



Análisis numérico de la disipación de energía por corrientes de Foucault inducidas por la vibración de una viga

Mikel Brun Martínez¹, Fernando Cortés Martínez¹, María Jesús Elejabarrieta Olabarri¹

¹ Departamento de Mecánica, Diseño y Organización Industrial, Universidad de Deusto, mikel.brun@opendeusto.es, fernando.cortes@deusto.es, maria.elejabarrieta@deusto.es

La atenuación de vibraciones es un desafío recurrente en la ingeniería mecánica, con numerosas técnicas disponibles para abordarlo. Entre ellas, las corrientes de Foucault destacan por su respuesta instantánea, naturaleza reversible, y la ausencia de masa añadida o desgaste en el sistema estructural en el que se inducen. Estas corrientes se generan debido a la interacción entre el movimiento de un sistema vibrante y un campo magnético externo.

Conocer la naturaleza y la capacidad disipativa que se puede obtener mediante las corrientes de Foucault es esencial para su implementación en sistemas estructurales. Por lo tanto, este trabajo analiza una viga simplemente apoyada que vibra en estado estacionario en el seno de un campo magnético uniforme y constante en el tiempo. Se considera que la viga es conductora, paramagnética y delgada, por lo que se despreja la autoinducción. Este estudio permite analizar la relación entre el movimiento estructural, las corrientes de Foucault inducidas y las fuerzas disipativas resultantes ante distintas orientaciones del campo magnético. Las vibraciones de la viga se caracterizan mediante modos de flexión o de torsión.

Un obstáculo recurrente en el uso de corrientes de Foucault para la mitigación de vibraciones es la complejidad matemática de las ecuaciones involucradas, las cuales carecen de soluciones analíticas, y, por tanto, se requieren de métodos numéricos complejos para resolverlas. Para superar esta limitación, este estudio emplea un método numérico desarrollado recientemente basado en diferencias finitas, adaptable al caso de la viga en apoyos simples, y extendido para incluir los efectos de la inducción electromagnética por movimiento.

A través de este enfoque, se obtienen y visualizan mapas de corrientes inducidas correspondientes a los primeros tres modos de vibración, tanto en flexión como en torsión. Los resultados muestran cómo el tipo de vibración y la orientación del campo magnético afectan directamente a la naturaleza de las corrientes inducidas y, por ende, a su capacidad para disipar energía. Se cuantifica esta disipación mediante la potencia disipada por las corrientes de Foucault y el cálculo del factor amortiguamiento modal, complementado con representaciones visuales de las distribuciones de fuerza y potencia a lo largo de la viga.

Los resultados revelan que la orientación del campo magnético es un parámetro clave en el diseño de aplicaciones basadas en corrientes de Foucault, ya que, si se aplica simultáneamente en dos direcciones, origina un acoplamiento entre los modos de flexión y torsión. Se concluye que las corrientes de Foucault presentan una mayor eficacia disipativa en bajas frecuencias, lo que representa una ventaja significativa frente a otras técnicas, como los recubrimientos viscoelásticos, que suelen ser menos efectivos en este rango de frecuencia.

1. Introducción

Las fuerzas electromagnéticas pueden generarse cuando un material conductor interactúa con un campo magnético mediante dos mecanismos de inducción. Por un lado, la inducción transformadora se produce al introducir un conductor en un campo magnético variable en el tiempo. Por otro lado, la inducción por movimiento tiene lugar cuando un conductor se mueve dentro de un campo magnético constante. En algunos casos, ambos mecanismos pueden ocurrir simultáneamente [1]. Esto genera corrientes de Foucault o corrientes parásitas, conocidas por su forma de remolino. Estas corrientes pueden ser beneficiosas o perjudiciales según la aplicación, como en máquinas de corriente alterna, donde generan pérdidas [1,2], o en dispositivos de amortiguación, donde resultan útiles, por ejemplo, en aplicaciones de frenado [3,4] y control sísmico [5,6].

En aplicaciones de vibración mecánica, las corrientes de Foucault son especialmente relevantes debido a su capacidad para disipar energía. Por ejemplo, en [7] se presenta un amortiguador electromagnético que reduce las vibraciones en fresado robótico, logrando mejoras de hasta un 22,1 % en reducción de vibraciones y un incremento del 23,1 % en la profundidad de corte del robot. Además, combinando técnicas pasivas viscoelásticas con amortiguamiento electromagnético se logra una mayor efectividad en un amplio rango de frecuencias, incluso a bajas frecuencias [8]. Particularmente, las vigas son de interés en este contexto: en [9], se muestra un modelo numérico para un amortiguador electromagnético aplicado a una viga de aluminio, logrando la atenuación de vibraciones sin añadir masa extra, gracias a un campo magnético estático externo.

La implementación de aplicaciones que emplean corrientes de Foucault plantea desafíos matemáticos que requieren procedimientos numéricos avanzados, como los métodos de elementos finitos [10–13] y de diferencias finitas [14,15]. De entre todos los trabajos existentes en la literatura, estos dos últimos trabajos desarrollados por Nagel permiten obtener distribuciones precisas de corrientes de Foucault, con la ventaja de que requieren un tiempo de computación bajo, y son capaces de adaptarse a geometrías complejas.

A pesar de los avances en el diseño de dispositivos que atenúan vibraciones mediante corrientes de Foucault, existen pocas investigaciones que analicen directamente su capacidad disipativa en vibraciones estacionarias para diferentes modos de vigas. Existe un estudio que analiza, mediante un ensayo experimental modal, las propiedades dinámicas de una viga en voladizo cuando se inducen corrientes de Foucault para reducir vibraciones [16]. Este trabajo busca ampliar dicho conocimiento, estudiando la capacidad de disipación de energía de las corrientes de Foucault generadas en una viga metálica delgada y no magnética sometida a un campo magnético constante, centrándose en los modos de flexión y torsión de menor orden.

El artículo se organiza como sigue: en la Sección 2 se describe el sistema de estudio y los campos de velocidad aplicados a la viga. La Sección 3 detalla el método numérico empleado para resolver las corrientes de Foucault y calcular parámetros relevantes como fuerza de amortiguamiento, par de torsión, pérdidas por efecto Joule y coeficiente modal de amortiguamiento viscoso. Finalmente, en la Sección 4 se realiza un análisis exhaustivo de la naturaleza de las corrientes de Foucault y su impacto en la atenuación de vibraciones bajo distintas configuraciones del campo magnético externo.

2. Descripción del sistema

El sistema analizado consiste en una viga metálica no magnética con apoyos simples en sus extremos, caracterizada por un movimiento armónico estacionario con una distribución de velocidad espacial representada por el vector $\mathbf{v}(x, y)$. La viga está sometida a un campo magnético externo constante $\mathbf{B}_e(x, y)$, como se muestra en la Figura 1. El objetivo es analizar la naturaleza disipativa de las fuerzas generadas por las corrientes de Foucault inducidas en la viga. Estas corrientes están representadas por el campo vectorial de densidad de corriente $\mathbf{J}(x, y)$, mientras que las fuerzas de amortiguamiento se expresan mediante el vector de distribución superficial $\mathbf{q}(x, y) = q(x, y)\hat{\mathbf{z}}$, ambos armónicos debido a la naturaleza del movimiento.

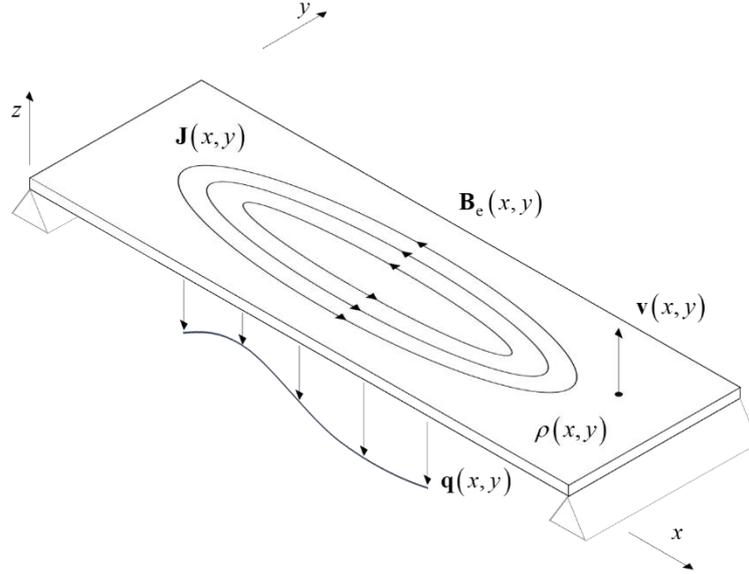


Figura 1: Representación de la viga de estudio.

