



Ecuaciones de flujo plástico para la aplicación del Método de Deformaciones Locales a Cargas Multiaxiales para Materiales Metálicos y No Metálicos

C. Madrigal¹, L. Távara², V. Chaves¹, A. Navarro¹

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica y Fabricación, Universidad de Sevilla, cmadrigal@us.es, chavesrv@us.es, navarro@us.es

² Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universidad de Sevilla, ltavara@us.es

El Método de las Deformaciones Locales es habitualmente utilizado en la industria para calcular la vida de componentes sometidos a cargas de fatiga de bajo número de ciclos. Sin embargo, su aplicación está limitada a cargas uniaxiales. La extensión del método al caso general de cargas multiaxiales requiere la generalización de las ecuaciones de flujo plástico al caso multiaxial. Este trabajo se basa en un modelo de plasticidad que reproduce el comportamiento plástico estabilizado de metales sometidos a cargas multiaxiales, incorporando todos los ingredientes del Método de las Deformaciones Locales, como curvas cíclicas, ciclos de histéresis o efecto memoria. El modelo está basado en la idea de distancia en el espacio de tensiones, que se calcula a través de un tensor métrico.

El empleo habitual de materiales no isótropos en la industria hace necesaria la adaptación del modelo a otros comportamientos. En particular, en este trabajo se aborda la adaptación del modelo para composites de fibra continua unidireccional y matriz termoplástica, que pueden considerarse transversalmente isótropos. Además, en la dirección de la fibra suele suponerse un comportamiento lineal hasta la rotura. El flujo plástico de estos materiales se ve afectada por las tensiones hidrostáticas, lo que supone una reformulación total de las ecuaciones.

Bajo estas hipótesis y restringiendo el análisis a estados de carga de tensión plana, el modelo queda perfectamente definido con un solo parámetro y un módulo de endurecimiento que pueden estimarse fácilmente a partir de ensayos uniaxiales de tracción.

Los parámetros del modelo se han ajustado para el material compuesto AS4/APC-2 obteniéndose buenos resultados en la simulación de la evolución de las deformaciones en ensayos realizados en probetas de fibra unidireccional en diferentes orientaciones en condiciones de tensión plana.

1. Introducción

El Método de las Deformaciones Locales es ampliamente utilizado en la industria para el cálculo de vida a fatiga a bajo número de ciclos en componentes con concentradores de tensión. Sin embargo, su uso está limitado a cargas uniaxiales. A pesar de los intentos que se han llevado a cabo en los últimos años para generalizar dicho método para permitir su empleo bajo condiciones multiaxiales, aún no se ha logrado un consenso sobre cómo resolver alguna de las dificultades que conlleva, como, por ejemplo, la definición de un ciclo de carga.

El primer paso necesario para trasladar la filosofía del Método de las Deformaciones Locales al caso multiaxial es la definición de un modelo de plasticidad, que permita emplear los conceptos de curva cíclica, ciclo de histéresis, efecto memoria, etc. para cargas multiaxiales proporcionales y no proporcionales.

En trabajos anteriores [1- 4] se ha presentado un modelo cíclico multiaxial que ha proporcionado buenos resultados en la simulación del comportamiento de varios materiales bajo estados de carga proporcionales y no proporcionales. Estos trabajos se han centrado en el desarrollo del modelo y de las técnicas necesarias para su aplicación a materiales metálicos e isotrópicos. La simplicidad con la que predice el comportamiento bajo cargas complejas a partir de curvas de comportamiento cíclico uniaxiales hace que el modelo sea atractivo para la implementación en la industria.

La caracterización del comportamiento anisótropo es una línea obligada para la universalización del modelo, permitiendo su empleo en la caracterización de materiales anisótropos de uso habitual en la industria, como los materiales compuestos o materiales metálicos que presentan cierto grado de anisotropía debido, por ejemplo, a tratamientos de deformación en frío o causados por el mismo proceso de fabricación, como es el caso de las piezas metálicas obtenidas con técnicas de fabricación aditiva.

Los materiales compuestos reforzados con fibra son fundamentales en el diseño de estructuras ligeras hoy en día debido a su alta resistencia y rigidez específicas. En particular, piezas compuestas con capas unidireccionales son muy habituales en la industria aeroespacial y de la automoción. Para garantizar un buen diseño y prevenir adecuadamente el fallo de componentes fabricados de estos materiales, es necesario caracterizar correctamente su comportamiento.

Los compuestos de fibras continuas unidireccionales (UD) son fuertemente anisótropos. Su comportamiento suele considerarse lineal hasta el fallo cuando la carga es aplicada en la dirección de la fibra. Sin embargo, cuando se someten a cargas transversales o tangenciales, es la matriz del material la que domina la respuesta, mostrando una deformación claramente no lineal [5-6]. Aunque esta no linealidad puede deberse a diversos factores, como la plasticidad en la resina polimérica, la formación de microgrietas y la no linealidad geométrica (por ejemplo, la rotación de las fibras), es habitual modelarla en conjunto bajo el supuesto de plasticidad [7].

