



Restricciones de fabricación aditiva en Optimización de Topología

José Antonio Postigo Martín¹, Alain Garaigordobil Jiménez², Rubén Ansola Loyola³

¹ Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU. joseantonio.postigo@ehu.eus

² Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU. alain.garaigordobil@ehu.eus

³ Dpto. de Ingeniería Mecánica. Escuela de Ingeniería de Bilbao. UPV/EHU. ruben.ansola@ehu.eus

En este trabajo se expondrá una formulación para de las restricciones de fabricación en optimización de topología orientadas a diseñar piezas que puedan ser fabricadas mediante fabricación aditiva. Esta tecnología presenta una gran compatibilidad con la optimización de topología debido a lo versátil que resulta abordando geometrías complejas. Sin embargo, los métodos de optimización de topología pueden converger hacia barras cuyas dimensiones no son alcanzables por la fabricación aditiva. Usualmente, tras crear un diseño optimizado se suele aplicar una etapa de diseño para la manufactura en el que se modifican las incompatibilidades de diseño para poder fabricar la pieza. En lo que respecta al presente trabajo, partiendo del método “Solid Isotropic Material with Penalization” (SIMP), se reformulará el problema de optimización incorporando las restricciones de fabricación necesarias, con el objetivo de acercar el resultado final del proceso de optimización a la fabricación de la pieza. Para tal fin se presentarán nuevos métodos para controlar el tamaño de las barras, como el control local del perímetro o un proceso de “esqueletonización” que utiliza los métodos de filtrado comúnmente empleados en la optimización de topología, permitiendo reducir los tiempos de iteración e incorporar la sensibilidad de la “esqueletonización” al proceso de diseño.

1. Introducción

Este artículo presenta una nueva metodología para controlar el tamaño mínimo de los elementos estructurales en la optimización de topología. Este enfoque utiliza técnicas de filtrado comunes empleadas en la optimización topológica, eliminando así la necesidad de análisis adicionales mediante el método de los elementos finitos.

Una de las primeras aportaciones en el contexto del control de escala fue realizada por Guest et al. [1], cuyo método para la escala mínima de longitud proponía una proyección de la variable de diseño nodal en el campo del elemento dentro de un radio de filtro $r_{\min}$ garantizando así un control sobre el tamaño mínimo de los elementos sólidos. Por otro lado, Wang et al. [2] propusieron la Formulación Robusta, que analiza las realizaciones erosionadas, dilatadas e intermedias de la solución e impone la escala de longitud en la solución intermedia cuando todas las configuraciones de diseño comparten una topología coherente. Aunque este es uno de los enfoques más efectivos para abordar el problema, presenta varias desventajas. Por ejemplo, requiere analizar cada realización de la solución y, cuando las realizaciones físicas no comparten una topología coherente, esta formulación no logra imponer la escala mínima de longitud.

Otro método para controlar la escala mínima de longitud se basa en el procedimiento de esqueleto para obtener la zona media de los elementos estructurales. En esta línea, se han desarrollado varios trabajos, como el de Zhang et al. [3], cuya principal debilidad radica en que el esqueleto estructural no influye en el análisis de sensibilidad. Además, la restricción de escala mínima de longitud puede ser incompatible con la elección del resto de los parámetros de optimización, lo que obliga a adoptar una topología subóptima.

Este trabajo introduce una metodología novedosa para abordar la restricción de escala mínima de longitud en problemas de optimización. El objetivo principal es garantizar que esta restricción no requiera un número excesivo de filtros ni variables adicionales que se desvíen de la variable de diseño. En su lugar, debe mantener una interpretación geométrica intuitiva y formularse de manera sencilla, evitando una complejidad innecesaria en el análisis de sensibilidad.

Para lograrlo, se proponen dos métodos para integrar la restricción en el algoritmo de optimización, los cuales también pueden emplearse de manera complementaria si es necesario. El primer método se basa en el control del perímetro, mientras que el segundo introduce un enfoque novedoso para obtener una representación diferenciable del esqueleto de la estructura.

2. Planteamiento del problema

Los procedimientos descritos requieren de una pequeña cascada de variables que se ilustra en la figura 1. A partir de ahora nos apoyaremos en esta figura para comprender en que paso del procedimiento nos encontramos.