Las dimensiones la viga en las direcciones x , y , y z son su longitud L , anchura b , y espesor d , respectivamente, con $b < L$ y $d \ll L$, lo que implica que las propiedades no varían a lo largo del espesor ($\partial/\partial z = 0$). Sus propiedades mecánicas se caracterizan por el módulo de Young E y el módulo de cizalladura G , mientras que su resistividad eléctrica se denota como $\rho(x, y)$. El campo magnético externo $\mathbf{B}_e(x, y)$ se define como

$$\mathbf{B}_e(x, y) = B_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + B_y(x, y)\hat{\mathbf{y}} + B_z(x, y)\hat{\mathbf{z}}, \quad (1)$$

donde $B_x(x, y)$, $B_y(x, y)$ y $B_z(x, y)$ son las componentes en las direcciones x , y y z , respectivamente.

En régimen armónico, el movimiento de la viga se describe mediante modos de flexión o torsión. Según la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, para pequeñas amplitudes de vibración la velocidad se restringe a la dirección z ($\mathbf{v}(x, y) = v(x, y)\hat{\mathbf{z}}$), donde $v(x, y)$ es la distribución espacial de la velocidad, que depende del modo considerado.

En el caso de flexión, $v(x, y)$ varía únicamente con x , mientras que en torsión depende de x e y . Las distribuciones de velocidad adoptadas para cada modo natural están resumidas en la Tabla 1, donde v_{\max} es la amplitud máxima de velocidad, y ω_r y λ_r son la frecuencia angular y el valor propio del modo r -ésimo, respectivamente, ρ_v es la densidad volumétrica de la viga, c es un factor geométrico que se obtiene a partir del ratio b/d , como se indica en la Tabla 2, m es la masa de la viga ($m = \rho_v Lbd$), y m_{eq} es la masa modal de la viga equivalente a la masa de un sistema con un grado de libertad que vibra con la misma amplitud de velocidad y tiene la misma energía cinética que la viga. Para el estudio del movimiento de torsión, se ha considerado que los apoyos de la viga no permiten el giro en los extremos.

Tabla 1: Resumen de los campos de velocidad [17].

	Flexión	Torsión
$v_r(x, y)$	$v_{\max} \text{sen}\left(\frac{\lambda_r x}{L}\right)$	$\frac{2v_{\max}}{b} \text{sen}\left(\frac{\lambda_r x}{L}\right)(y - b/2)$
λ_r	$\text{sen}\lambda_r = 0$	$\text{sen}\lambda_r = 0$
ω_r	$\frac{\lambda_r^2 d}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho_v}}$	$\frac{\lambda_r b d}{L(b^2 + d^2)} \sqrt{\frac{12cG}{\rho_v}}$
m_{eq}	$\frac{m}{2}$	$\frac{m}{6} \left(1 + \left(\frac{d}{b}\right)^2\right)$

Tabla 2: Factor geométrico c en función del ratio b/d [17].

b/d	1	2	4	8	∞
c	0.281	0.286	0.299	0.312	1/3

La interacción entre el movimiento de la viga y el campo magnético externo induce corrientes de Foucault. Dada la delgadez de la viga, estas corrientes se distribuyen en el plano x - y y su densidad se expresa como

$$\mathbf{J}(x, y) = J_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + J_y(x, y)\hat{\mathbf{y}}, \quad (2)$$

donde $J_x(x, y)$ y $J_y(x, y)$ son las componentes en las direcciones x e y . Para garantizar que las corrientes sean uniformes en el espesor de la viga, se debe cumplir la condición de profundidad de penetración

$$\delta_r = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0\omega_r}} > d, \quad (3)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío. Esta condición se verifica en todos los casos analizados en la Sección 4.

Las corrientes de Foucault generan fuerzas de amortiguamiento que se oponen al movimiento en la dirección z , según la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{J}(x, y) \times \mathbf{B}_e(x, y), \quad (4)$$

donde $\mathbf{F}(x, y)$ es el vector de fuerza por unidad de volumen. Estas fuerzas se integran sobre el espesor de la viga para obtener una presión distribuida en la superficie

$$\mathbf{q}(x, y) = d\mathbf{F}(x, y), \quad (5)$$

que se puede reducir a lo largo del eje de la viga como una fuerza transversal distribuida $w(x)$

$$w(x) = \int_0^b q(x, y) dy, \quad (6)$$

y un par de torsión distribuido $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = \int_0^b q(x, y)(y - b/2) dy. \quad (7)$$

3. Procedimiento numérico para resolver las corrientes de Foucault con inducción por movimiento

Para analizar la capacidad de disipación de energía mecánica de la viga mostrada en la Figura 1, es necesario resolver primero las corrientes de Foucault generadas. En esta sección se presentan las ecuaciones que gobiernan el problema, el procedimiento numérico empleado y los parámetros relevantes que se extraen de dichas corrientes.

3.1. Ecuaciones electromagnéticas para la inducción por movimiento

El modelo físico de la viga se ilustra en la Figura 1. La ecuación que rige su comportamiento se basa en la ley general de Faraday, que en su forma cuasiestática [18] se expresa como

$$\oint_C (\rho\mathbf{J}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \dot{\mathbf{B}}_i \cdot d\mathbf{S} - \int_S \dot{\mathbf{B}}_e \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_e) \cdot d\mathbf{l}, \quad (8)$$

donde \mathbf{B}_i representa el vector de densidad de campo magnético inducido por autoinducción, \mathbf{B}_e es el vector de densidad de campo magnético externo, \mathbf{v} es el campo de velocidad, C es un contorno arbitrario dentro del dominio, y S es la superficie encerrada por dicho contorno. Los vectores $d\mathbf{l}$ y $d\mathbf{S}$ son los diferenciales a lo largo del contorno y la superficie, respectivamente, \cdot denota el producto escalar y \times el producto vectorial.

En este estudio, $\dot{\mathbf{B}}_i = \mathbf{0}$ ya que la viga es delgada y el análisis se centra en frecuencias bajas donde los efectos de la autoinducción no son significativos [14]. Además, $\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{0}$ porque el campo magnético externo es invariante en el tiempo. Aunque la velocidad modal \mathbf{v} varía con el tiempo, en este estudio es armónica. Por lo tanto, las variables resultantes, como las corrientes, también son armónicas. A partir de este punto, todas las expresiones vectoriales se refieren exclusivamente a sus distribuciones espaciales.

Para garantizar la conservación de la carga en la viga, se debe cumplir la ecuación de continuidad en estado estacionado dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (9)$$

donde ∇ es el operador nabla y $\nabla \cdot$ denota la divergencia. Esta ecuación indica que el vector de densidad de corriente es solenoidal y, por lo tanto, existe un potencial vectorial \mathbf{T} que permite expresar \mathbf{J} como

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}, \quad (10)$$

donde $\nabla \times$ representa el rotacional. Dado que la viga es delgada y su comportamiento mecánico se modela a través de la teoría de Euler-Bernoulli, \mathbf{T} se define únicamente en la dirección z , $\mathbf{T}(x, y) = T(x, y)\hat{\mathbf{z}}$, siendo $T(x, y)$ la distribución espacial del potencial. Sustituyendo esta expresión en la ecuación de Faraday, se obtiene

$$\oint_C (\rho \nabla \times \mathbf{T}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_e) \cdot d\mathbf{l}. \quad (11)$$

Para resolver esta ecuación y determinar \mathbf{T} , se deben aplicar condiciones de contorno. Se ha demostrado que seleccionar un valor constante arbitrario de T en los bordes de la viga satisface la ecuación de continuidad dada en la Ecuación (9) [15]. En este trabajo, se asume $T(x, y) = 0$ en los bordes para simplificar los cálculos. Dado que la ecuación no tiene solución analítica, hay que recurrir a métodos numéricos.