Algunos autores han desarrollado modelos micromecánicos para evaluar la respuesta de los laminados [8-10]. Sin embargo, el elevado coste computacional que conllevan, así como la dificultad de la caracterización mecánica de las fibras y de la matriz por separado, hacen que muchos hayan optado por modelos macroscópicos [11-16].

Uno de los primeros enfoques macroscópicos fue desarrollado por Sun *et al.* [11] para tensión plana, y más tarde fue extendido a estados tridimensionales de carga [12], asumiendo para ello que la dilatación uniforme no contribuye a la deformación plástica. Xie *et al.* [13] desarrollaron un modelo similar, pero basándose en el criterio clásico de Hill.

Yokozeki *et al.* [7] extendieron el modelo de Sun *et al.* [11] para tener en cuenta el distinto comportamiento de estos materiales en compresión, incluyendo en el criterio de fluencia un término de tipo Drucker-Prager para cuantificar la dependencia de la tensión hidrostática que, al contrario de lo que ocurre en materiales metálicos o en rocas, sí tiene una influencia importante en el comportamiento de estos materiales cuando están sometidos a estados de tensión multiaxiales, especialmente bajo estados de carga tangenciales o compresiones transversales [17]. Todos estos modelos asumen una regla de flujo asociativa.

Otros modelos asumen reglas de flujo no asociativas, como el basado en invariantes de Vyas *et al.* [14], que utiliza el potencial plástico de Raghava.

Goldberg *et al.* [18] incorporaron, además, la influencia de la tensión media en su modelo y propusieron una regla de flujo asociativa que sí recoge adecuadamente la influencia de la tensión hidrostática [19]. Otra variante de estos autores [20] está implementada en LS-DYNA como MAT_213.

Recientemente, Nagaraja *et al.* [21] han desarrollado un enfoque unificado que incluye criterios de fluencia tanto isotrópicos como ortótropos, así como reglas de flujo asociativas y no asociativas, si bien la complejidad de sus ecuaciones dista mucho de la sencillez de los modelos iniciales de un solo parámetro.

El modelo de plasticidad que se plantea en este trabajo supone una vuelta a esa sencillez inicial de los primeros modelos que permita reformular las ecuaciones desde un nuevo enfoque conceptual. La idea en la que se basa este nuevo enfoque sostiene que la plastificación puede cuantificarse midiendo la distancia en el espacio de tensiones.

Es decir, la plastificación ocurre cuando la distancia entre el punto que representa el estado de carga en el espacio tensorial de tensiones se aleja suficientemente del punto de referencia desde donde se mide dicha distancia. La forma de medir esta distancia será una característica de cada material.

A continuación, se describen brevemente las ecuaciones de flujo plástico desarrolladas y adaptadas a materiales compuestos de fibra continua unidireccional de matriz termoplástica. Como se verá, estos materiales pueden considerarse transversalmente isótropos y son, por tanto, un buen punto de partida. En particular, los parámetros del modelo se han ajustado para el material compuesto reforzado con fibras de grafito y matriz polimérica PEEK (AS4/APC-2) y se han llevado a cabo algunas simulaciones de su comportamiento, recogiendo adecuadamente el comportamiento bajo tensión plana.

2. Modelo de comportamiento plástico

El modelo de comportamiento abordado en este trabajo ha sido ampliamente descrito para materiales isótropos en [1-4]. Su adaptación a materiales ortótropos implica el uso de ecuaciones más complejas, aunque la filosofía que subyace es la misma. A continuación, se presentan las bases teóricas sobre las que se desarrolla.

Es bien conocido que para definir un modelo constitutivo que describa el comportamiento elasto-plástico de un material son necesarios tres elementos: un criterio de fluencia, una condición de endurecimiento y una regla de flujo.

2.1. Criterio de fluencia

El primer componente de un modelo de plasticidad cíclica es el criterio de fluencia, el cual determina el inicio del proceso de plastificación. Sin perder generalidad, nos enfocaremos únicamente en la primera carga, antes de que la tensión comience a ciclar.

La idea fundamental es que la plastificación depende de la distancia entre un estado tensional dado y otro tomado como referencia. Si se representa un estado tensional mediante un punto en el espacio tensorial de tensiones, es intuitivo pensar que, cuanto más se aleje este punto del estado de referencia, mayor será la plastificación. La característica distintiva del modelo radica en la manera en que se mide dicha distancia.

Cuando el material no está sometido a carga, su estado tensional queda representado en el origen del espacio de tensiones, el cual puede concebirse como un espacio vectorial si se considera el tensor de tensiones como un vector de nueve componentes (o seis si se toma en cuenta la simetría del tensor). Conforme el material es sometido a carga, el punto que representa su estado tensional se desplazará dentro de este espacio. El modelo plantea que la plastificación ocurre cuando la distancia entre el punto que representa el estado tensional y el origen alcanza un valor umbral determinado. Esta distancia, equivalente a la magnitud del vector tensión, puede calcularse utilizando la norma del máximo o la más común norma euclidiana. Se puede demostrar que, al emplear estos dos tipos de normas para materiales isótropos, se obtienen los criterios de Tresca y von Mises [22].

