 4.

$$\begin{aligned}
 (C_x - A_x) - a \cos(\varphi) &= 0 \\
 (C_y - A_y) - a \sin(\varphi) &= 0 \\
 (D_x - C_x)^2 + (D_y - C_y)^2 - b^2 &= 0 \\
 (D_x - B_x)^2 + (D_y - B_y)^2 - c^2 &= 0 \\
 (P_x - C_x)^2 + (P_y - C_y)^2 - d^2 &= 0 \\
 (P_x - D_x)^2 + (P_y - D_y)^2 - e^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

En las ecuaciones 4, A y B indican los soportes fijos del mecanismo y a, b, c, d y e indican las longitudes de las barras. Estos nueve parámetros independientes, representados en la Figura 3, no son fáciles de determinar, ya que en la mayoría de los casos deben resolverse ecuaciones no lineales.

2.2. Proceso de obtención de mecanismos cognados

El método de construcción de mecanismos cognados que este artículo propone tiene como objetivo ser más accesible, sin la necesidad de aplicar conceptos matemáticos complejos, así como ser más fácil de implementar en una aplicación, como Matlab, haciéndolo útil para aplicaciones prácticas.

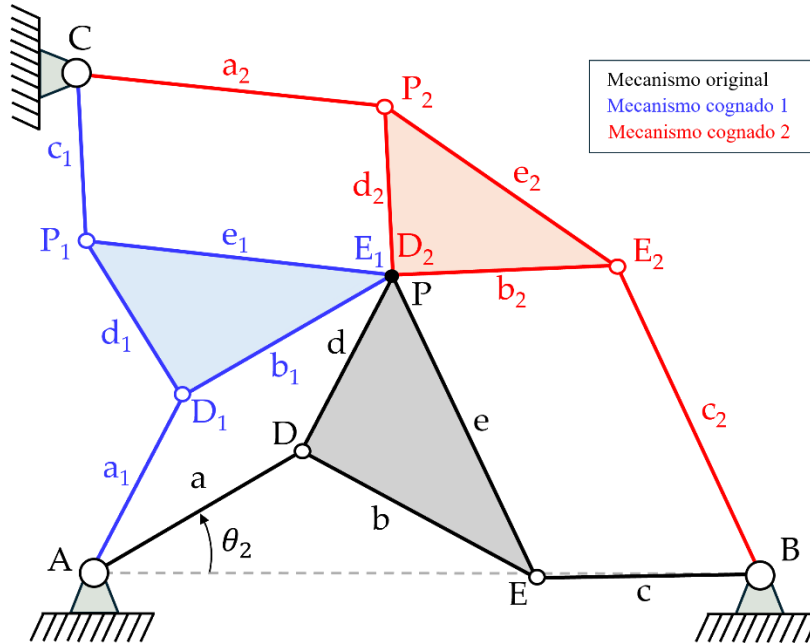
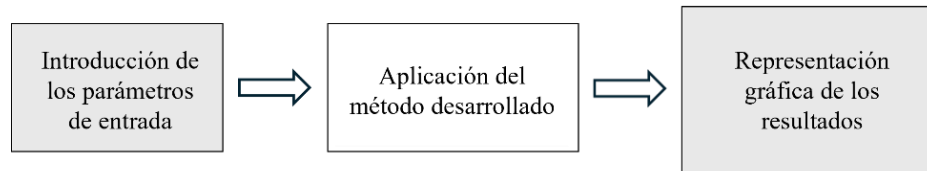


Figura 4: Ejemplo de mecanismo original y sus cognados

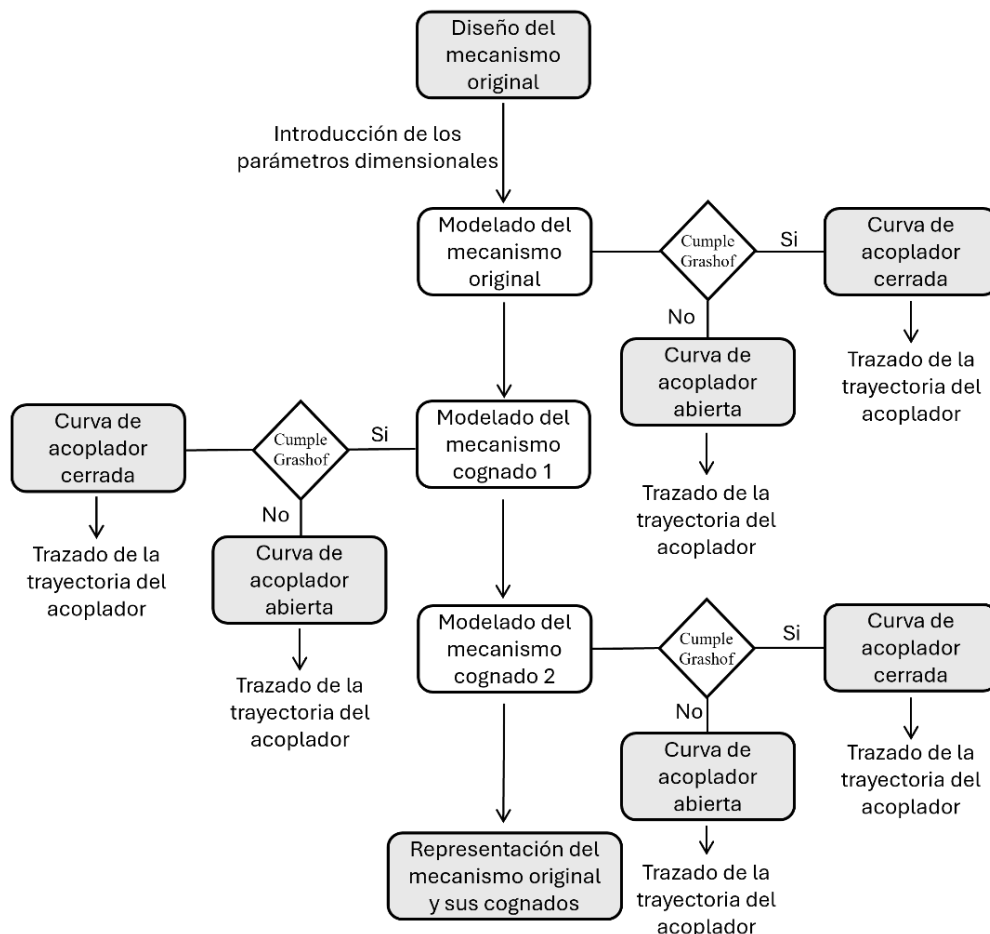
Para desarrollar el método de construcción, primero deben conocerse los datos iniciales. Como se muestra en la Figura 5, los datos requeridos para modelar el mecanismo original son parámetros dimensionales como la posición de los dos soportes y las longitudes de los enlaces que definen el mecanismo original, y se obtendrán los mecanismos cognados.