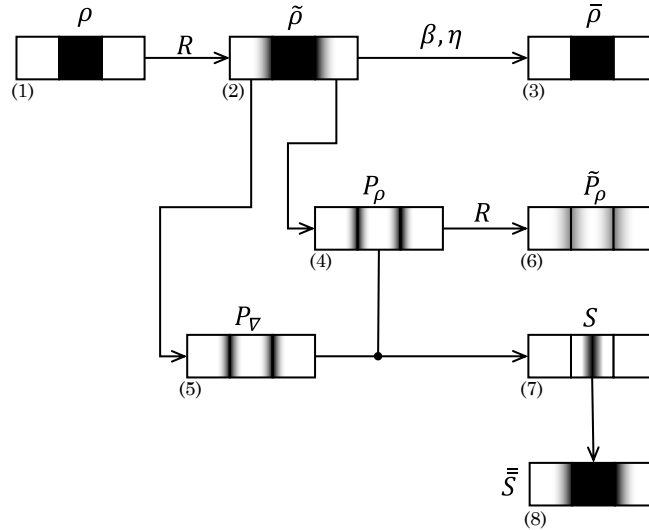


Figura 1: Cascada de variables.

El proceso (1)→(3) corresponde a un esquema general de optimización topológica basado en densidad. Los procesos (2)→(4) y (2)→(5) se refieren al proceso de generación del perímetro utilizando valores en escala de grises P_ρ y gradiente P_∇ , respectivamente. La transformación (4)→(6) corresponde al perímetro suavizado $\bar{P}$. Finalmente, los procesos (4),(5)→(7) se refieren al proceso de esqueletización S .

2.1. Suavizado

En la optimización topológica basada en densidad, las técnicas de suavizado evitan patrones de tablero de ajedrez y controlan la escala de longitud. Aquí, el suavizado genera funciones de perímetro y establece control local. Se aplicó el filtro PDE basado en la ecuación diferencial de tipo Helmholtz de Lazarov y Sigmund [4], con condiciones de contorno consistentes según Wallin et al. [5]. La ecuación gobernante incluye l_r como parámetro de penalización relacionado con la escala de longitud, definido como $r = 2\sqrt{3}l_r$. ϕ es la variable inicial y $\tilde{\phi}$ la variable filtrada. l_s representa la penalización del material situado en los contornos del dominio y $\mathbf{n}$ es el vector normal a dicho contorno.

$$\begin{cases} -l_r^2 \nabla^2 \tilde{\phi} + \tilde{\phi} = \phi & / \quad \phi \in \{\rho, P_\rho\} \\ l_r^2 \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{n} = -l_s \tilde{\phi} & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

2.2. Proyección

El filtro de umbralización, o filtro de proyección, se utiliza comúnmente para eliminar las transiciones en escala de grises entre las regiones sólidas y vacías. Sus aplicaciones han sido discutidas en Sigmund [6] y Sigmund [7]. En este trabajo, empleamos la función de proyección propuesta por Wang et al. [2] (ver Ec. (2)).

$$\bar{\phi} = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(\tilde{\phi} - \eta)]}{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(1 - \eta)]} \quad (2)$$

Aquí β es el parámetro que controla la aproximación a la función escalón, y η define el umbral de proyección.

2.3. Restricción de perímetro

Este método consiste en evaluar el perímetro local en cada punto dentro del dominio computacional. Para realizar esta medición del perímetro local, utilizamos el potencial del filtro PDE. Este método se ilustra en un ejemplo particular unidimensional, como se muestra en la Figura 2, donde la variable ρ toma los valores de una función escalón de Heaviside, $\tilde{\rho}$ es la variable filtrada mediante un filtro PDE, y P_ρ es la función de perímetro, definida de la siguiente manera:

$$P_\rho = 4\tilde{\rho}(1 - \tilde{\rho}) \quad (3)$$

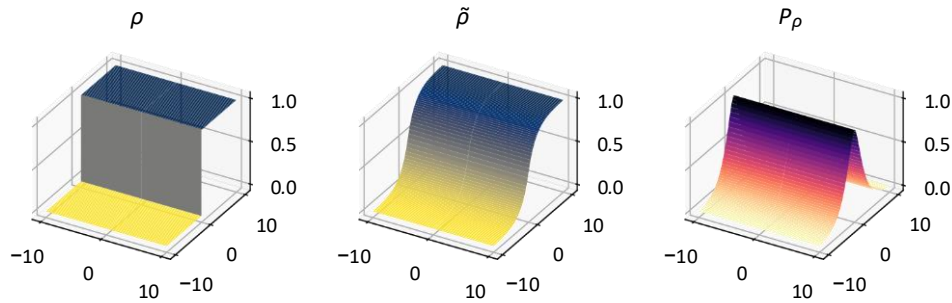


Figura 2: Ejemplo 1D.