Parece, por tanto, razonable definir una forma más general de medir esta longitud mediante una métrica generalizada, de manera que el módulo del vector tensión σ quede expresado como

$$Q^2 = |\sigma|^2 = g_{ij}\sigma^i\sigma^j \quad (1)$$

donde se ha usado el convenio de suma de Einstein, g_{ij} son las componentes del tensor métrico del espacio de tensiones y σ^i y σ^j son las componentes del vector tensión σ , que es el tensor de tensiones escrito en forma de vector columna, según el siguiente convenio de ordenación de componentes:

$$\begin{array}{lll} 1 - \sigma_x & 2 - \sigma_y & 3 - \sigma_z \\ 4 - \tau_{xy} & 5 - \tau_{yx} & \\ 6 - \tau_{yz} & 7 - \tau_{zy} & \\ 8 - \tau_{zx} & 9 - \tau_{xz} & \end{array}$$

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, y llamando k al valor umbral característico de cada material, el criterio de fluencia se expresa como

$$Q = |\sigma| = \sqrt{g_{ij}\sigma^i\sigma^j} = k \quad (2)$$

2.2. Regla de endurecimiento

La regla de endurecimiento describe, en general, cómo se modifica la superficie de fluencia conforme aumenta la deformación plástica, es decir, cómo evoluciona k en función de la deformación plástica acumulada. Definiendo

adecuadamente esta evolución, podrían incorporarse los modelos clásicos de endurecimiento isotrópico o cinemático, así como cualquier otro enfoque más general que se adapte al material específico en estudio.

Es habitual emplear como medida de la deformación plástica acumulada la longitud de la trayectoria de deformación plástica, llamada en la literatura deformación plástica total equivalente, que se calcula como

$$\lambda = \int |d\varepsilon^p| \quad (3)$$

donde la integral se toma a lo largo de la trayectoria de deformación. Entonces, la regla de endurecimiento se escribe

$$Q = |\sigma| = k(\lambda) \quad (4)$$

que al ser normalmente una función creciente de λ , podrá definirse su función inversa, de manera que

$$\lambda = k^{-1}(Q) \quad (5)$$

y diferenciando se llega a

$$d\lambda = |d\varepsilon^p| = \frac{d\lambda}{dQ} dQ$$

Llamando *función de endurecimiento* a $\lambda(Q)$ y a su derivada *módulo de endurecimiento* y representándola por $\Phi(Q)$, se obtiene el módulo del incremento de deformación plástica, que viene dado como

$$|d\varepsilon^p| = \Phi(Q) dQ \quad (6)$$

2.3. Regla de flujo

Puesto que, según indica la ecuación (6), sólo las cargas que conlleven un aumento en el módulo del vector tensión producirán deformación plástica, es intuitivo invocar la regla de la normal para definir la regla de flujo. Dado que el lugar geométrico de todos los puntos en que se alcanzaría el mismo estado de endurecimiento es una hipersfera centrada en el origen, sólo los incrementos de tensión normales a esta superficie provocarían un aumento de la distancia Q y por tanto plastificación.

Se puede escribir entonces

$$d\varepsilon^p = \Phi(Q) dQ \mathbf{n} \quad (7)$$

donde el vector $\mathbf{n}$ se calcula mediante el gradiente

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla Q}{|\nabla Q|} \quad (8)$$

Puede comprobarse que $|\nabla Q| = 1$ por lo que

$$dQ = \nabla Q \cdot d\sigma = \mathbf{n} \cdot d\sigma \quad (9)$$

2.4. Cálculo de los coeficientes de la métrica

Los coeficientes de la métrica deben determinarse experimentalmente, lo que puede representar un desafío considerable en materiales con un comportamiento complejo debido al gran número de parámetros a identificar. No obstante, en materiales con una respuesta más sencilla, la cantidad de parámetros independientes se reduce significativamente.

Para el caso particular de un material isótropo, es posible aplicar el Teorema de Representación de funciones tensoriales lineales isótropas [23]. Este resultado permite demostrar que, de las 81 constantes g_{ij} , solo dos son distintas de cero y, además, el tensor adopta la siguiente estructura [2].

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} g_\sigma & -\frac{g_\sigma}{2} & -\frac{g_\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g_\sigma}{2} & g_\sigma & -\frac{g_\sigma}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g_\sigma}{2} & -\frac{g_\sigma}{2} & g_\sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g_\tau}{2} & \frac{g_\tau}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g_\tau}{2} & \frac{g_\tau}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_\tau}{2} & \frac{g_\tau}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_\tau}{2} & \frac{g_\tau}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_\tau}{2} & \frac{g_\tau}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{g_\tau}{2} & \frac{g_\tau}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si se admite que las tensiones hidrostáticas no contribuyen a la plastificación, dos tensores que tan sólo difieren en la parte hidrostática deberían tener la misma longitud medida según la ecuación (1). Puede demostrarse que, con esta imposición, se obtiene una relación entre las constantes g_σ y g_τ y que la métrica resultante coincide exactamente con la de von Mises.