3.2. Método numérico para la inducción por movimiento

El objetivo del método numérico es determinar el vector de densidad de corriente \mathbf{J} en toda la superficie de la viga. Para ello, primero se resuelve \mathbf{T} a partir de la ecuación de Faraday, y posteriormente \mathbf{J} se obtiene mediante la definición dada en la Ecuación (10). El método numérico utilizado es una variante del método de diferencias finitas desarrollado por Nagel, que permite calcular \mathbf{T} en una lámina metálica no magnética sometida a un campo magnético variable en el tiempo [15]. Este método ha sido recientemente extendido para incluir los efectos de la inducción por movimiento [19], y se emplea aquí el mismo procedimiento.

La superficie de la viga se discretiza en N celdas rectangulares, con N_x celdas en la dirección x y N_y celdas en la dirección y . Cada celda es un bloque rectangular con densidad de corriente uniforme \mathbf{J} , de dimensiones h_x en x , h_y en y y espesor d en z . Las densidades de corriente \mathbf{J} y el campo de velocidad \mathbf{v} se definen en el centro de cada celda, mientras que el potencial vectorial \mathbf{T} se define en los vértices.

Con este esquema de discretización, \mathbf{T} queda dividido entre nodos de borde, $\mathbf{T}_{\text{borde}} = \mathbf{0}$, y nodos incógnita, $\mathbf{T}_{\text{incog}}$, tal que $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_{\text{borde}} \quad \mathbf{T}_{\text{incog}}\}^T$, siendo $\{\bullet\}^T$ el operador de transposición. La integración de la Ecuación (11) para cada nodo interno genera un sistema lineal de $(N_x - 1)(N_y - 1)$ ecuaciones tal que

$$\mathbf{M}\mathbf{T}_{\text{incog}} = \mathbf{b}, \quad (12)$$

donde \mathbf{M} es una matriz simétrica de coeficientes ensamblada a partir del término izquierdo de la Ecuación (11), y \mathbf{b} es el vector de términos independientes calculado a partir del término derecho. Finalmente, la densidad de corriente \mathbf{J} se calcula como

$$\mathbf{J}_x = \mathbf{D}_x \mathbf{T} \quad (13)$$

y

$$\mathbf{J}_y = -\mathbf{D}_y \mathbf{T}, \quad (14)$$

donde \mathbf{J}_x y \mathbf{J}_y son los vectores que contienen las componentes de la densidad de corriente en las direcciones x e y , respectivamente, mientras que \mathbf{D}_x y \mathbf{D}_y son matrices asociadas a los términos correspondientes a la definición del potencial dada por la Ecuación (10). Para una información más detallada acerca del procedimiento numérico y la integración de la ley de Faraday, ver [15,19,20].

3.3. Parámetros de disipación de energía

Las corrientes de Foucault generadas por la inducción por movimiento producen fuerzas y momentos disipativos a lo largo de la viga. Para una celda dada j , según la definición proporcionada en la Ecuación (5), se obtiene una presión distribuida sobre la superficie de la celda, $\mathbf{q}(x_j, y_j) = q(x_j, y_j)\hat{\mathbf{z}}$, representada en la Figura 2a como q_j , donde x_j e y_j son las coordenadas en el centro de la celda j en las direcciones x e y , respectivamente. Esta presión sobre la celda es uniforme, ya que las corrientes calculadas también son uniformes dentro de una celda. Así, la fuerza resultante en el centro de la celda j (indicada por las cruces en la Figura 2) viene dada por $q_j h_x h_y$, como se muestra en la Figura 2b. La agregación de todas las fuerzas de las celdas con la misma coordenada x_j , como las celdas sombreadas en la Figura 2b, en el punto correspondiente a lo largo del eje de la viga (indicado por un triángulo) genera una fuerza y un movimiento resultantes. Estos se pueden expresar en términos de densidades w_j y γ_j , respectivamente, tal y como se ilustra en la Figura 2c.

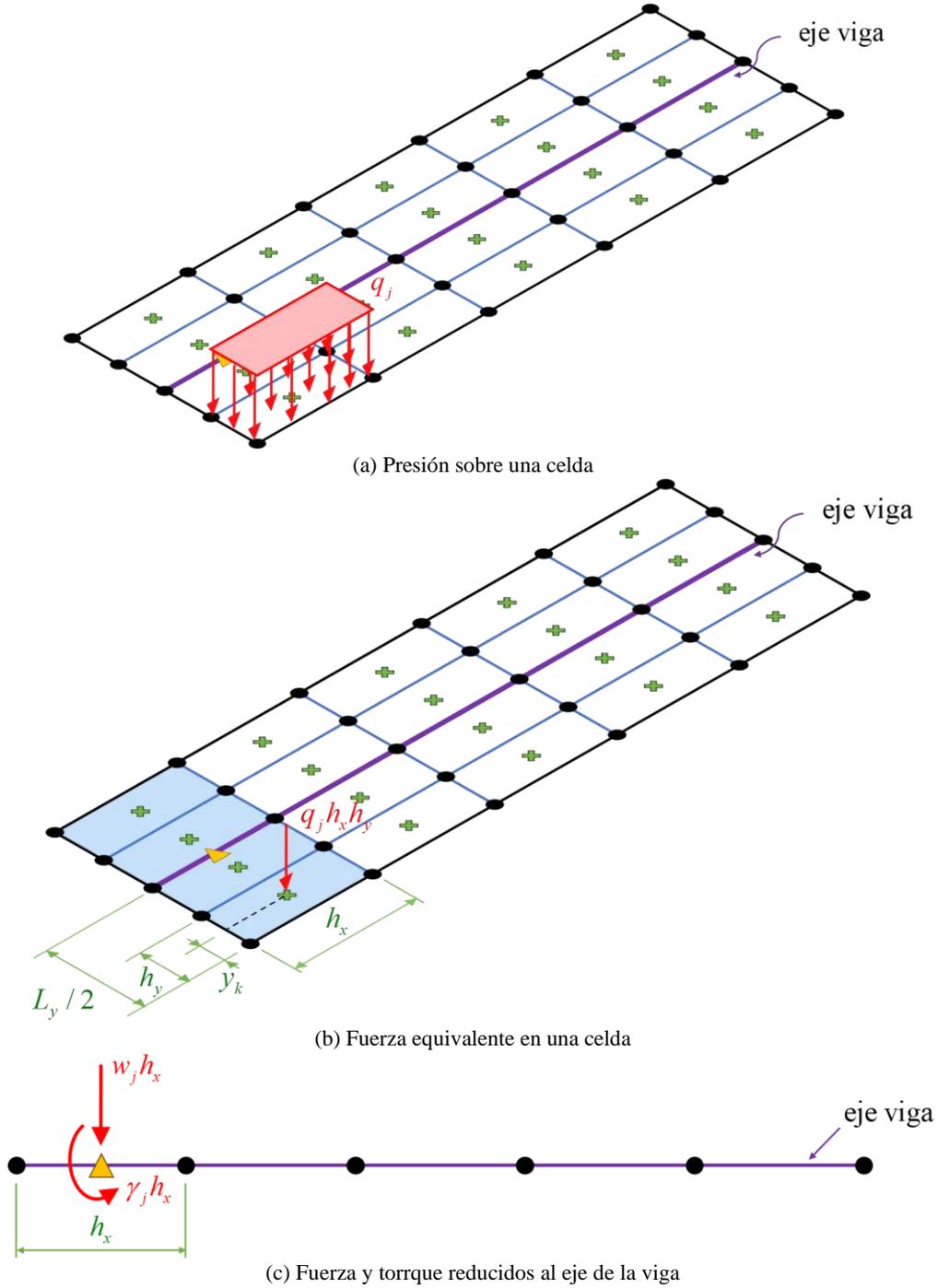


Figura 2: Diagrama de ejemplo para evaluar las distribuciones de fuerza y torsión.