**Figura 5:** Desarrollo del método

Con los parámetros dimensionales del mecanismo definidos, el método propuesto realizará las siguientes tareas mediante el uso del software Matlab:

- Modelado del mecanismo de cuatro barras, clasificación de este según cumpla o no con Grashof y trazado de la trayectoria del punto de acoplamiento.
- Construcción del mecanismo cognado 1, clasificación basada en la condición de Grashof y trazado de la trayectoria del punto de acoplamiento.
- Construcción del mecanismo cognado 2, clasificación basada en la condición de Grashof y trazado de la trayectoria del punto de acoplamiento.

El diagrama de flujo de la Figura 6 muestra los procesos seguidos por el método propuesto para poder dimensionar el mecanismo original y construir sus mecanismos cognados. El propósito de este método es poder representar gráficamente los mecanismos junto con el trazado de las curvas de acoplamiento que realizan. Para ello, el método de síntesis sigue una ejecución secuencial en la que previamente se dimensiona el mecanismo inicial y se calcula la trayectoria, luego se construye el mecanismo cognado 1 relacionando sus parámetros con el mecanismo original y, finalmente, se construye el mecanismo cognado 2 relacionando sus parámetros con los mecanismos anteriores.

**Figura 6:** Diagrama de flujo del método propuesto de síntesis de mecanismos

El método, una vez implementado en Matlab, proporcionará una representación gráfica en coordenadas cartesianas de cada mecanismo. Esto incluirá la curva trazada por cada mecanismo en el punto de acoplamiento, así como una representación gráfica conjunta de los mecanismos. Esta visualización permitirá evaluar y comparar las diferencias dimensionales entre los diferentes mecanismos.

- Dimensionado del mecanismo original

El método comienza introduciendo los parámetros dimensionales de un mecanismo articulado cuadrilátero como se muestra en la Figura 7. Los parámetros que se deben introducir son:

- La distancia de separación " l " entre los soportes A y B, expresada en unidades de longitud.
- Las longitudes de los enlaces a , b , c , d y e , expresadas en unidades de longitud.
- Los coeficientes " t_1 " y " t_2 " cuyos valores son 1 o -1 e indican la configuración del mecanismo como se muestra en la Figura 8.
- El ángulo de entrada θ_2 expresado en grados para poder representar el mecanismo en una posición fija.

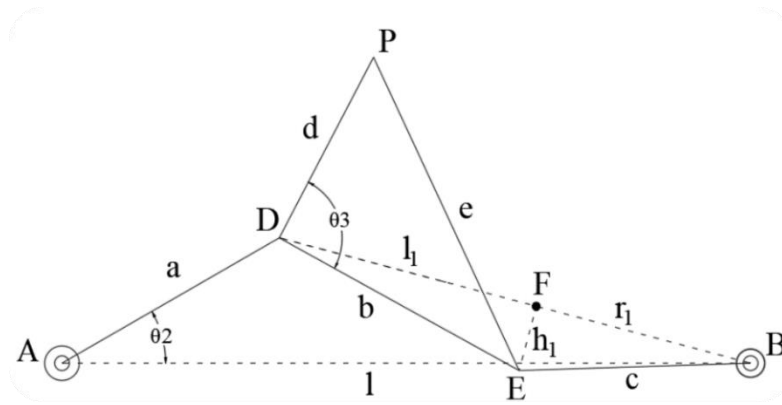


Figura 7: Parámetros del mecanismo original

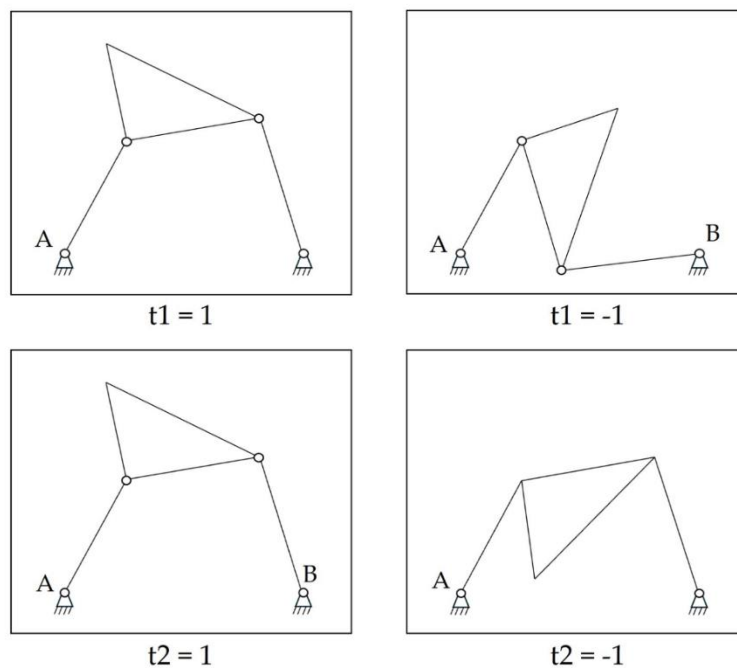


Figura 8: Configuraciones del mecanismo

Una vez introducidas las longitudes de los enlaces, se verifica si el mecanismo cumple con Grashof utilizando la ecuación 2. Por lo tanto, el mecanismo se clasificará como un mecanismo donde el enlace de entrada realiza la rotación completa si cumple con Grashof; si no cumple con Grashof, se clasificará como un mecanismo donde la rotación del enlace de entrada está limitada. Saber esto es necesario porque los mecanismos que no realizan la rotación completa tendrán valores de ángulos que no podrán alcanzar.