La principal idea de este procedimiento es: cuando se aplica un segundo paso de filtrado al perímetro, el resultado suavizado $\tilde{P}_\rho$ alcanza un valor máximo de $2/3$ en $x = 0$. Cuando la dimensión del elemento estructural es inferior al radio de filtrado, se obtendría $\tilde{P}_\rho > 2/3$. De esta manera, haciendo que el valor del perímetro filtrado sea aproximadamente $2/3$, se consigue garantizar que el tamaño mínimo del elemento será r .

Una gran ventaja de este método es que permite controlar la curvatura de los puntos de unión entre elementos estructurales, tal y como puede verse en la figura 3.

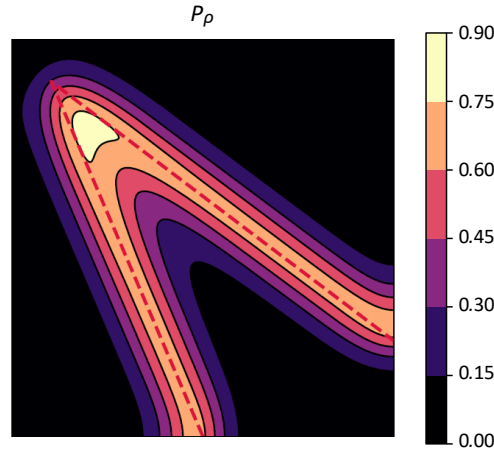


Figura 3: Representación del perímetro de una intersección.

2.4. Método de esqueletización.

La esqueletización es una técnica que genera una representación de la estructura de un solo píxel de ancho, reduciéndola efectivamente a su eje central. Esta representación gráfica esquelética permite evaluar el diseño en el centro de los elementos estructurales, ayudando a identificar regiones problemáticas. En este trabajo proponemos una nueva metodología para obtener el esqueleto de la estructura utilizando técnicas de filtrado y variables ya presentes en el algoritmo de optimización.

La metodología propuesta para alcanzar la representación esquelética de la estructura se basa en la generación de una función singular en los ejes de los elementos estructurales. Para ello se aprovecha que la función perímetro (3) muestra semejanza con la función gradiente (4), exceptuando el eje de las barras donde el gradiente se hace nulo. La división de ambas, según la ecuación (5) genera una singularidad en el eje de las barras lo cual, tras una proyección converge al esqueleto de la estructura.

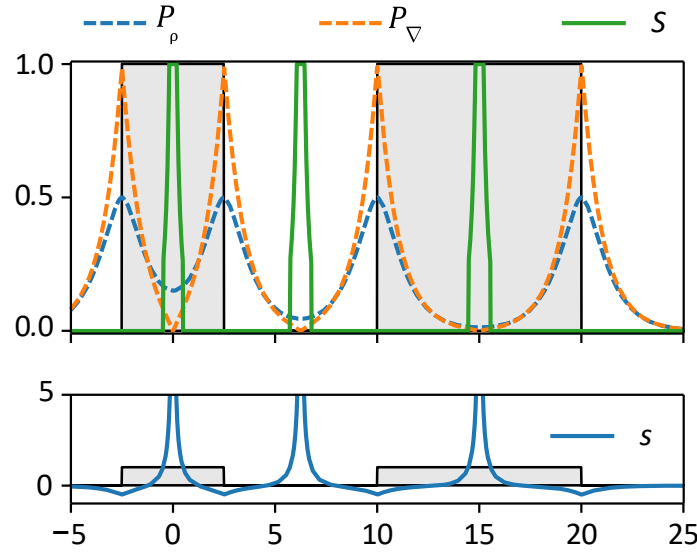


Figura 4: Representación 1D del proceso de esqueletización.

$$P_{\nabla} = 2l_r |\nabla \tilde{\rho}| \quad (4)$$

$$s = \frac{P_{\rho}}{2P_{\nabla}} - 1 \quad (5)$$

Observamos que la función s no depende del grosor de ningún elemento sólido o vacío cercano a su eje, lo que nos permite aislarla en una región específica para obtener la representación del esqueleto mediante la expresión de proyección de la ecuación (2).