Las expresiones de q_j , w_j y γ_j se recogen en la Tabla 3, junto con los demás parámetros objeto de estudio, que son: distribución de potencia $p(x)$, pérdidas por efecto Joule P_j , potencia mecánica P_m y el coeficiente modal de amortiguamiento viscoso ζ . En la Tabla 3, y_k denota la coordenada y de la celda k para aquellas celdas situadas en la misma coordenada x . Cabe destacar que la Tabla 3 incluye un factor de 2 tanto en las pérdidas por efecto Joule como en la potencia mecánica. Esto se debe a que el movimiento es armónico, lo que implica que tanto las corrientes como las fuerzas también son armónicas. Como resultado, el factor de 2 aparece en los cálculos al promediar las potencias instantáneas [19]. Además, tanto las pérdidas por efecto Joule como la potencia mecánica proporcionan resultados numéricos globales idénticos, tal y como se demuestra en la Sección 4.

Tabla 3: Resumen de los parámetros de disipación de energía [19,21].

Parámetro	Expresión
$q(x_j, y_j)$	$d[J_x(x_j, y_j)B_y(x_j, y_j) - J_y(x_j, y_j)B_x(x_j, y_j)]$

$$\begin{array}{l}
w(x) \\
\gamma(x) \\
p(x) \\
P_j \\
P_m \\
\zeta_r
\end{array}
\begin{array}{l}
h_y \sum_{k=1}^{N_y} q(x, y_k) \\
h_y \sum_{k=1}^{N_y} q(x, y_k) (y_k - b/2) \\
h_y \sum_{k=1}^{N_y} \frac{q(x, y_k) v(x, y_k)}{2} \\
\sum_{j=1}^N \rho h_x h_y d \frac{J_x^2(x_j, y_j) + J_y^2(x_j, y_j)}{2} \\
\sum_{j=1}^N h_x h_y d \frac{q(x_j, y_j) v(x_j, y_j)}{2} \\
\frac{P_m}{m_{\text{eq}} \omega_r^2 v_{\text{max}}^2}
\end{array}$$

4. Análisis numérico

En esta sección, dedicada al análisis de la naturaleza de las corrientes de Foucault inducidas, se presentan los resultados relativos a las corrientes y la disipación de energía debida a la inducción por movimiento en una viga específica, considerando distintos modos de flexión y torsión. Concretamente, se analizan los tres primeros modos en cada caso. La viga se estudia en un estado estacionario, bajo la acción de un campo magnético uniforme y constante en el tiempo.

4.1. Modelo numérico de la viga

La geometría de la viga en apoyos simples y sus propiedades correspondientes se describen en la Tabla 4. Se ha seleccionado aluminio como material no magnético conductor, debido a su conocida alta conductividad. Las propiedades del material son homogéneas a lo largo de toda la viga.

Tabla 4: Geometría y propiedades de la viga.

Parámetro	Valor
L (mm)	200
b (mm)	10
d (mm)	1
ρ_v (kg/m ³)	2700
E (GPa)	65
G (GPa)	25
ρ ($\Omega\mu\text{m}$)	0.2

La viga se ha discretizado en celdas rectangulares, con 421 celdas a lo largo de su longitud en la dirección x y 21 celdas a lo ancho en la dirección y , garantizando una densidad uniforme de elementos por unidad de longitud en ambas direcciones. El movimiento de la viga se define mediante las formas modales que se presentan en la Tabla 1, dependiendo de si se analiza un movimiento de flexión o torsión. Todos los modos han sido normalizados. Se ha fijado la amplitud máxima del campo de velocidades v_{max} indicada en la Tabla 1 en 1 m/s.

El campo magnético externo que actúa sobre la viga es constante en el tiempo y uniforme en el espacio, con una magnitud unitaria aplicada en la dirección x . Para facilitar la interpretación visual, las distribuciones de fuerza, momento y potencia han sido normalizadas con respecto a sus valores máximos w_{max} , γ_{max} y p_{max} , respectivamente. Por tanto, estas se expresan como $w_n = w / w_{\text{max}}$, $\gamma_n = \gamma / \gamma_{\text{max}}$ y $p_n = p / p_{\text{max}}$.

4.2. Resultados con movimiento modal de flexión

Se introduce un campo magnético uniforme, unitario e invariante en el tiempo, aplicado exclusivamente en la dirección x . Los resultados obtenidos a partir de la velocidad modal de los tres primeros modos de flexión, incluyendo el mapa de densidad de corrientes de Foucault, así como las distribuciones normalizadas de fuerza y potencia, se ilustran en las Figuras 3-5. Los valores máximos de las variables normalizadas se recogen en la Tabla 5, mientras que los parámetros estudiados para cada modo se resumen en la Tabla 6.

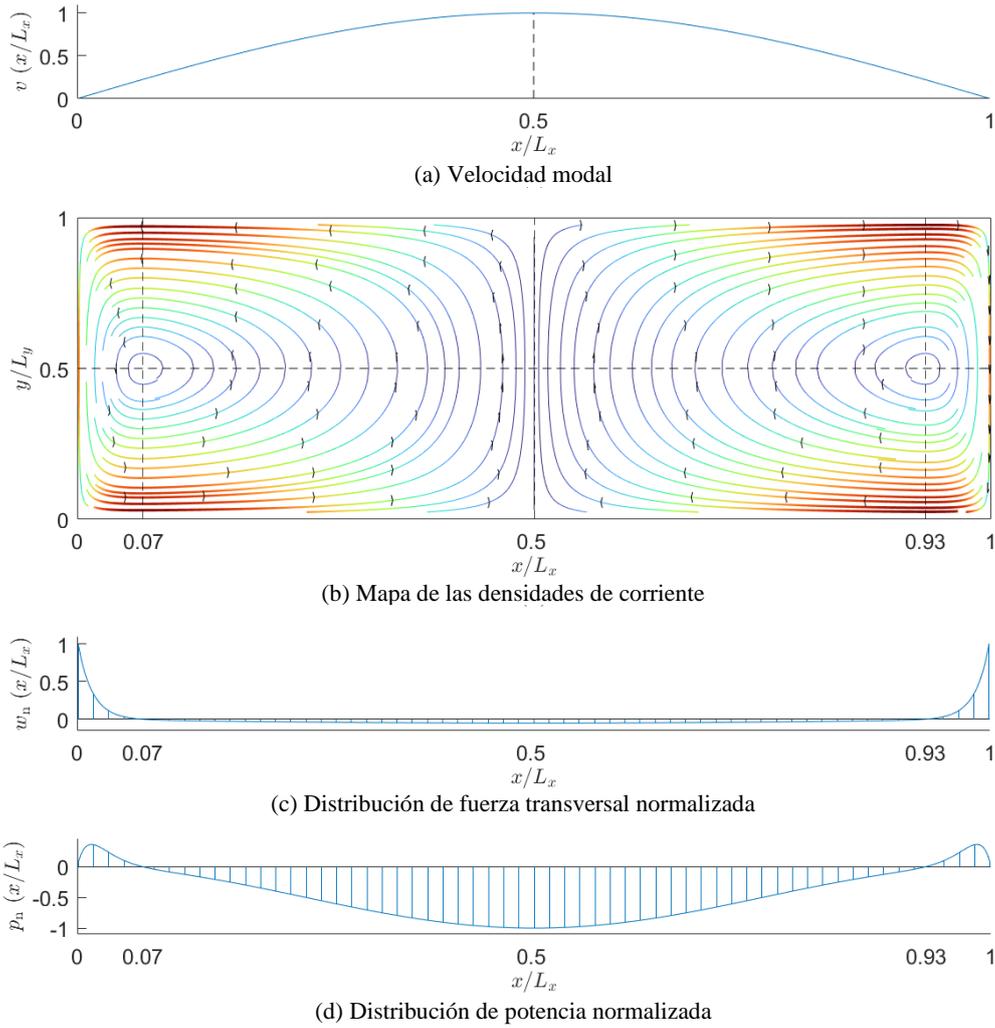
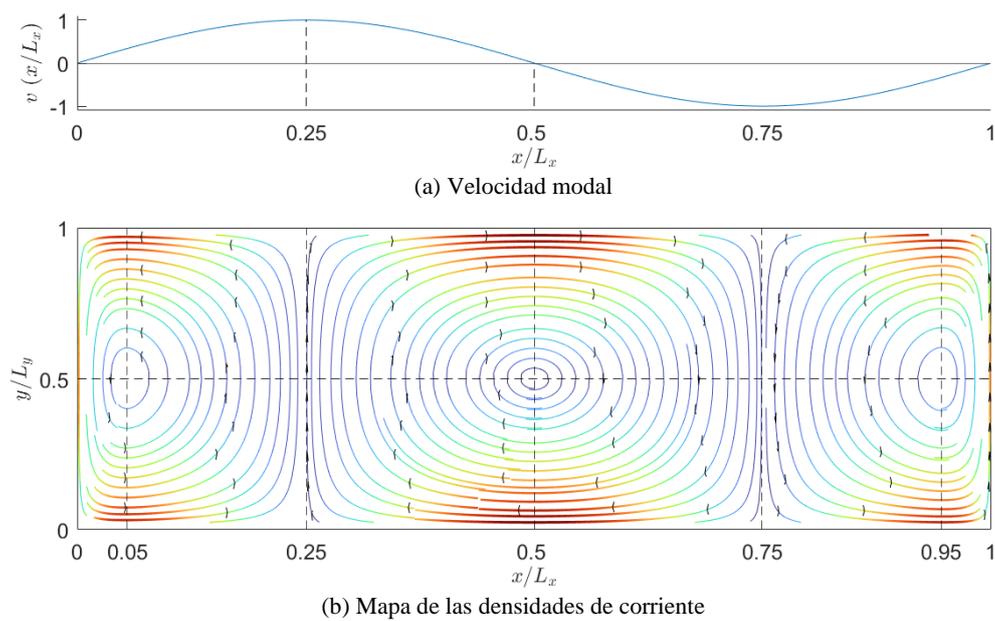