Para resolver este problema, se agrega una restricción geométrica, la ecuación 5, que decide si el mecanismo puede ser modelado. Esta restricción significa que si la distancia desde el punto D al punto B, definida como " s " en la Figura 7, es mayor que la suma de las longitudes de los enlaces " b " y " c ", el mecanismo no puede ser modelado.

Por lo tanto, si se introduce un ángulo que el mecanismo no puede alcanzar geoméricamente, ese mecanismo no será representado.

$$s \leq (b + c) \quad (5)$$

Para modelar el mecanismo, es necesario calcular las coordenadas naturales de los puntos de conexión entre los enlaces que definen la posición del mecanismo para el ángulo de entrada dado. Estas coordenadas se obtienen desarrollando las ecuaciones de restricción que definen los mecanismos de cuatro barras.

Para facilitar los cálculos, se decide que el soporte fijo A se ubicará en el origen de coordenadas y el soporte fijo B se ubicará en la misma línea horizontal que el soporte A, separado por la distancia "l" que se introducirá como parámetro de entrada, Figura 7. Conociendo la longitud del enlace "a", las coordenadas del punto D se pueden obtener con la ecuación 6.

$$D = \begin{bmatrix} A_x + a \cos(\theta_2) \\ A_y + a \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para obtener las coordenadas del punto E, en la Figura 7, se dibuja previamente una línea "s" correspondiente al segmento, cuya longitud se obtiene calculando su módulo, ecuación 7.

$$s = \|B - C\| = \sqrt{(B_x - D_x)^2 + (B_y - D_y)^2} \quad (7)$$

Desde el punto E se traza una línea que corta a "s" perpendicularmente, cuyo punto de intersección se define como F y divide el segmento "s" en r_1 y l_1 . De esta manera, hay dos triángulos rectángulos y en los que, aplicando Pitágoras y sabiendo que $s = l_1 + r_1$, se obtienen las ecuaciones 8 y 9.

$$l_1 = \frac{b^2 + s^2 - c^2}{2s} \quad (8)$$

$$h_1 = t_1 \sqrt{b^2 - l_1^2} \quad (9)$$

De esta manera, las coordenadas del punto F se obtienen de la ecuación 10, donde se definen por la posición del punto C y la relación del vector.

$$F = D + \frac{l_1}{s}(B - D) \quad (10)$$

El punto E se definirá mediante la ecuación 11, donde se obtiene de la ecuación 12.

$$E = F + \overline{FD} \quad (11)$$

$$\overline{FD} = \frac{h_1}{s}(B - D) \quad (12)$$

Por lo tanto, la ecuación 13 define las coordenadas del punto E.

$$E = D + \frac{l_1}{s}(B - D) + \frac{h_1}{s}(B - D) \quad (13)$$

Del mismo modo, se deducen las ecuaciones 14, 15 y 16 que definen el punto P.

$$l_2 = \frac{d^2 + b^2 - e^2}{2b} \quad (14)$$

$$h_2 = t_2 \sqrt{d^2 - l_2^2} \quad (15)$$

$$P = C + \frac{l_2}{b}(E - D) + \frac{h_2}{b}(E - D) \quad (16)$$

Con las expresiones obtenidas, se construye el vector de coordenadas naturales que define la posición del mecanismo de cuatro barras, ecuación 17.

$$q = \begin{bmatrix} D \\ E \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ E_x \\ E_y \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x + a \cos(\theta_2) \\ A_y + a \sin(\theta_2) \\ D_x + \frac{l_1}{s}(B_x - D_x) + \frac{h_1}{s}(B_y - D_y) \\ D_y + \frac{l_1}{s}(B_y - D_y) + \frac{h_1}{s}(B_x - D_x) \\ D_x + \frac{l_2}{b}(E - D_x) + \frac{h_2}{b}(D_y - E_y) \\ D_y + \frac{l_2}{b}(E_y - D_y) + \frac{h_2}{b}(D_x - E_x) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Como se explicó al comienzo de la sección, si estas ecuaciones de restricción se calculan para un ángulo que el mecanismo no puede alcanzar, estas ecuaciones no tendrán solución.

- Generación de la trayectoria de los mecanismos

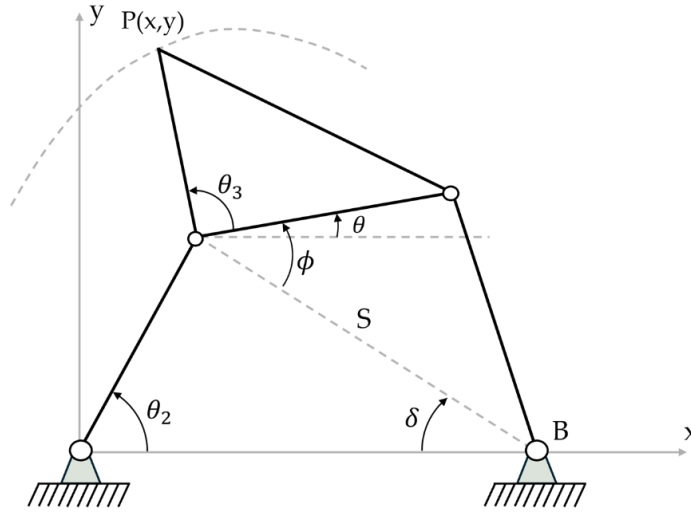


Figura 9: Trayectoria de un mecanismo

En el caso del mecanismo original, se decide representar la trayectoria calculando las ecuaciones paramétricas 18 y 19 que definen las coordenadas naturales del punto P para un ángulo de entrada introducido θ_2 , ver Figura 9.

$$x = a \cdot \cos\theta_2 + d \cdot \cos(\phi + \delta - \theta_2) \quad (18)$$

$$y = a \cdot \sin\theta_2 + d \cdot \sin(\phi + \delta - \theta_2) \quad (19)$$

Para calcular la trayectoria, se realiza una iteración sobre las expresiones obtenidas donde se incrementa el valor del ángulo introducido y, a su vez, se representa el valor de las coordenadas del punto P. En el caso de mecanismos que no cumplen con Grashof y no realizan una rotación completa, la representación se limitará a los valores de ángulo que el mecanismo puede reproducir. Estas coordenadas se obtienen calculando previamente los ángulos que definen la posición de los puntos del mecanismo. Estos ángulos, que se muestran en la Figura 9, se calculan con las ecuaciones 20 a 22.

$$\delta = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\theta_2)}{s}\right) \quad (20)$$

$$\phi = t1 \cdot \arccos\left(\frac{s^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot s \cdot b}\right) \quad (21)$$

$$\theta = \phi - \delta \quad (22)$$

Al igual que con el modelado del mecanismo, para obtener la trayectoria del punto P, es necesario indicar cuál de las dos configuraciones del punto D tendrá el mecanismo; para ello, se introduce el valor 1 o -1 en la entrada para el parámetro $t1$, Figura 8.