Sin embargo, incluso los materiales que inicialmente son isotrópos pueden desarrollar cierto grado de anisotropía debido a procesos de producción que impliquen una deformación plástica severa. En general, para describir el comportamiento de materiales anisótropos se requieren 21 constantes [24], dado que las componentes normales y tangenciales están acopladas. No obstante, por simplicidad, consideraremos aquí únicamente materiales ortótropos, es decir, aquellos con tres planos de simetría ortogonales en cada punto, lo que implica que las componentes tangenciales quedan desacopladas. Bajo esta hipótesis, el número de parámetros distintos de cero se reduce a solo nueve y la métrica quedaría:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} a & d & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & b & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & f & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{2} & \frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2} & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Con esta métrica y según la ecuación (2), el módulo del vector tensión, que se ha llamado Q , tendría la siguiente expresión:

$$Q = |\sigma| = \sqrt{a\sigma_{11}^2 + b\sigma_{22}^2 + c\sigma_{33}^2 + 2d\sigma_{11}\sigma_{22} + 2e\sigma_{11}\sigma_{33} + 2f\sigma_{22}\sigma_{33} + 2g\sigma_{12}^2 + 2h\sigma_{13}^2 + 2m\sigma_{23}^2} \quad (12)$$

Si nuevamente se adopta la hipótesis de que las tensiones hidrostáticas no producen plastificación, es decir, que la plastificación se produce a volumen constante, puede demostrarse que el criterio de plastificación obtenido coincide con el clásico criterio cuadrático de Hill. Sin embargo, la imposición de esta hipótesis puede no estar justificada en muchos materiales de uso habitual en la industria, por lo que no se empleará en lo que sigue. Como se verá a continuación, la mayor complejidad de las ecuaciones debida al mayor número de parámetros se verá compensada por el análisis de estados de carga sencillos que permitan trabajar con un número reducido de incógnitas.

En materiales compuestos de matriz polimérica reforzados con fibras continuas unidireccionales es habitual suponer isotropía transversal e ignorar la no-linealidad en la dirección de la fibra, suponiendo que en esa dirección no se produce plastificación.

La isotropía transversal impone que

$$b = c \quad d = e \quad g = h \quad (13)$$

que simplifica la métrica a

$$Q = |\sigma| = \sqrt{a\sigma_{11}^2 + b(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2d\sigma_{11}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + 2f\sigma_{22}\sigma_{33} + 2g(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + 2m\sigma_{23}^2} \quad (14)$$

Si se tiene en cuenta que, según lo expuesto anteriormente, la plastificación es debida al aumento de la distancia del punto que representa el estado tensional con respecto a una referencia, es decir, debida al incremento de Q ,

para imponer que en la dirección de la fibra no se produzca plastificación, dQ debe ser nulo cuando se impone una carga $d\sigma = [d\sigma_{11} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. A la vista de la ecuación (9)

$$2Q \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{11}} = 2a\sigma_{11} + 2d\sigma_{22} + 2d\sigma_{33} \quad (15)$$

con lo que

$$dQ = \frac{1}{Q}(a\sigma_{11} + d\sigma_{22} + d\sigma_{33}) d\sigma_{11} = 0 \Rightarrow a = d = 0 \quad (16)$$

quedando únicamente cuatro parámetros no nulos en la métrica

$$Q = |\sigma| = \sqrt{b(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2f\sigma_{22}\sigma_{33} + 2g(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + 2m\sigma_{23}^2} \quad (17)$$

A este mismo resultado se habría llegado anulando los coeficientes de todos los términos que incluyen σ_{11} en la función de plastificación (14).

2.5. Tensión y deformación plástica equivalentes

En este tipo de análisis, es habitual definir unas magnitudes equivalentes de tensión y deformación plástica de forma que el trabajo plástico quede definido como

$$dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p \quad (18)$$

Incluyendo (7) y (8) en (18) se tiene que

$$dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} \Phi(Q) dQ n_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\nabla Q}{|\nabla Q|} \Phi(Q) dQ = Q \Phi(Q) dQ \quad (19)$$

Por lo que intuitivamente se llega a la definición de la tensión equivalente como

$$\bar{\sigma} = Q = |\sigma| \quad (20)$$

y la deformación plástica equivalente como

$$d\bar{\varepsilon}^p = \Phi(Q) dQ = |d\varepsilon^p| \quad (21)$$

3. Resultados

Las ecuaciones arriba propuestas se han empleado para caracterizar el comportamiento inelástico del composite de matriz termoplástica basada en PEEK y reforzada con fibras continuas unidireccionales de grafito, AS4/APC-2, del que se dispone de un riguroso estudio experimental llevado a cabo por [5]. Estos datos incluyen las curvas tensión-deformación de ensayos uniaxiales de probetas con orientación de la fibra a 0°, 15°, 30°, 45° y 90°. Las dimensiones de las probetas (254x19,05x1,27 mm) y la aplicación de la carga en el plano justifican la simplificación del problema a un estado de tensión plana, simplificando aún más las ecuaciones. Así, suponiendo que $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, la métrica queda en su forma más simple, con sólo dos parámetros no nulos

$$Q = |\sigma| = \sqrt{b\sigma_{22}^2 + 2g\sigma_{12}^2} \quad (22)$$

y su gradiente

$$\nabla Q = \frac{1}{2Q} [0 \ 2b\sigma_{22} \ 2f\sigma_{22} \ 2g\sigma_{12} \ 2g\sigma_{12} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (23)$$