Figura 3: Parámetros para el primer modo de flexión de la viga.



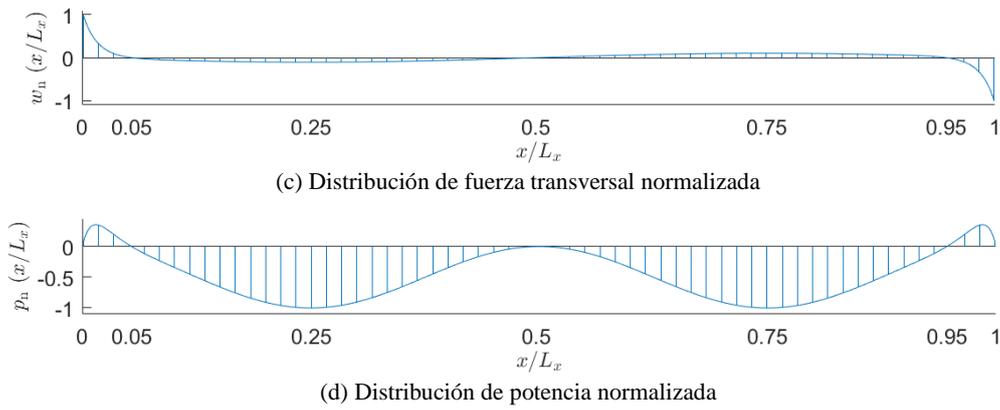


Figura 4: Parámetros para el segundo modo de flexión de la viga.

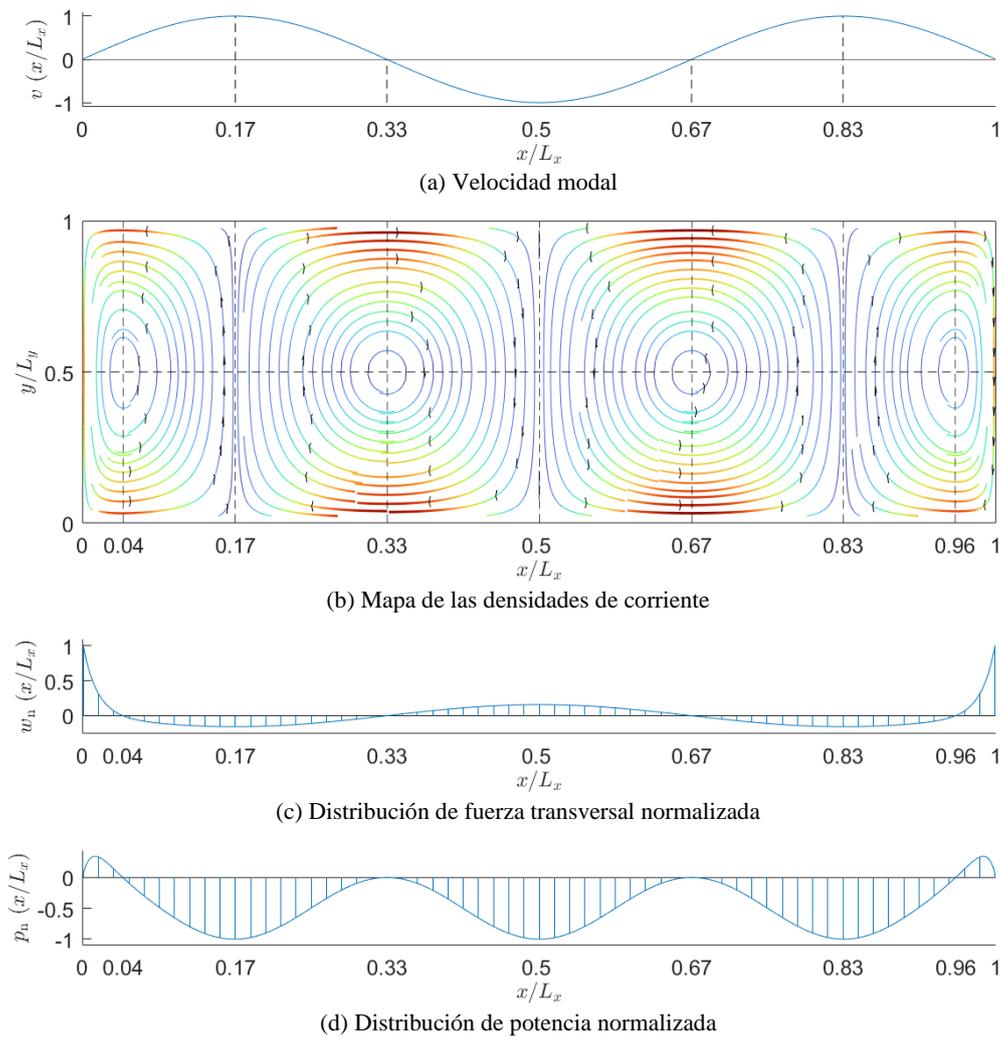


Figura 5: Parámetros para el tercer modo de flexión de la viga.

Tabla 5: Valores máximos de las distribuciones de fuerza y potencia para cada modo de flexión.

Modo	w_{\max} (N/m)	p_{\max} (W/m)
F1	1.95	0.0512
F2	3.86	0.203
F3	5.72	0.452

Tabla 6: Frecuencia angular de resonancia, valores máximos de las densidades de corrientes en x e y , valor medio de las pérdidas de Joule, valor medio de la potencia mecánica y coeficiente modal de amortiguamiento viscoso para cada modo de flexión.

Modo	ω_r (rad/s)	$J_{x,\max}$ (MA/m ²)	$J_{y,\max}$ (MA/m ²)	P_j (mW)	P_m (mW)	ζ_r ($\times 10^{-3}$)
F1	349.5	0.360	0.272	4.79	4.79	5.08
F2	1397	0.742	0.539	19.0	19.0	5.04
F3	3145	1.10	0.797	42.3	42.3	4.99

- En relación con los mapas de las densidades de corrientes \mathbf{J} , se observa que el modo corresponde al número de remolinos generados, más uno. Esto se explica mediante la expansión de la Ecuación (11), que en su forma diferencial resulta en

$$\nabla \times (\rho \mathbf{J}) = \left(B_x \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + B_y \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (15)$$

Cada remolino en el mapa de corrientes se corresponde con una región a lo largo de la longitud de la viga donde el rotacional es positivo o negativo. Además, la Ecuación (15) indica que los bordes de los remolinos coinciden con los puntos de máximo o mínimo de la velocidad modal. Como el campo magnético aplicado es uniforme y la velocidad modal depende únicamente de x , el rotacional de la densidad de corriente es nulo donde la velocidad modal alcanza sus máximos o mínimos. Las mayores densidades de corriente se localizan en los extremos superior e inferior de la superficie de la viga. Las Figuras 3-5 muestran que los centros de los remolinos en la dirección y se encuentran sobre el eje de la viga, en $y = b/2$, y que en la dirección x coinciden con puntos de cambio de curvatura del campo de velocidad, salvo en los centros más cercanos a los extremos, ya que, en una condición de contorno de la viga apoyada, los cambios de curvatura ocurren en los extremos. Sin embargo, debido a la imposibilidad física de que las corrientes escapen de la viga en dichos extremos, los centros de los remolinos próximos a ellos se desplazan ligeramente hacia el interior a medida que aumenta el modo.