- Construcción de mecanismos cognados

Para construir los mecanismos cognados del mecanismo original, primero es necesario obtener el punto donde se apoyarán el cognado 1 y el cognado 2. Este punto se denomina soporte C, como se muestra en la Figura 4, y su función es servir como segundo soporte fijo para los mecanismos cognados.

Como característica de este soporte C, en la Figura 4, el triángulo formado por los puntos es similar al triángulo de acoplamiento formado por los puntos. Teniendo la longitud entre los soportes A y B, y las longitudes de los enlaces b, d y e; se puede aplicar la ecuación 23 de semejanza entre triángulos para obtener la longitud desde el soporte A hasta el soporte C, que se denominará mAC .

$$mAC = \frac{d}{b} \cdot l \quad (23)$$

Una vez obtenida la longitud del segmento mAC , es necesario determinar el ángulo formado por las líneas AB y AC que coincide con el ángulo formado por los enlaces d y b. Este ángulo se denomina θ_3 y se obtiene aplicando el teorema del coseno, ecuación 24 y Figura 7.

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{d^2 + b^2 - e^2}{2 \cdot d \cdot b}\right) \quad (24)$$

$$C = \begin{bmatrix} A_x + \overline{AC} \cos(\theta_3) \\ A_y + \overline{AC} \sin(\theta_3) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Con la longitud $\overline{mAC}$ y el ángulo θ_3 se obtienen las coordenadas del punto C.

Para facilitar la comprensión, el mecanismo original será el mecanismo mostrado en la Figura 7, para el cual se conocerán todos sus parámetros dimensionales. El objetivo será obtener los parámetros dimensionales del mecanismo cognado 1 y los parámetros dimensionales del mecanismo cognado 2. Una vez obtenidos estos parámetros, será fácil representarlos gráficamente mediante el software Matlab.

El cognado uno se construye a partir de la relación entre él y el mecanismo original. Como se explicó en el método de Chebyshev, el segmento de longitud “d” coincide con el segmento de longitud a_1 , es decir, $d=a_1$. Por lo tanto, las coordenadas del punto D_1 se pueden calcular con la ecuación 26, ver Figura 4.

$$D_1 = \begin{bmatrix} A_x + d \cdot \cos(\theta_3 + \theta) \\ A_y + d \cdot \sin(\theta_3 + \theta) \end{bmatrix} \quad (26)$$

Dado que el segmento a_1 coincide con el segmento “d”, el punto de acoplamiento P_1 se obtiene de la ecuación 27.

$$P_1 = \begin{bmatrix} D_{1x} + a \cdot \cos(\theta_2) \\ D_{1y} + a \cdot \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (27)$$

El segmento b_1 del triángulo de acoplamiento se obtiene de la relación de semejanza de este con el triángulo de acoplamiento, ecuación 28.

$$b_1 = \frac{d}{b} \cdot d_1 \quad (28)$$

Otra relación entre el mecanismo original y el cognado uno es que las longitudes $d_1=a$, por lo tanto, la ecuación 28 puede ser reemplazada por la ecuación 29.

$$b_1 = \frac{d}{b} \cdot a \quad (29)$$

La longitud del segmento e_1 se obtiene aplicando el teorema del coseno al triángulo de acoplamiento del cognado uno, ecuación 30.

$$e_1 = \sqrt{d_1^2 + b_1^2 - (2 \cdot d_1 \cdot b_1 \cdot \cos(\theta_2 + \theta_3))} \quad (30)$$

Las coordenadas del punto E_1 se obtienen en función de los ángulos que definen la posición del mecanismo. El enlace forma el mismo ángulo, θ_2 , que el enlace formado por los puntos, por lo que el enlace formará un ángulo $(\theta_2+\theta_3)$, ecuación 31.

$$E_1 = \begin{bmatrix} D_{1x} + b_1 \cdot \cos(\theta_3 + \theta_2) \\ D_{1y} + b_1 \cdot \sin(\theta_3 + \theta_2) \end{bmatrix} \quad (31)$$

3. Implementación del método en software MATLAB

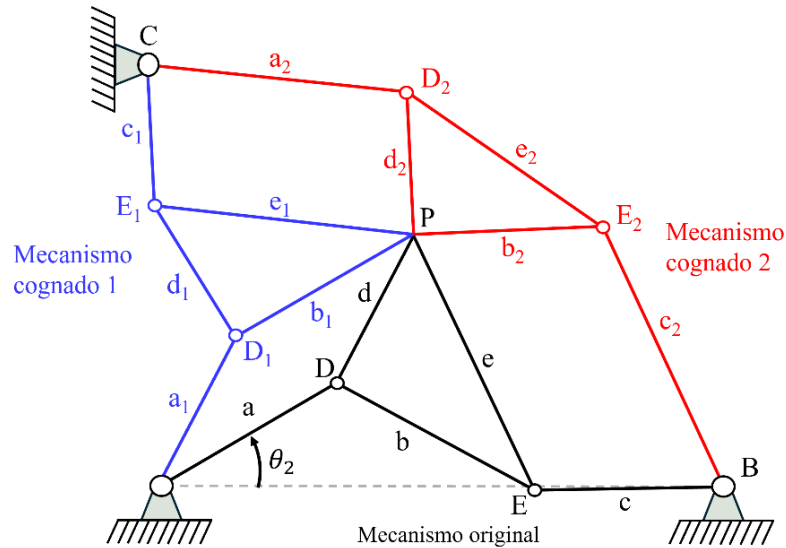
A continuación, se presenta un ejemplo práctico del método implementado en MATLAB para la construcción de mecanismos cognados. Se utiliza como mecanismo original el mostrado en la Figura 4, con apoyos en la misma línea horizontal. Se introducen los parámetros dimensionales del mecanismo original y se fija un ángulo de entrada inicial, Figura 9.