Con esto, las ecuaciones (7) y (8) proporcionan las únicas componentes no nulas de la deformación plástica

$$d\varepsilon^p = \begin{bmatrix} d\varepsilon_{22}^p \\ d\varepsilon_{33}^p \\ d\gamma_{12}^p \end{bmatrix} = \frac{\Phi(Q)dQ}{Q} \begin{bmatrix} b\sigma_{22} \\ f\sigma_{22} \\ 2g\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (24)$$

3.1. Ajuste de la métrica

Los parámetros de la métrica b y g se pueden ajustar a partir de ensayos de tracción uniaxiales en direcciones distintas a las principales. Si se aplica una carga según un eje x que forma un ángulo θ con la dirección de las fibras, es decir, con el eje 1, las tensiones referidas a los ejes principales vendrían dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_x \cos^2 \theta \\ \sigma_{22} &= \sigma_x \sin^2 \theta \\ \sigma_{12} &= -\sigma_x \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (25)$$

Si introducimos estas tensiones en la ecuación (22), tendríamos

$$Q = \sqrt{b(\sigma_x \sin^2 \theta)^2 + 2g(-\sigma_x \cos \theta \sin \theta)^2} = h(\theta) \sigma_x \quad (26)$$

donde

$$h(\theta) = \sqrt{b \sin^4 \theta + 2g \cos^2 \theta \sin^2 \theta}$$

Por otro lado, si se hace un cambio de base del tensor de deformaciones en la dirección opuesta, se tiene la componente de la deformación en la dirección x en función de las deformaciones principales

$$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_{11}^p \cos^2 \theta + d\varepsilon_{22}^p \sin^2 \theta - d\gamma_{12}^p \cos \theta \sin \theta \quad (27)$$

Sustituyendo (24), (25) y (26) en (27), se llega a

$$d\varepsilon_x^p = h(\theta) d\varepsilon^p \quad (28)$$

que para este tipo de ensayo uniaxial, es integrable y se tiene

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{\varepsilon_x^p}{h(\theta)} \quad (29)$$

El ajuste de la métrica se lleva a cabo imponiendo que la relación entre las magnitudes equivalentes es única, es decir, todas las curvas $Q - \bar{\varepsilon}^p$ de los diferentes ensayos deben ser coincidentes.

De esta manera, se han hallado las curvas equivalentes obtenidas en los ensayos 15°, 30°, 45° y 90° en función de b y g y se ha definido la función objetivo como suma de las distancias de cada curva a las demás, que se ha minimizado por fuerza bruta. Como era de esperar, la función objetivo se minimiza para una relación de parámetros $g/b = 1.18$, tal y como se muestra en la Figura 1.

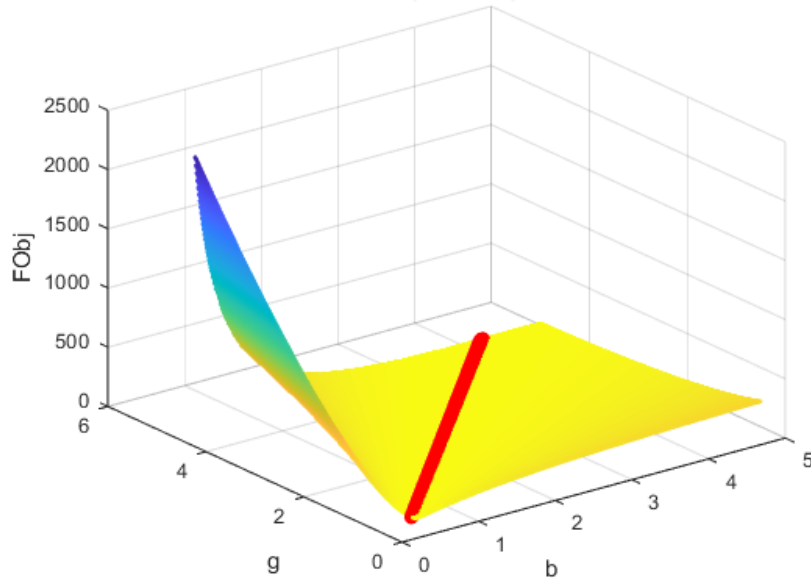


Figura 1: Función objetivo para el cálculo de los parámetros de la métrica b y g .