- La distribución de fuerzas w_n se alinea con el signo de la velocidad modal en los extremos de la viga y cambia de signo en cada centro de remolino en la dirección x . No obstante, la distribución de fuerzas y la velocidad modal no coinciden a lo largo de toda la viga. Los puntos donde la fuerza es nula corresponden a los centros de remolinos en x , donde $J_y \approx 0$, anulando el término de la expresión mostrada en la Tabla 3. La mayor contribución al amortiguamiento se da cerca de los extremos de la viga, alcanzándose los máximos en las proximidades de los centros de remolinos más próximos a ellos. En los modos inferiores, la contribución de las fuerzas de amortiguamiento entre estos centros es casi insignificante, mientras que, para modos superiores, la fuerza de amortiguamiento se distribuye de forma más uniforme a lo largo de la viga. Los máximos y mínimos de estas fuerzas coinciden con los máximos y mínimos de la velocidad modal o con los bordes de los remolinos. Asimismo, como se detalla en la Tabla 5, el valor máximo de las fuerzas disipativas aumenta con el modo.
- La distribución de potencia p_n es siempre nula donde la velocidad modal es cero, ya que, según la expresión dada en la Tabla 3, no se disipa potencia en ausencia de velocidad. También es nula en los centros de remolinos, donde $J_y \approx 0$. Cerca de los extremos de la viga, la potencia es positiva porque la distribución de fuerza y la velocidad están alineadas, pero cambia de signo al cruzar cada cero. La potencia se concentra principalmente entre los centros de remolinos más próximos a los extremos. De forma análoga a la distribución de fuerza, los máximos y mínimos de la potencia se localizan en los bordes de los remolinos o en los máximos y mínimos de la velocidad modal. Además, la Tabla 5 muestra que el valor máximo de la potencia aumenta con el modo.
- Los resultados numéricos en la Tabla 6 indican que todos los parámetros aumentan con la frecuencia, excepto el coeficiente modal de amortiguamiento viscoso ζ_r , que disminuye con el modo. Esto sugiere que la capacidad de disipación de energía de las corrientes de Foucault es mayor para los modos de menor orden.
- Se observa también que la potencia media de las pérdidas de Joule P_j y la potencia mecánica media P_m son idénticas, lo que indica que, desde una perspectiva eléctrica o mecánica, se obtiene la misma información sobre la disipación global de energía en la viga. Sin embargo, los valores locales de estas potencias, según las expresiones de la Tabla 3, no coinciden necesariamente. Cerca de los extremos de la viga, la potencia mecánica media es positiva.

Por último, cabe destacar que no se inducen corrientes de Foucault cuando el campo magnético actúa en la dirección y , ya que en ese caso la Ecuación (15) se anula. Asimismo, cuando el campo magnético actúa

simultáneamente en las direcciones x e y , se produce un acoplamiento entre los movimientos de flexión y torsión. Para más información, véase [19].

4.3. Resultados con movimiento modal de torsión

Se aplica un campo magnético estático, unitario y uniforme únicamente en la dirección x . En este caso, se representa la velocidad de giro modal $\dot{\theta}$ en lugar del campo de velocidad transversal v , dado que la primera es característica del movimiento de la sección. Estas dos magnitudes están relacionadas a través de

$$v(x, y) = \dot{\theta}(x)(y - b/2). \quad (16)$$

Con fines de visualización, la velocidad de giro modal se ha normalizado respecto a su valor máximo $\dot{\theta}_{\max}$, de manera que $\dot{\theta}_n = \dot{\theta} / \dot{\theta}_{\max}$, siendo $\dot{\theta}_{\max} = 200$ rad/s para $v_{\max} = 1$ m/s, según los valores proporcionados en la Tabla 4. Además, como se ha indicado en la Sección 2, para el análisis del movimiento de torsión se considera que los apoyos de la viga impiden la rotación en torsión en sus extremos.

En las Figuras 6-8 se presentan los resultados derivados de la velocidad de giro modal normalizada para los tres primeros modos de torsión, incluyendo el mapa de las densidades de corriente, así como las distribuciones normalizadas de par y potencia. Los valores máximos de estas variables normalizadas se recogen en la Tabla 7. Los parámetros numéricos para cada modo se detallan en la Tabla 8.

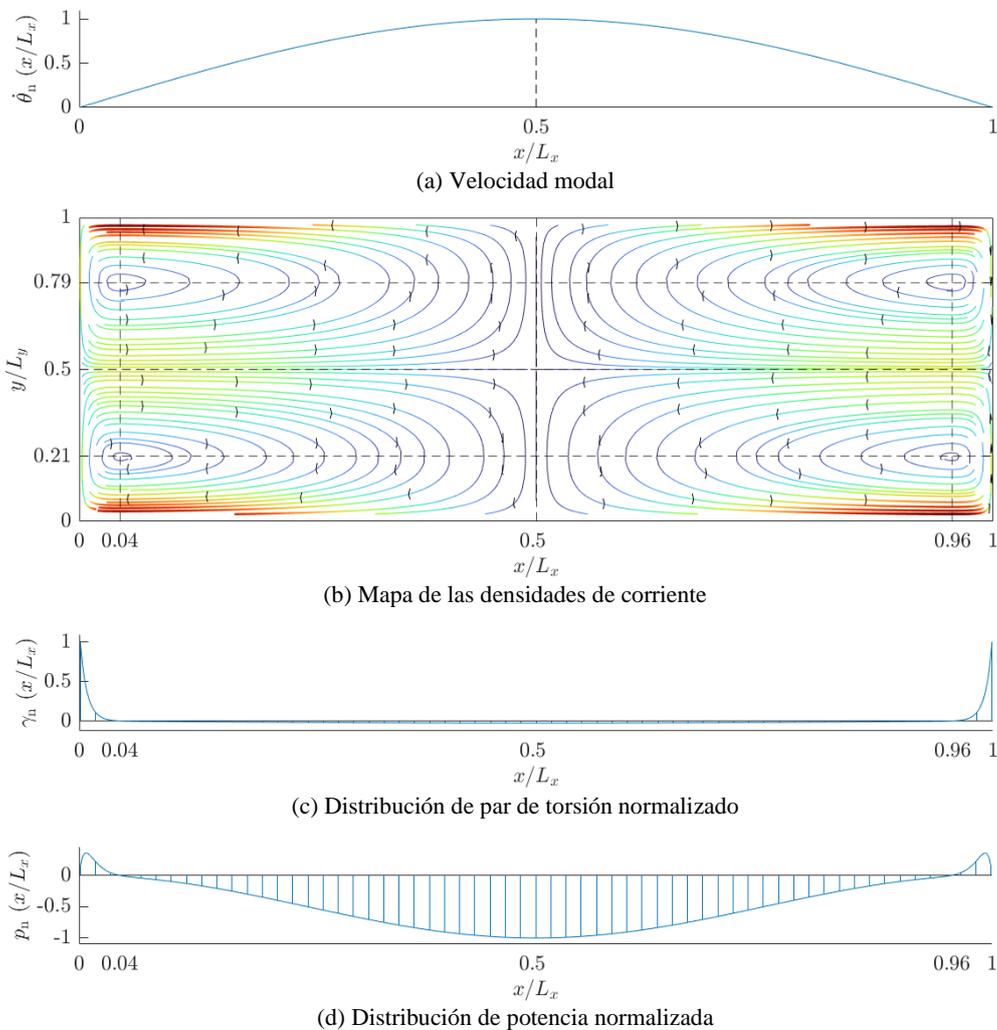


Figura 6: Parámetros para el primer modo de torsión de la viga.