El proceso seguido para la implementación consta de los siguientes pasos:

1. Clasificación del mecanismo original: Se aplica la condición de Grashof, ecuación 2, para determinar si el mecanismo realiza una rotación completa. En este caso, el mecanismo no cumple la condición de Grashof, lo que implica que el eslabón de entrada no realiza una rotación completa y se deben aplicar restricciones geométricas, ecuación 3.
2. Cálculo de la trayectoria del mecanismo original: Se calculan las ecuaciones 4 para representar la trayectoria del mecanismo original, limitada por las restricciones geométricas debido a que no cumple la condición de Grashof. La solución del mecanismo original y su trayectoria se muestran en la Figura 12.
3. Construcción del mecanismo cognado 1: Se obtienen las coordenadas del punto C, ecuación 25, que servirá como apoyo para el cognado 1 y el cognado 2. Se utilizan las relaciones de semejanza de triángulos y similitud de longitudes de eslabones para calcular las dimensiones y coordenadas del mecanismo cognado 1, Figura 12. La solución y la trayectoria del mecanismo cognado 1 se muestran en la Figura 13.
4. Construcción del mecanismo cognado 2: Se utilizan las relaciones con el mecanismo original y el cognado 1 para calcular las dimensiones del triángulo acoplador del cognado 2. Se calculan los parámetros

dimensionales del mecanismo cognado 2, Figura 12. La solución y la trayectoria del mecanismo cognado 2 se muestran en la Figura 14.

5. Análisis de los mecanismos cognados: Se verifica si los mecanismos cognados cumplen la condición de Grashof y se aplican restricciones geométricas si es necesario. Se comparan las dimensiones y trayectorias de los mecanismos cognados con el mecanismo original.
6. Representación conjunta de los mecanismos: Se representan gráficamente los tres mecanismos (original y cognados) junto con sus trayectorias (Figura 15), mostrando la coincidencia del punto acoplador para el ángulo dado y la semejanza de los triángulos acopladores.



Parámetros dimensionales			
	Mecanismo original	Mecanismo cognado 1	Mecanismo cognado 2
A	(0, 0)	(0, 0)	-
B	(1, 0)	-	(1, 0)
C	-	(-0.05, 2.31)	(-0.05, 2.31)
l [cm]	3,10	-	-
a [cm]	1.13	0.92	1.43
b [cm]	1.23	1.13	1.04
c [cm]	1.04	0.78	1.56
d [cm]	0.92	0.84	0.78
e [cm]	1.56	1.43	1.32

Figura 10. Tabla de valores de los parámetros dimensionales en unidades de longitud.