A la vista de la figura y sin pérdida de generalidad, se definen los parámetros $b = 1$ y $g = 1.18$. La Figura 2 muestra las curvas equivalentes obtenidas con estos parámetros.

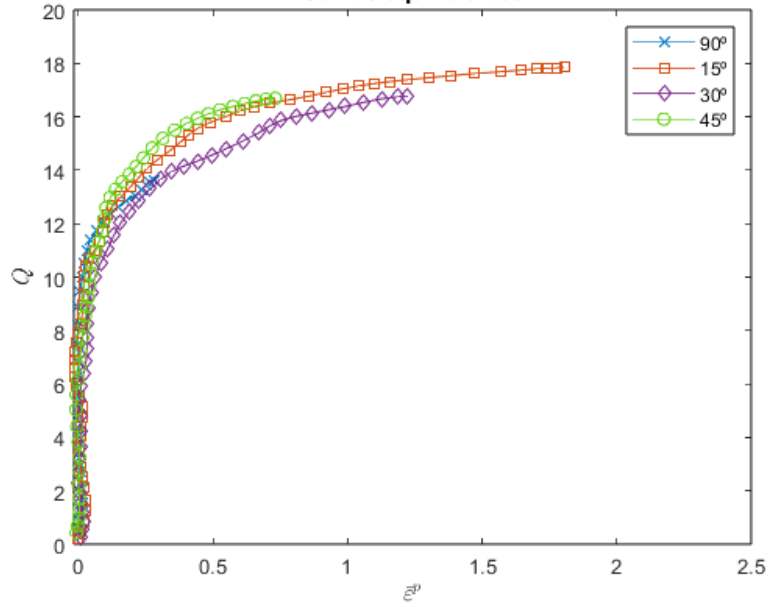


Figura 2: Curvas equivalentes de los ensayos para $b = 1$ y $g = 1.18$.

3.2. Cálculo del módulo de endurecimiento

A la vista de la ecuación (21), el módulo de endurecimiento se puede hallar a partir de la pendiente de la curva $Q - \bar{\varepsilon}^p$

$$\Phi(Q) = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dQ} \quad (30)$$

o, teniendo en cuenta (26) y (28), a partir de la pendiente de cualquiera de los ensayos de tracción uniaxiales como

$$\Phi(Q) = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dQ} = \frac{1}{h^2(\theta)} \frac{d\varepsilon_x^p}{d\sigma_x} \quad (31)$$

En este trabajo se han empleado las curvas equivalentes para su cálculo. Para ello, se ha ajustado una curva de tipo Ramberg-Osgood con los datos de las cuatro curvas mostradas en la Figura 2, de forma que

$$\bar{\varepsilon}^p = A Q^n \quad (32)$$

donde A y n se estiman mediante un ajuste lineal tomando logaritmos en la ecuación (32). Este ajuste se recoge en la Figura 3 y arroja unos valores de $A = 6.05e - 09$ y de $n = 6.7$.

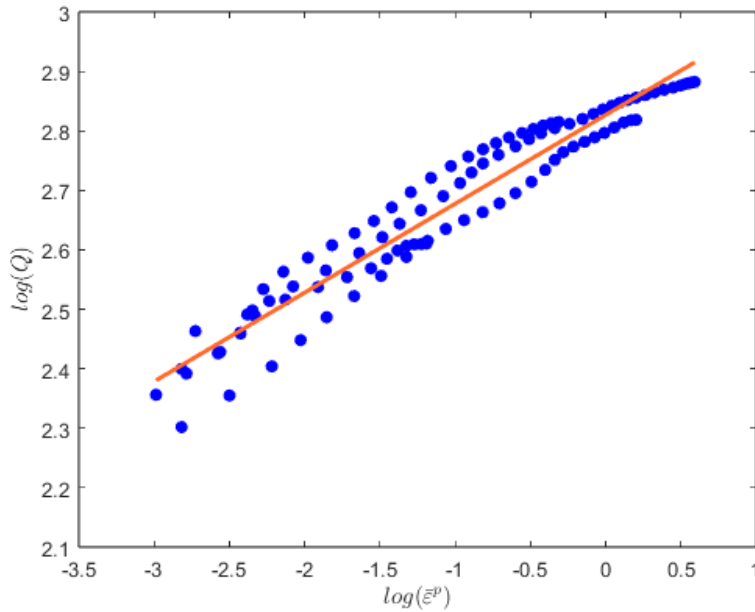


Figura 3: Ajuste de la curva de Ramberg-Osgood (32) .

La gran ventaja de utilizar este tipo de ajuste es que permite obtener una expresión analítica para el coeficiente de endurecimiento $\Phi(Q)$, ya que

$$\Phi(Q) = \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{dQ} = nAQ^{n-1} \quad (33)$$

3.3. Cálculo de las deformaciones

Una vez ajustados los parámetros de la métrica y el módulo de endurecimiento, la ecuación (28) se puede integrar para predecir las curvas tensión-deformación obtenidas en los ensayos de tracción a 15° , 30° , 45° y 90° .