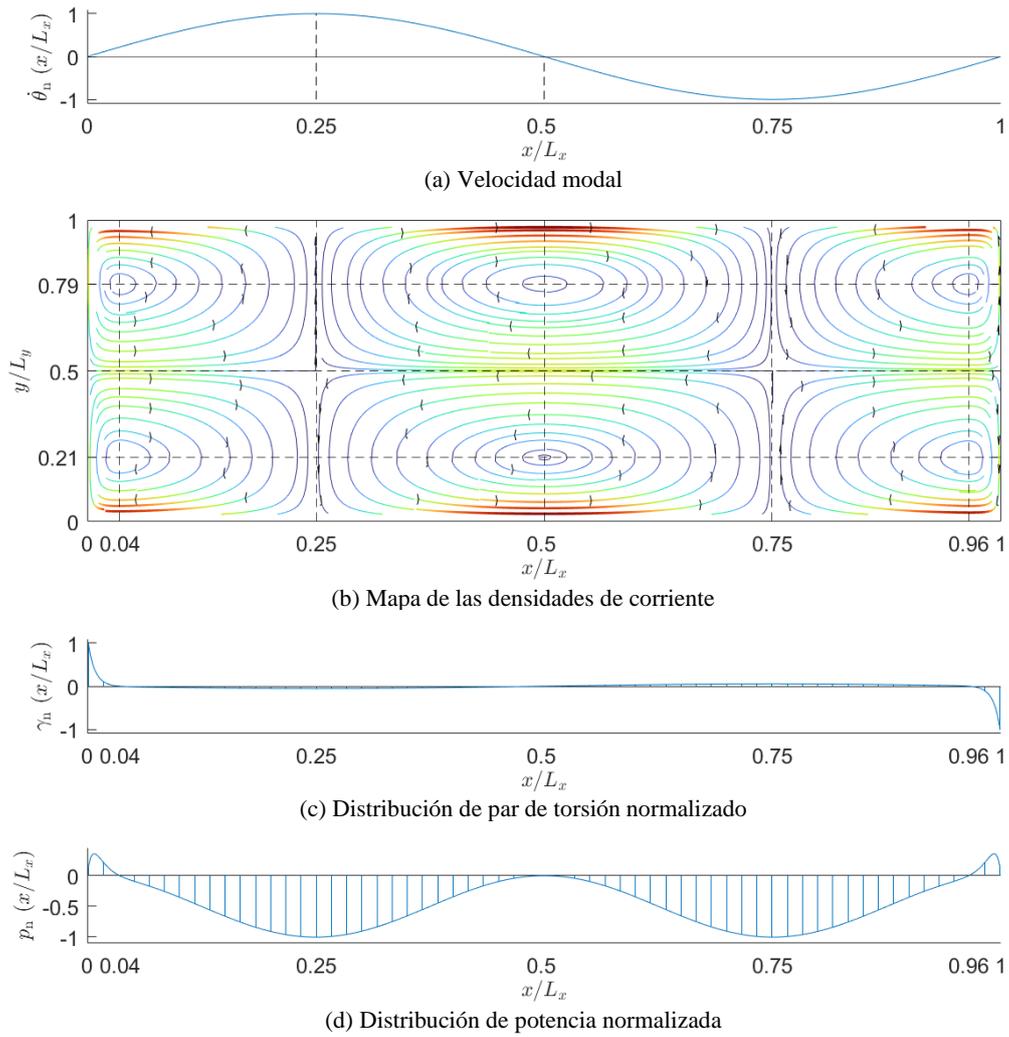
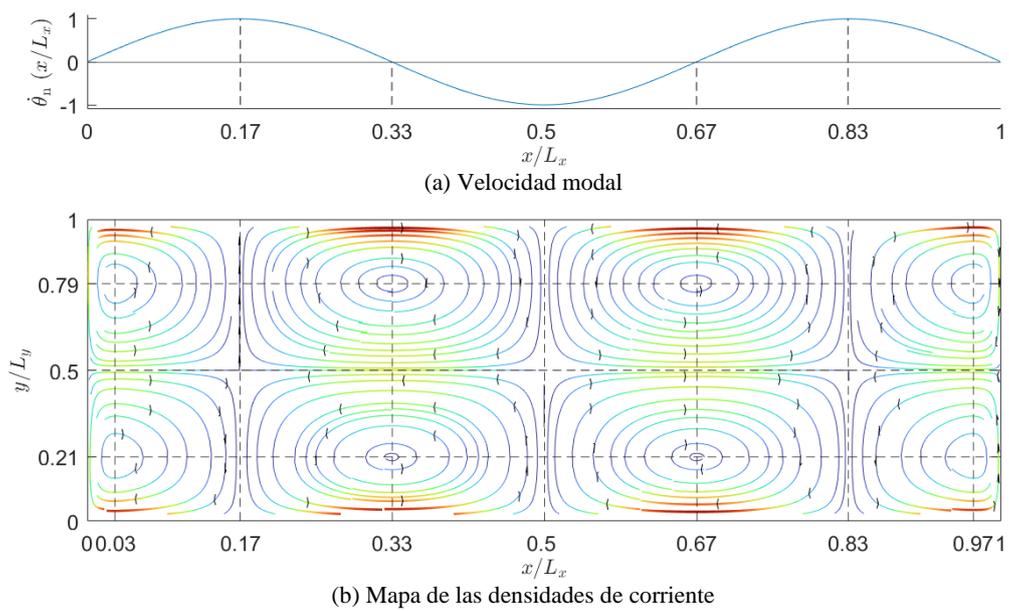
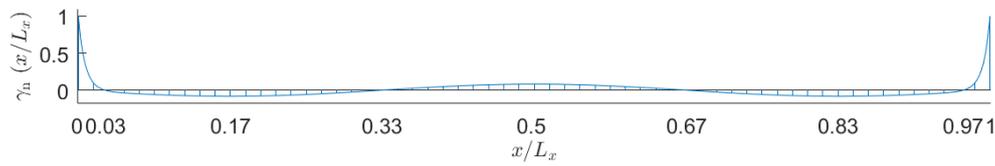
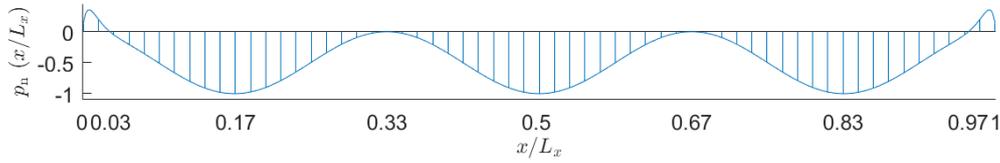


Figura 7: Parámetros para el segundo modo de torsión de la viga.





(c) Distribución de par de torsión normalizado



(d) Distribución de potencia normalizada

Figura 8: Parámetros para el tercer modo de torsión de la viga.**Tabla 7:** Valores máximos de las distribuciones de par y potencia para cada modo de torsión.

Modo	γ_{\max} (Nmm/m)	p_{\max} (mW/m)
T1	1.24	3.39
T2	2.47	13.5
T3	3.69	30.3

Tabla 8: Frecuencia angular de resonancia, valores máximos de las densidades de corrientes en x e y , valor medio de las pérdidas de Joule, valor medio de la potencia mecánica y coeficiente modal de amortiguamiento viscoso para cada modo de torsión.