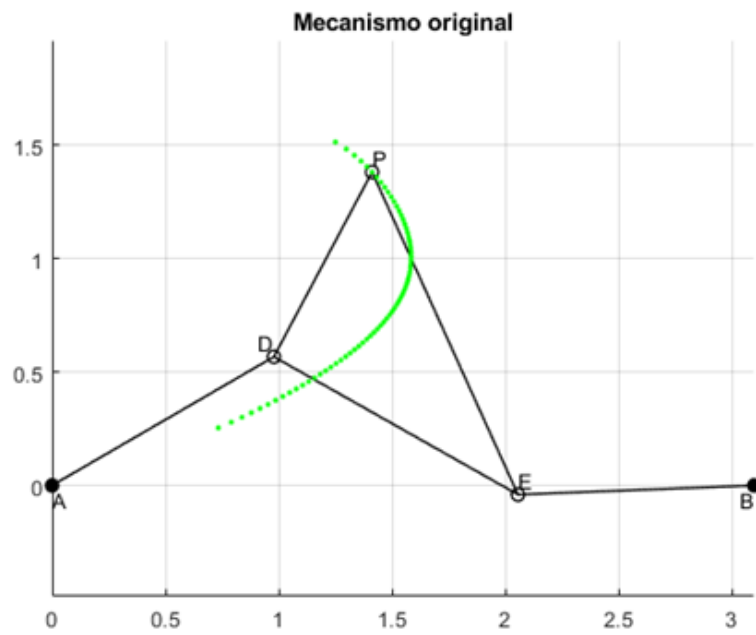


Figura 11. Solución mecanismo original

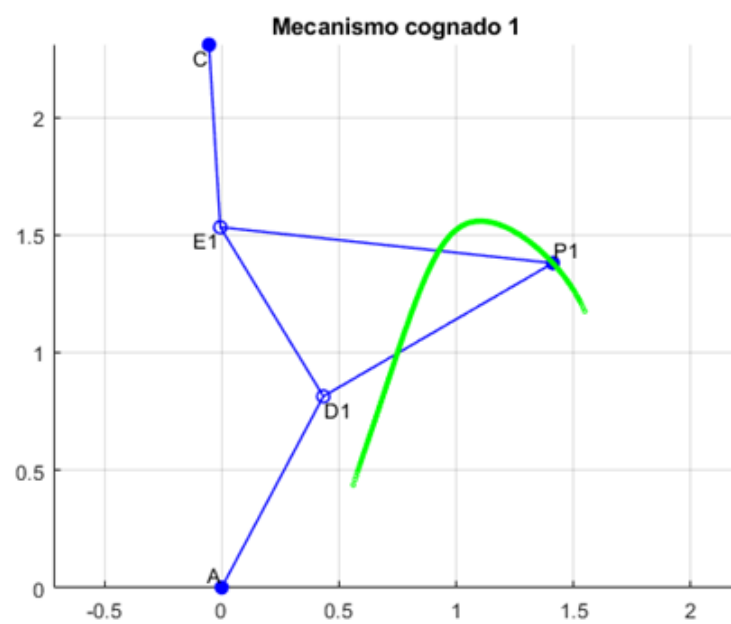


Figura 12. Solución mecanismo cognado 1

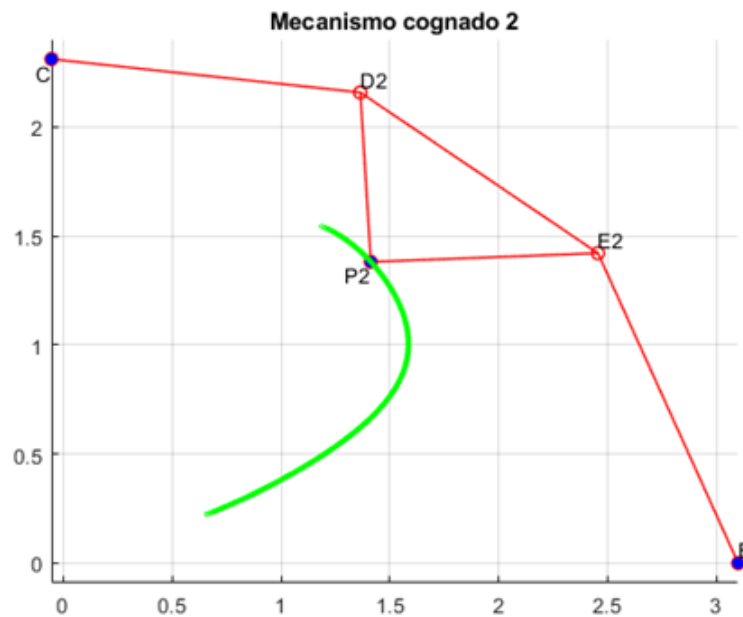


Figura 13. Solución mecanismo cognado 2

- Se obtienen las dimensiones de los mecanismos cognados (Figura 10), mostrando que algunas longitudes coinciden con el mecanismo original debido a las relaciones que comparten.
- Se observa que las trayectorias de los mecanismos cognados (Figuras 12 y 13) coinciden con la del mecanismo original (Figura 11), aunque pueden estar limitadas por restricciones geométricas.
- Se verifica la semejanza entre los triángulos acopladores de los tres mecanismos (Figura 14).

El ejemplo demuestra cómo el método desarrollado en MATLAB permite construir mecanismos cognados que comparten la misma trayectoria en el punto acoplador que el mecanismo original, aunque sus dimensiones y movimientos sean diferentes. Se destaca la importancia de las relaciones dimensionales entre los mecanismos para lograr este resultado.

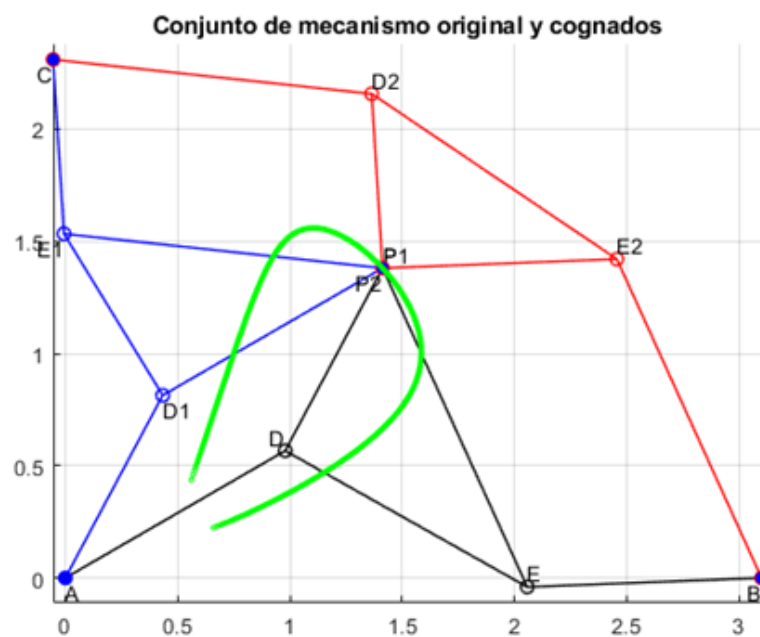


Figura 14. Solución del conjunto mecanismo original y cognados

4. Aplicación desarrollada

Se describe a continuación la aplicación desarrollada en MATLAB utilizando App Designer para facilitar la visualización y el análisis de mecanismos, específicamente mecanismos cuadriláteros articulados con triángulo acoplador y sus mecanismos cognados.

La Figura 15 muestra la interfaz de la aplicación. La interfaz es sencilla y muestra la información necesaria en una sola ventana. Incluye:

- Recuadro de parámetros: Permite introducir los parámetros del mecanismo, el ángulo de entrada y los parámetros $t1$ y $t2$ que definen las 4 configuraciones posibles del mecanismo.
- Imagen del mecanismo: Muestra un esquema genérico del mecanismo cuadrilátero articulado con triángulo acoplador, indicando cada parámetro que se debe introducir.
- Botón "ejecutar": Inicia la ejecución del programa.

La Figura 16 muestra la visualización de resultados. Tras ejecutar el programa, aparecen cuatro gráficas distintas:

- Tres gráficas individuales: Muestran cada mecanismo (original y cognados) con su trayectoria en el punto acoplador.
- Gráfica comparativa: Representa el mecanismo original junto con sus dos mecanismos cognados, permitiendo comparar visualmente las diferencias dimensionales entre ellos.
- Consideraciones importantes
- Ángulo de entrada: Los mecanismos se representan solo si el ángulo introducido coincide con un ángulo alcanzable por el mecanismo. Si no es alcanzable, la gráfica aparece vacía.