Introduciendo (21) y (33) en (28), se tiene

$$d\varepsilon_x^p = h(\theta) \Phi(Q) dQ = h(\theta) nAQ^{n-1} dQ \quad (34)$$

que integrada y sumada a la deformación elástica, queda

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p = \frac{\sigma_x}{E_x} + Ah(\theta)^{n+1} \sigma_x^n$$

donde E_x es el módulo de elasticidad aparente en la dirección x , que se puede obtener girando apropiadamente el tensor elástico o directamente del ensayo en cuestión.

Las predicciones del modelo para los diferentes casos se muestran en la Figura 4, junto con los datos experimentales.

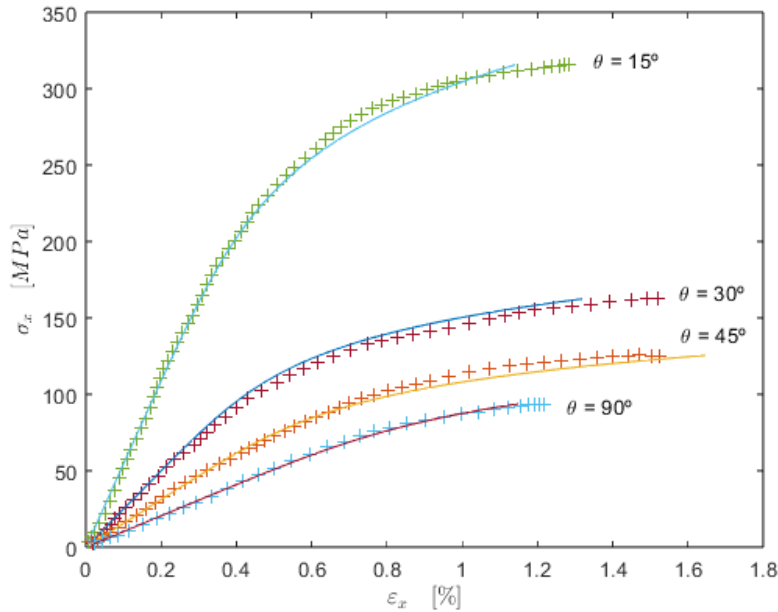


Figura 4: Curvas tensión-deformación longitudinal. Comparación con experimentos.

4. Discusión

El criterio de plasticidad planteado en este trabajo ha sido empleado en la predicción del comportamiento de metales bajo cargas multiaxiales proporcionales y no proporcionales satisfactoriamente. Para materiales metálicos es apropiado incluir la hipótesis de que las cargas hidrostáticas no producen deformación plástica. El criterio clásico de Hill para metales ortótropos también asume esta hipótesis.

En otros materiales como los composites de matriz polimérica, esta suposición no es adecuada y, sin embargo, muchos de los criterios disponibles en la literatura se basan en el criterio clásico de Hill [13, 25]. Estos criterios basados en la plasticidad ortótropa de Hill suelen introducir la dependencia de la presión mediante un término de tipo Druker-Prager.

Por otro lado, algunos autores han señalado que el empleo de reglas de flujo asociativas no es apropiado para estos criterios de tipo Druker-Prager porque no son capaces de predecir correctamente el comportamiento bajo estados de carga tangenciales [25].

Aunque algunos autores han generalizado esta conclusión a todas las reglas de flujo asociativas, habría que preguntarse si esta deficiencia encontrada no es debida a la imposición de independencia de las tensiones hidrostáticas del criterio de Hill, como también señalan otros estudios [21].

Los resultados obtenidos con el criterio aquí propuesto son similares a los obtenidos por los autores del estudio experimental utilizado, si bien podrían mejorarse significativamente si en lugar de emplear una ecuación de tipo Ramberg-Osgood para el ajuste de la relación $Q - \bar{\epsilon}^p$, se hubiera empleado un método de derivación numérica que proporcionara un mejor ajuste al comienzo y al final de la curva.

Aunque la generalización a estados de carga más complejos es el siguiente paso obligado en el desarrollo del modelo, la metodología aquí planteada permite su empleo en el amplio abanico de problemas bajo estado de cargas de tensión plana.

5. Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo de plasticidad para materiales ortótropos basado en la idea de que la plastificación se produce cuando la distancia entre el espacio de tensiones supera un valor umbral. Esta distancia se mide con una métrica que, para estados de carga de tensión plana, depende exclusivamente de un parámetro.

La evolución de las deformaciones plásticas se calcula fácilmente mediante el ajuste experimental de la curva tensión-deformación equivalentes.

El modelo se ha empleado para la simulación de varios ensayos realizados en probetas de fibra unidireccional de grafito en matriz termoplástica, AS4/APC-2, cortados con diferentes orientaciones. El modelo recoge adecuadamente la evolución de las deformaciones en los diferentes ensayos de tracción.

6. Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Unión Europea y al gobierno español por su apoyo económico mediante el proyecto PID2020-117407GB-I00 (FEDER/Ministerio de Ciencia e Innovación - Agencia Estatal de Investigación).