En la figura 5, la imagen de la izquierda muestra un ejemplo estándar de una viga MBB, mientras que la imagen de la derecha presenta la correspondiente representación esquelética obtenida mediante el procedimiento propuesto. Esto demuestra cómo el enfoque propuesto genera un contorno esquelético claro, capturando la esencia de la configuración estructural.

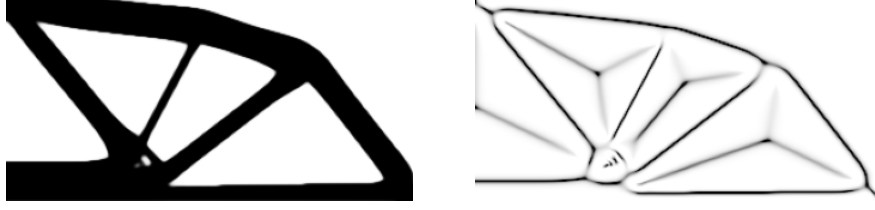


Figura 5: Representación del esqueleto en una viga MBB.

3. Problema de optimización

Consideramos el problema general de optimización topológica descrito en la Figura 6, cuyo objetivo es determinar una distribución de material que minimice la función objetivo F mientras se satisface un conjunto de cuatro restricciones definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min: (\rho) \quad & F(\mathbf{u}(\rho), \rho) \\ \text{st:} \quad & g(\rho) \leq 0, \\ & l_p(\rho) \leq 0, \\ & l_s(\rho) \leq 0, \\ & l_v(\rho) \leq 0, \\ & \rho_e \in [0,1], \forall e \end{aligned} \quad (6)$$

donde ρ representa la variable de diseño y $\mathbf{u}$ denota la respuesta del sistema en los puntos nodales. Las funciones $l_p(\rho)$, $l_s(\rho)$ y $l_v(\rho)$ corresponden a la restricción del perímetro local y a las restricciones basadas en el esqueleto para las regiones sólidas y vacías, respectivamente. La restricción $g(\rho)$ regula el volumen de la estructura y se define de la siguiente manera:

$$g(\rho) = \frac{V(\rho)}{\alpha V_0} - 1 \leq 0 \quad (7)$$

Donde $V(\rho)$ es el volumen del diseño actual, V_0 el volumen del dominio de diseño, y α la fracción de volumen especificada.

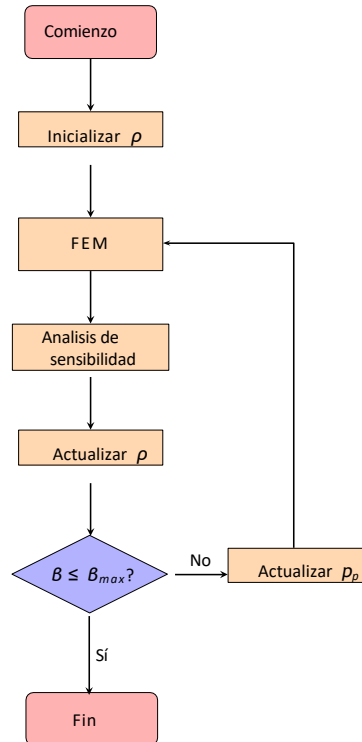


Figura 6. Esquema principal del problema.

Dado que todas las restricciones son diferenciables con respecto a la variable de diseño ρ , y si la sensibilidad de primer orden de la función objetivo F está disponible, este problema de optimización puede resolverse utilizando el Método de Asíntotas Móviles (MMA) propuesto por Svanberg [8]

3.1. Restricción de perímetro local.

La restricción del perímetro local actúa como la principal limitación para controlar el tamaño de los elementos estructurales y la curvatura. Tal como se describe en la subsección 2.3, el objetivo de esta restricción es cumplir la siguiente condición:

$$\tilde{P}_\rho(\rho) \leq 2/3 \quad (8)$$

Para expresar esta restricción en una forma adecuada para la optimización numérica, aproximamos el valor máximo utilizando la función *MellowMax* propuesta por Asadi y Littman [9]:

$$l_p(\rho) = \frac{3}{2p_p} \log\left(\frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} \exp(p_p \cdot \tilde{P}_{\rho e})\right) - 1 \leq 0 \quad (9)$$

Donde $p_p \in (-\infty, \infty)$ y N_e es el número de variables de diseño. A medida que $p_p \rightarrow \infty$, la función se comporta como un máximo. Cuando $p_p \rightarrow 0$, actúa como una media aritmética, mientras que, cuando $p_p \rightarrow -\infty$, se comporta como un mínimo.