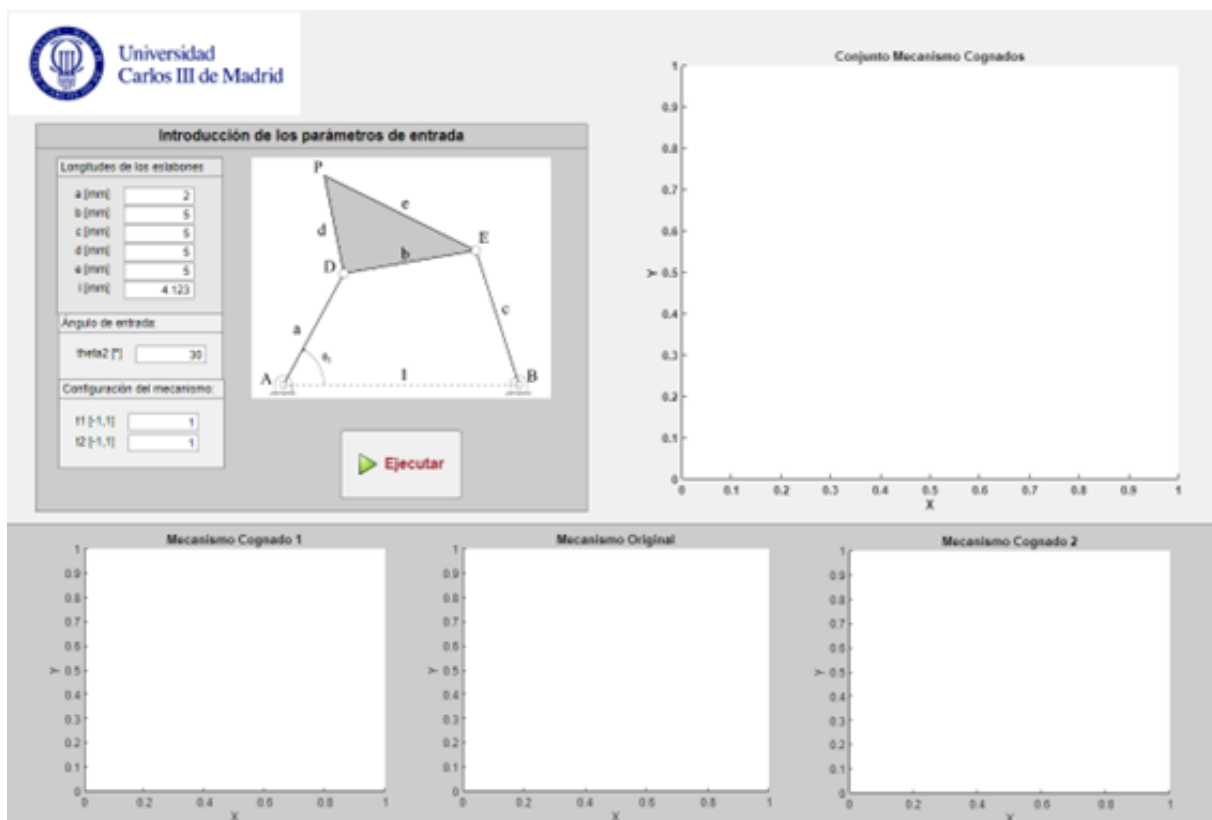


Figura 15. Interfaz de la aplicación

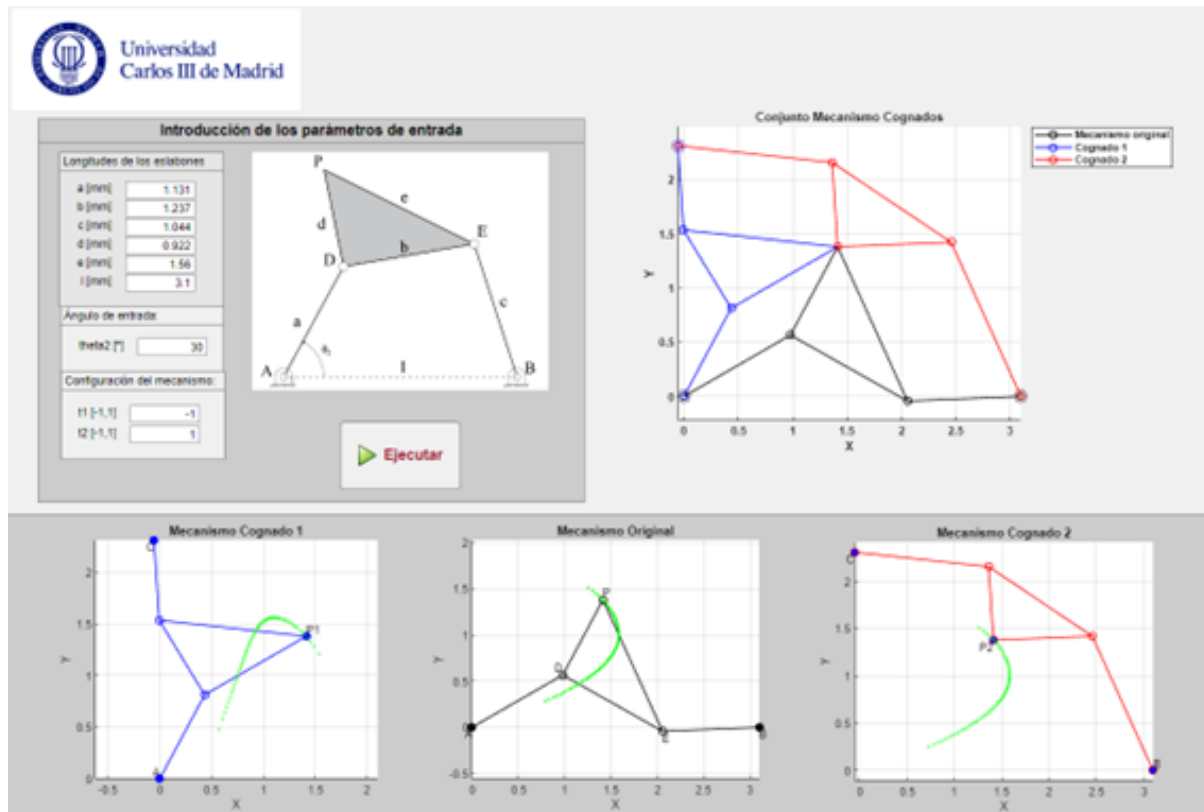


Figura 16. Interfaz una vez ejecutado la aplicación

La aplicación facilita la introducción de parámetros, mejora la visualización de los modelos de los mecanismos obtenidos y permite estudiar cuál de los mecanismos es el más apropiado para el trabajo requerido. En resumen, es una herramienta útil para el diseño y análisis de mecanismos.

5. Conclusiones y trabajos futuros

El artículo presenta un método de síntesis para generar mecanismos cognados de eslabonamientos de cuatro barras. Los eslabonamientos de cuatro barras son fundamentales en la ingeniería mecánica y se utilizan en diversas aplicaciones debido a sus perfiles de movimiento versátiles y su eficiente transmisión de fuerza. El método propuesto se centra en la construcción de mecanismos cognados, que son configuraciones de eslabonamiento alternativas que replican el movimiento del mecanismo original al tiempo que ofrecen diferentes restricciones geométricas, lo que aumenta la flexibilidad del diseño.