7. Referencias

- [1] Navarro A., Madrigal C., “Ecuaciones de flujo plástico para el Método de las Deformaciones Locales con carga multiaxial”, *Anales de Mecánica de la Fractura* **26-II**, 417-423 (2009)
- [2] Madrigal C., Navarro A., Chaves V., “Biaxial cyclic plasticity experiments and application of a constitutive model for cyclically stable material behaviour”, *International Journal of Fatigue* **83**, 240-252 (2016)
- [3] Madrigal C., Navarro A., Chaves V., “Numerical implementation of a multiaxial cyclic plasticity model for the Local Strain Method in low cycle fatigue”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* **80**, 111-119 (2015)
- [4] Madrigal C., Navarro A., Vallengano C., “Plasticity theory for the multiaxial Local Strain-Life Method”, *International Journal of Fatigue* **100**, 575-582 (2017)
- [5] Sun C. T., Yoon K. J., “Characterization of elastic-plastic properties of AS4/APC-2 thermoplastic composite”, NASA Langley Research Center (1988)
- [6] Vogler T. J., Kyriakides S., “Inelastic behavior of an AS4/PEEK composite under combined transverse compression and shear. Part I: experiments”, *International Journal of Plasticity* **15**, 783-806 (1999)
- [7] Yokozeki T., Ogihara S., Yoshida S., Ogasawara T., “Simple constitutive model for nonlinear response of fiber-reinforced composites with loading-directional dependence”, *Composites Science and Technology* **67**, 111-118 (2007)
- [8] Sun C. T., Chen J. L., “A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites”, *Composites Science and Technology* **40**, 115-129 (1991)
- [9] Hsu S. Y., Vogler T. J., Kyriakides S., “Inelastic behavior of an AS4/PEEK composite under combined transverse compression and shear,” *International Journal of Plasticity* **15**, 807-836 (1999)
- [10] Melro A. R., Camanho P. P., Andrade Pires F. M., Pinho S. T., “Micromechanical analysis of polymer composites reinforced by unidirectional fibres: Part I – Constitutive modelling”, *International Journal of Solids and Structures* **50**, 1897-1905 (2013)
- [11] Sun C. T., Chen J. L., “A simple flow rule for characterizing nonlinear behavior of fiber composites”, *Journal of Composite Materials* **23**, 1009-1020 (1989)
- [12] Chen J. L., Sun C. T., “A plastic potential function suitable for anisotropic fiber composites”, *Journal of Composites Materials* **27**, 1379-1390 (1993)

- [13] Xie M., Adams D. F., “A plasticity model for unidirectional composite materials and its applications in modeling composites testing”, *Composites Science and Technology*, **54**, 11-21 (1995)
- [14] Vyas G. M., Pinho S. T., Robinson P., “Constitutive modelling of fibre-reinforced composites with unidirectional plies using a plasticity-based approach”, *Composites Science and Technology* **71**, 1068-1074 (2011)
- [15] Vogler M., Rolfes R., Camanho P. P., “Modeling the inelastic deformation and fracture of polymer composites – Part I: Plasticity model”, *Mechanics of Materials* **59**, 50-64 (2013)
- [16] Nagaraja S. G., Pletz M., Schuecker C., “Constitutive modeling of anisotropic plasticity with application to fiber-reinforced composites”, *International Journal of Solids and Structures* **180-181**, 84-96 (2019)
- [17] Ward I. M., *Mechanical properties of solid polymers*, John Wiley and Sons (1983)
- [18] Goldberg R. K., Roberts G. D., Gilat A., “Incorporation of mean stress effects into the micromechanical analysis of the high strain rate response of polymer matrix composites”, *Composites: Part B* **34**, 151-165 (2003)
- [19] Goldberg R. K., Roberts G. D., Gilat A., “Implementation of an associative flow rule including hydrostatic stress effects into the high strain rate deformation analysis of polymer matrix composites”, NASA Glenn Research Center (2003)
- [20] Goldberg R. K., Carney K. S., Bois P. D., Hoffarth C., Harrington J., Rajan S., Blankenhorn G., “Theoretical development of an orthotropic elasto-plastic generalized composite material model”, 13th International LS-DYNA Users Conference (2014)
- [21] Nagaraja S. G., Antretter T., Schuecker C., “On the effect of isotropic and anisotropic dissipative response functions with associated and nonassociated flow on the inelastic behavior of polymeric composites”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures* **1-17** (2025)
- [22] Madrigal C., Navarro A., “Distancia en el espacio de tensiones y criterios de plastificación”, *Anales de Mecánica de la Fractura* **28-II**, 571-576 (2011)
- [23] Gurtin M. E., *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press, INC (1981)
- [24] Sokolnikoff I. S., *Mathematical theory of elasticity*, McGraw-Hill (1956)
- [25] Laux T., Gan K. W., Dulieu-Barton J. M., Thomsen O. T., “A simple nonlinear constitutive model based on non-associative plasticity for UD composites: Development and calibration using a Modified Arcan Fixture”, *International Journal of Solids and Structures* **162**, 135-147 (2019)