3.2. Restricción basada en el esqueleto.

La restricción del esqueleto se expresa de manera muy similar a la del perímetro.

$$l_s(\rho) = \frac{1}{l_{lim}} \left[\frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} l_{se}^{p_s} \right]^{\frac{1}{p_s}} - 1 \leq 0 \quad (10)$$

$$l_v(\rho) = \frac{1}{l_{lim}} \left[\frac{1}{N_e} \sum_{e=1}^{N_e} l_{ve}^{p_v} \right]^{\frac{1}{p_v}} - 1 \leq 0 \quad (11)$$

Dónde los subíndices s y v representan las restricciones basadas en el esqueleto para los elementos sólidos y vacíos, respectivamente, y l_{lim} hace referencia al límite especificado para estas restricciones, tomando, típicamente, el valor de $l_{lim} = 0.9$.

4. Ejemplo numérico

En este ejemplo se pretende diseñar una viga MBB tal que:

$$\begin{aligned} \min: (\rho) \quad & c = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \\ \text{st:} \quad & \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ & g(\rho) \leq 0 \\ & l_p(\rho) \leq 0, \\ & l_s(\rho) \leq 0, \\ & l_v(\rho) \leq 0, \\ & \rho_e \in [0,1], \forall e \end{aligned} \quad (12)$$

Siendo $\mathbf{K}$ la matriz de rigidez del conjunto, y $\mathbf{f}$ el vector de fuerzas aplicadas.

La interpolación de las propiedades del material se realiza mediante el método SIMP, de manera que:

$$\mathbf{K}(\rho) = [E_{min} + (E_o + E_{min})\bar{\rho}_i^p] \mathbf{K}_o \quad (13)$$

Siendo p el factor de penalización, E_o el módulo de Young del material isotrópico, E_{min} el módulo de Young del material vacío, y $\mathbf{K}_o$ la matriz de rigidez del material con modulo elástico unidad.

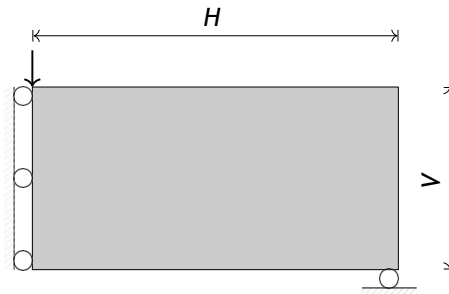


Figura 7: Dominio de diseño.

En la Figura 8 se muestra un ejemplo de una viga MBB con una fracción de volumen de $v = 0.3$ y tres densidades de malla diferentes. Se puede observar que, en los tres casos, el diseño cumple con los requisitos de escala de

longitud mínima tanto para sólidos como para vacíos, lo que da lugar a diseños muy similares independientemente de la densidad de la malla.

En la Figura 9 se presenta el proceso de iteración para el caso de la Figura 8(c). Se observa que la restricción de perímetro no solo impone una escala de longitud mínima al ensanchar los elementos estructurales, sino que también permite priorizar las barras más relevantes, eliminando material de aquellas que no son cruciales para el diseño e incluso suprimiéndolas por completo.

Este método es particularmente eficaz en problemas con restricciones de volumen muy estrictas. Una restricción basada únicamente en funciones de esqueleto tiende a aumentar el tamaño de los elementos estructurales y puede no lograr una topología compatible con el volumen impuesto, lo que dificulta obtener un resultado cuando tanto el radio del filtro como el volumen objetivo son extremadamente pequeños.

Cuando el radio de filtrado es pequeño en relación con el espacio de diseño, es común que emerjan topologías muy complejas con numerosos elementos sólidos y vacíos. Sin embargo, el método propuesto permite simplificar la topología resultante, asegurando su compatibilidad con la restricción de volumen impuesta.