La principal ventaja de este método es su capacidad para generar mecanismos cognados que comparten la misma curva de acoplador que el eslabonamiento original. Esto asegura que se conserve el movimiento deseado, mientras que las variaciones geométricas permiten la optimización para requisitos específicos de diseño y fabricación. Un algoritmo robusto, implementado en MATLAB, proporciona una interfaz fácil de usar para modelar y analizar estos mecanismos. El algoritmo genera representaciones gráficas de las trayectorias del punto acoplador, resaltando visualmente las diferencias dimensionales entre los mecanismos originales y cognados. Esta visualización ayuda a comprender las características operativas de cada mecanismo y apoya la toma de decisiones de diseño informadas. La implementación en MATLAB simplifica la entrada de parámetros dimensionales para el mecanismo original, lo que permite ajustes en tiempo real durante las fases de diseño y optimización. Esto hace que el método sea accesible a un público más amplio, incluidos aquellos con menos experiencia técnica.

Sin embargo, el método tiene limitaciones. Está específicamente adaptado a los eslabonamientos de cuatro barras; los modelos matemáticos y los algoritmos no son directamente aplicables a otros tipos de mecanismos, como los de cinco barras o los mecanismos espaciales. Las futuras investigaciones podrían centrarse en extender el método a estos sistemas más complejos, lo que requeriría nuevos modelos matemáticos y algoritmos.

El desarrollo adicional podría incluir la integración de técnicas de optimización multiobjetivo. Esto permitiría a los diseñadores optimizar simultáneamente múltiples criterios, como minimizar los costes de fabricación, maximizar la eficiencia mecánica y garantizar la fiabilidad. La incorporación de herramientas de visualización avanzadas, como modelos interactivos en 3D o realidad aumentada, podría mejorar aún más la usabilidad del algoritmo. Finalmente, aunque esta investigación se centra en los aspectos geométricos y cinemáticos, los estudios

futuros podrían investigar el rendimiento dinámico de los mecanismos cognados sintetizados bajo diversas cargas, velocidades y condiciones ambientales, proporcionando una herramienta de diseño más completa.

6. Referencias

- [1] F. Reuleaux, *The kinematics of machinery: outlines of a theory of machines*. Mineloa: Courier Corporation, 2013.
- [2] M. Grübler, “Die Relativbewegungen von drei und mehr komplanen Ebenen,” in *Getriebelehre*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1917, pp. 55–62.
- [3] F. Grashof, “Theoretische maschinenlehre.” 1875.
- [4] J. Hartenberg, R., & Danavit, *Kinematic synthesis of linkages*. 1964.
- [5] C. W. Wampler, A. P. Morgan, and A. J. Sommese, “Complete Solution of the Nine-Point Path Synthesis Problem for Four-Bar Linkages,” *J. Mech. Des.*, vol. 114, no. 1, pp. 153–159, Mar. 1992.
- [6] B. Roth and F. Freudenstein, “Synthesis of Path-Generating Mechanisms by Numerical Methods,” *J. Eng. Ind.*, vol. 85, no. 3, pp. 298–304, Aug. 1963.
- [7] S. N. Kramer and G. N. Sandor, “Selective Precision Synthesis—A General Method of Optimization for Planar Mechanisms,” *J. Eng. Ind.*, vol. 97, no. 2, pp. 689–701, May 1975.
- [8] X. Li, S. Wei, Q. Liao, and Y. Zhang, “A novel analytical method for four-bar path generation synthesis based on Fourier series,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 144, p. 103671, Feb. 2020.
- [9] A. Hernández, A. Muñozerro, M. Urizar, and E. Amezuza, “Comprehensive approach for the dimensional synthesis of a four-bar linkage based on path assessment and reformulating the error function,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 156, p. 104126, Feb. 2021.
- [10] S. Roberts, “On Three-bar Motion in Plane Space,” *Proc. London Math. Soc.*, vol. s1-7, no. 1, pp. 14–23, Nov. 1875.
- [11] A. H. Soni and L. Harrisberger, “Roberts’ Cognates of Space Four-Bar Mechanisms With Two General Constraints,” *J. Eng. Ind.*, vol. 91, no. 1, pp. 123–127, Feb. 1969.
- [12] A. H. Soni, “Coupler cognate mechanisms of certain parallelogram forms of watt’s six-link mechanism,” *J. Mech.*, vol. 5, no. 2, pp. 203–215, Jun. 1970.
- [13] K. Lakshminarayana and K. C. Butchi Raju, “Function-cognate mechanisms: General theory and application,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 20, no. 5, pp. 389–397, Jan. 1985.
- [14] S. N. Sherman, J. D. Hauenstein, and C. W. Wampler, “A General Method for Constructing Planar Cognate Mechanisms,” *J. Mech. Robot.*, vol. 13, no. 3, Jun. 2021.
- [15] S. N. Sherman, J. D. Hauenstein, and C. W. Wampler, “Advances in the Theory of Planar Curve Cognates,” *J. Mech. Robot.*, vol. 14, no. 3, Jun. 2022.
- [16] M. M. Plecnik and J. Michael McCarthy, “Numerical Synthesis of Six-Bar Linkages for Mechanical Computation,” *J. Mech. Robot.*, vol. 6, no. 3, Aug. 2014.
- [17] A. Baskar and M. Plecnik, “Synthesis of Six-Bar Timed Curve Generators of Stephenson-Type Using Random Monodromy Loops,” *J. Mech. Robot.*, vol. 13, no. 1, Feb. 2021.
- [18] E. Soriano-Heras, F. Blaya-Haro, C. Molino, and J. M. de Agustín del Burgo, “Rapid prototyping prosthetic hand acting by a low-cost shape-memory-alloy actuator,” *J. Artif. Organs*, vol. 21, no. 2, pp. 238–246, Jun. 2018.
- [19] S. Mitsi, “Position analysis in polynomial form of planar mechanisms with a closed chain of the Assur group of class 4 L’analyse de position sous forme polynomiale des mecanismes plans avec une chaine fermee du groupe d’Assur de 4-eme classe,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 34, no. 8, pp. 1195–1209, Nov. 1999.
- [20] S. Mitsi, K.-D. Bouzakis, and G. Mansour, “Position analysis in polynomial form of planar mechanism with an Assur group of class 4 including one prismatic joint,” *Mech. Mach. Theory*, vol. 39, no. 3, pp. 237–245, Mar. 2004.