Modo	ω_r (rad/s)	$J_{x,\max}$ (MA/m ²)	$J_{y,\max}$ (MA/m ²)	P_j (mW)	P_m (mW)	ζ_r ($\times 10^{-5}$)
T1	9157.7	0.111	0.0681	0.328	0.328	3.94
T2	18315	0.225	0.136	1.31	1.31	7.87
T3	27473	0.337	0.203	2.94	2.94	11.8

- En cada modo, se generan dos filas de remolinos de corriente \mathbf{J} en la dirección x , cada fila con un número de remolinos igual al modo más uno, siendo ambas simétricas respecto al eje de la viga. Esto se explica mediante la Ecuación (15), donde cada remolino de corriente corresponde a una región donde el rotacional de la corriente es positivo o negativo. Los puntos de frontera entre remolinos consecutivos coinciden con los máximos o mínimos de la velocidad de giro modal, ya que esta es la única forma de satisfacer la Ecuación (15) con el campo de velocidad dado en la Ecuación (16). Los valores máximos de las corrientes de Foucault se localizan cerca de las partes superior e inferior de la viga. En la dirección y , los centros de los remolinos están siempre a una distancia fija de ± 0.29 respecto al eje de la viga, mientras que en x se sitúan en puntos donde cambia la curvatura del perfil de velocidad, excepto para los remolinos próximos a los extremos, donde estos se acercan a los límites de la viga conforme aumenta el modo. Esto ocurre porque el cambio de curvatura ocurre en los extremos, y como no es físicamente posible que un centro de remolino se sitúe en los extremos, estos se sitúan cerca de ellos.
- La distribución de par γ_n se alinea con la velocidad de giro modal cerca de los extremos de la viga, mientras que ambas se oponen en el resto de la viga, cambiando de signo en los centros de los remolinos. Los máximos y mínimos del par entre los centros de remolinos consecutivos coinciden con puntos de frontera entre remolinos, donde el rotacional de la densidad de corriente es nulo. Aunque el par se concentra alrededor de los extremos de la viga, se distribuye de manera más uniforme a lo largo de la viga a medida que aumenta el modo. Según los valores máximos del par en la Tabla 7, este aumenta con el modo.
- La distribución de potencia p_n comienza en cero en los extremos de la viga, donde no hay velocidad, y es positiva desde los extremos hasta los centros de remolinos más cercanos en la dirección x . Se vuelve negativa en el resto de la viga, alcanzando cero en cada centro de remolino o donde la velocidad de giro modal es nula. Los mínimos de potencia entre centros de remolinos consecutivos coinciden con los máximos o mínimos de la velocidad de giro modal. Los resultados numéricos de la Tabla 7 indican que la potencia máxima aumenta con el modo.
- Todos los parámetros en la Tabla 8 incrementan con la frecuencia, indicando que, para el movimiento de torsión, cuando se aplica un campo magnético externo a lo largo de la longitud de la viga, la capacidad de disipación de energía de las corrientes inducidas mejora a frecuencias más altas, como refleja el aumento del coeficiente modal de amortiguamiento viscoso, en contraste con el comportamiento en flexión.

Por último, aunque no se estudia aquí, cuando el campo magnético se aplica únicamente en la dirección y , se inducen corrientes de Foucault, a diferencia de la flexión. Asimismo, como ocurre en flexión, cuando el campo magnético actúa simultáneamente en las direcciones x e y , se produce un acoplamiento entre los fenómenos de flexión y torsión. Para más detalles, véase [19].

5. Conclusiones

En este trabajo se ha llevado a cabo un estudio detallado sobre la capacidad de disipación de energía de las corrientes de Foucault generadas en una viga con apoyos simples delgada que vibra en estado estacionario dentro de un campo magnético estático y uniforme. Se ha adaptado y empleado un procedimiento numérico basado en un método de diferencias finitas consolidado para incluir la inducción por movimiento.

El movimiento de la viga se describe mediante campos de velocidad asociados a formas modales de flexión o torsión. Dado que el campo de velocidad es armónico, las corrientes de Foucault resultantes también presentan un comportamiento armónico. Una vez determinadas estas corrientes, se calculan y analizan la distribución de fuerzas, distribución de par, distribución de potencia, pérdidas por efecto Joule, potencia mecánica disipada y el coeficiente modal de amortiguamiento viscoso para una viga específica sometida a un campo magnético estático y uniforme actuando en la dirección longitudinal de la viga.

Los resultados obtenidos indican que la naturaleza de las corrientes de Foucault y sus propiedades disipativas varían en función del tipo de movimiento al que se somete a la viga de estudio. Además, es conocido que la dirección de aplicación del campo magnético es otro factor determinante en aplicaciones relacionadas con vibraciones, ya que puede que no se induzcan corrientes o que incluso se produzca un acoplamiento entre los movimientos de flexión y torsión. Los hallazgos sugieren que, en general, la capacidad de disipación de energía es mayor para modos de orden inferior, lo cual resulta ventajoso para aplicaciones mecánicas orientadas a la reducción de vibraciones, ya que ciertos métodos de amortiguamiento tradicionales suelen mostrar dificultades para disipar eficazmente energía mecánica a bajas frecuencias.

6. Referencias

- [1] Griffiths D.J., *Introduction to electrodynamics, 4th ed.*, Pearson, Boston (2013)
- [2] Gastli A., Metwally I.A., “Computation of eddy-current density on ESP motor and well casings under different operating conditions”, *Simulation Modelling Practice and Theory* **16**, 483–493 (2008)
- [3] Amjadian M., Agrawal A.K., “A passive electromagnetic eddy current friction damper (PEMECFD): Theoretical and analytical modeling”, *Structural Control and Health Monitoring* **24**, e1978 (2017)
- [4] Ye L., Liang C., Liu Y., Li D., Liu Z., “Performance analysis and test of a novel eddy-current braking & heating system for electric bus”, *Energy Conversion and Management* **183**, 440–449 (2019)
- [5] Liang L., Feng Z., Chen Z., “Seismic Control of SDOF Systems with Nonlinear Eddy Current Dampers”, *Applied Sciences* **9**, 3427 (2019)
- [6] Shobhana B.B., Panchal V.R., Matsagar V.A., “Research Developments of Eddy Current Dampers for Seismic Vibration Control of Structures”, *Journal of Vibration Engineering & Technologies* **12**, 5953–5971 (2024)
- [7] Chen F., Zhao H., “Design of eddy current dampers for vibration suppression in robotic milling”, *Advances in Mechanical Engineering* **10**, (2018)
- [8] Irazu L., Elejabarrieta M.J., “A novel hybrid sandwich structure: Viscoelastic and eddy current damping”, *Materials & Design* **140**, 460–472 (2018)
- [9] Bae J.-S., Kwak M.K., Inman D.J., “Vibration suppression of a cantilever beam using eddy current damper”, *Journal of Sound and Vibration* **284**, 805–824 (2005)
- [10] Turner L.R., Hua T.Q., “Results for the cantilever beam moving in crossed magnetic fields”, *COMPEL – The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* **9**, 205–216 (1990)
- [11] Rodger D., Eastham J., “A formulation for low frequency eddy current solutions”, *IEEE Transactions on Magnetics* **19**, 2443–2446 (1983)
- [12] Bermúdez A., Rodríguez R., Salgado P., “A Finite Element Method with Lagrange Multipliers for Low-Frequency Harmonic Maxwell Equations”, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **40**, 1823–1849 (2002)
- [13] Alonso Rodríguez A., Bertolazzi E., Ghiloni R., Valli A., “Finite element simulation of eddy current problems using magnetic scalar potentials”, *Journal of Computational Physics* **294**, 503–523 (2015)

-
- [14] Nagel J.R., “Fast finite-difference calculation of eddy currents in thin metal sheets”, *The Applied Computational Electromagnetics Society Journal* **33**, 575–584 (2018)
- [15] Nagel J.R., “Finite-Difference Simulation of Eddy Currents in Nonmagnetic Sheets via Electric Vector Potential”, *IEEE Transactions on Magnetics* **55**, 1–8 (2019)
- [16] Irazu L., Elejabarrieta M.J., “Analysis and numerical modelling of eddy current damper for vibration problems”, *Journal of Sound and Vibration* **426**, 75–89 (2018)
- [17] Blevins R.D., *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida (1995)
- [18] Notaroš B.M., “Total electromagnetic induction”, *Electromagnetics, International edition*, 289–294, Pearson, Upper Saddle River, NJ (2011)
- [19] Brun M., Cortés F., Elejabarrieta M.J., “Numerical analysis of energy dissipation due to eddy currents in a vibrating beam”, *Journal of Sound and Vibration* **595**, 118787 (2025)
- [20] Nagel J.R., “Numerical Solutions to Poisson Equations Using the Finite-Difference Method”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine* **56**, 209–224 (2014)
- [21] Landau L.D., Lifshits E.M., Pitaevskiĭ L.P., *Electrodynamics of continuous media, 2nd ed.*, Pergamon, Oxford, New York (1984)