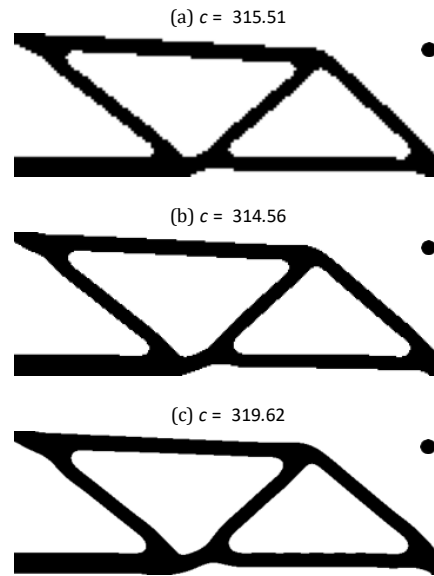


Figura 8: Resultados de la MBB con tres densidades de malla diferentes, 150x50, 300x100 y 600x200, con radios de filtrado de $r = 5$, $r = 10$ y $r = 20$.

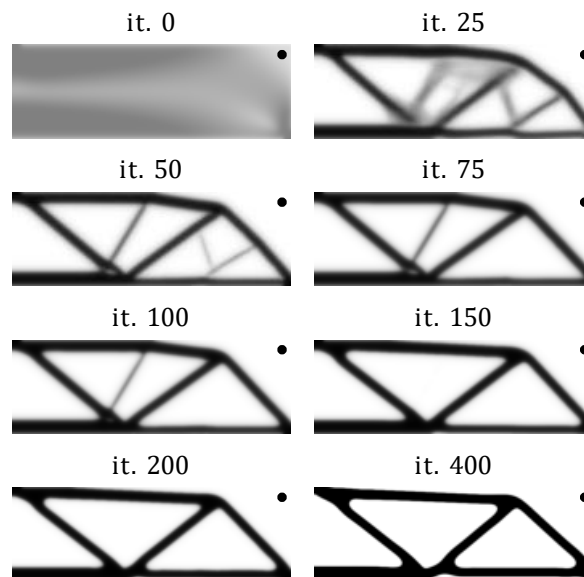


Figura 9: Evolución del diseño.

5. Conclusiones

Hemos presentado una metodología para imponer restricciones de tamaño mínimo en la optimización topológica mediante el control del perímetro local y la representación esquelética. Estos enfoques complementarios permiten mantener de manera efectiva una escala de longitud prescrita sin necesidad de un filtrado excesivo ni de análisis adicionales mediante elementos finitos. El control del perímetro garantiza que los elementos estructurales cumplan con los requisitos de tamaño mínimo, mientras que el método basado en el esqueleto identifica y resuelve incompatibilidades geométricas, permitiendo que el proceso de optimización se reinicie con un diseño abierto cuando sea necesario. También es importante destacar que el control del perímetro facilita modificaciones en la topología al priorizar sólidos y vacíos relevantes, eliminando elementos innecesarios. Por otro lado, el perímetro local permite un control sutil de la curvatura, suavizando bordes afilados. Los resultados numéricos en elasticidad lineal demuestran la robustez y versatilidad de las técnicas propuestas. Además, el método logra de manera consistente diseños optimizados, incluso bajo estrictas restricciones de volumen, mediante las simplificaciones estructurales necesarias.

6. Bibliografía

- [1] J. K. Guest, J. H. Prévost, T. Belytschko, Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004) 238–254.
- [2] F. Wang, B. S. Lazarov, O. Sigmund, On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization, *Structural and multidisciplinary optimization* 43 (2011) 767–784.
- [3] W. Zhang, W. Zhong, X. Guo, An explicit length scale control approach in SIMP-based topology optimization, *Computer methods in applied mechanics and engineering* 282 (2014) 71–86.
- [4] B. S. Lazarov, O. Sigmund, Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations, *International journal for numerical methods in engineering* 86 (2011) 765–781.
- [5] M. Wallin, N. Ivarsson, O. Amir, D. Tortorelli, Consistent boundary conditions for PDE filter regularization in topology optimization, in *Structural and multidisciplinary optimization* 62 (2020) 1299–1311.
- [6] O. Sigmund, Manufacturing tolerant topology optimization, *Acta mechanica Sinica* 25 (2009) 227–239.
- [7] O. Sigmund, Morphology-based black and white filters for topology optimization, *Structural and multidisciplinary optimization* 33 (2007) 401–424.
- [8] K. Svanberg, The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, *International journal for numerical methods in engineering* 24 (1987) 359–373.
- [9] K. Asadi, M. L. Littman, An alternative softmax operator for reinforcement learning, in: D. Precup, Y. W. The (Eds.), *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, volume 70 of *Proceedings of Machine Learning Research*, PMLR, 2017, pp. 243–252.