



# Desarrollo de un gemelo digital para docencia en asignaturas de ingeniería mecánica

J.-A. Almazán-Lázaro<sup>1</sup>, J. Liébana-Cruz<sup>1</sup>, E. López-Alba<sup>1</sup>, F.A. Díaz-Garrido<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera. Universidad de Jaén.

[jalmazan@ujaen.es](mailto:jalmazan@ujaen.es), [jlc00048@red.ujaen.es](mailto:jlc00048@red.ujaen.es), [elalba@ujaen.es](mailto:elalba@ujaen.es), [fdiaz@ujaen.es](mailto:fdiaz@ujaen.es)

---

*La representación virtual de sistemas industriales mediante gemelos digitales está siendo implementada en la actualidad a la mayoría de los sistemas industriales y productivos. Permite, mediante la sensorización adecuada, conocer el estado y evolución de un sistema digitalizado. A su vez, se manifiesta la necesidad de implantarlo en los entornos educativos, especialmente en el nivel universitario.*

*Este trabajo presenta una forma novedosa de abordar contenidos de distintas asignaturas de ingeniería mecánica mediante el desarrollo de gemelos digitales, y en concreto, el de una estructura. El presente trabajo se basa en una estructura física sensorizada a la que se le aplican cargas y, en tiempo real se reproduce su estado de tensional y de deformación numéricas. Un sensor de fuerza y un sistema de visión artificial permiten conocer el estado de carga y la deflexión del sistema real. Mediante un modelo computacional que reproduce el mismo sistema mecánico, y alimentado por la lectura de los sensores, se puede realizar la simulación en tiempo real del sistema, conociendo así su estado tensional instantáneo durante la aplicación de carga. Asimismo, se puede predecir si la estructura está cerca de sus límites de carga.*

*Los resultados han mostrado la validez del gemelo digital desarrollado, que, mediante el uso de sensores de distinta naturaleza se ha obtenido la respuesta de la estructura en tiempo real. Su implantación en distintas asignaturas de ingeniería mecánica. Su implementación en docencia de asignaturas de ingeniería mecánica permitirá al estudiante abordar los conceptos de manera novedosa, como una herramienta versátil con potencial aplicación a sistemas mecánicos de mayor complejidad.*

---

## 1. Introducción

Un gemelo digital, o *digital twin*, es una representación virtual de un sistema, proceso o producto físico que permite simular, monitorear y analizar su comportamiento en tiempo real. A través de la conexión entre el modelo físico y el digital, tales modelos virtuales proporcionan una visión precisa de las condiciones actuales, el rendimiento y anticipar posibles fallos de un sistema. Esta tecnología ha revolucionado diversos sectores industriales, permitiendo optimizar procesos, reducir costos y predecir el comportamiento de sistemas complejos en tiempo real (Grieves Michaeland Vickers, 2017; Li et al., 2022).

Su uso se ha extendido en la actualidad a multitud de sectores (Yang et al., 2021), como el de la ingeniería civil y construcción (Dang et al., 2022; Torzoni et al., 2024a, 2024b), marino (Liu et al., 2020), energético (Deon et al., 2022), aeronáutica (Xiong & Wang, 2022), fabricación (Grieves, 2023; Soori et al., 2023), analizando principalmente parámetros estructurales y térmicos.

Su vinculación con las simulaciones numéricas aumenta el potencial de estos modelos para predecir comportamientos en función de las condiciones de contorno en tiempo real. Permiten modelar y analizar de manera detallada cómo un objeto o sistema responde a fuerzas, temperaturas u otros factores físicos. A través de las simulaciones por el método de elementos finitos (MEF), se pueden obtener representaciones precisas del comportamiento estructural, térmico o dinámico de un sistema, lo que resulta esencial para construir gemelos digitales realistas y funcionales. Las simulaciones por elementos finitos ofrecen una herramienta versátil para predecir el rendimiento y la vida útil de los sistemas, integrándose perfectamente en el ciclo de vida del gemelo digital (Belytschko et al., 2009; Bhat et al., 2021). La combinación de gemelos digitales con simulaciones por elementos finitos proporciona una base sólida para la innovación y mejora continua en la ingeniería industrial.

Desde la docencia universitaria, los gemelos digitales y las simulaciones por elementos finitos abren nuevas posibilidades de aprendizaje y aplicación en ingeniería. Los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar con herramientas avanzadas de simulación y modelado, lo que les permite comprender de manera más profunda los principios fundamentales de distintas disciplinas, como la ingeniería mecánica. Adicionalmente, fomenta la colaboración interdisciplinaria, ya que las simulaciones y los gemelos digitales pueden abarcar diversos campos, como la mecánica, la electrónica y la programación (Liljaniemi & Paavilainen, 2020). Otros autores han desarrollado modelos de gemelo digital en el ámbito docente en distintas temáticas como la robótica (Screpanti et al., 2022), arquitectura (Zhang et al., 2024), el diseño y el prototipado (Nikolaev et al., 2018). En concreto, como ocurre con el modelo desarrollado en este trabajo, su aplicación puede enfocarse a asignaturas de diseño de elementos mecánicos, mecánica estructural y cálculo por métodos numéricos. Así, el estudiante podrá abordar parte del contenido de tales asignaturas de una forma novedosa y atractiva, con las que podrá deducir potenciales aplicaciones futuras en su desarrollo profesional.

Así, la integración de gemelos digitales y simulaciones por elementos finitos ofrece una excelente oportunidad para abordar parte de la enseñanza de la ingeniería, como fundamento para la resolución de problemas complejos en la industria. Con su capacidad para ofrecer una comprensión más profunda de los sistemas y procesos, estas herramientas seguirán siendo fundamentales en el futuro de multitud de disciplinas, y especialmente la ingeniería. En este trabajo se pretende mostrar, de forma sencilla cómo distintos sensores se pueden integrar en una estructura física sencilla, de manera que se obtienen datos en tiempo real de la misma en función de las condiciones de contorno aplicadas. Sensores eléctricos y ópticos son empleados para leer y monitorizar su estado, mientras que distintos modelos numéricos de diversa complejidad alimentados por las condiciones de carga reproducen el modelo físico de manera precisa, pudiendo así monitorizar o detectar fallos.

## 2. Fundamentos teóricos

A continuación, se describen los fundamentos teóricos que sustentan la construcción del gemelo digital expuesto en este trabajo, una viga en voladizo, comenzando por la descripción analítica de la misma y posteriormente su implementación en modelos de elementos finitos.

### 2.1. Modelo de la Viga en Voladizo

La viga en voladizo supone un ejemplo didáctico excelente para mostrar los fundamentos tras el modelo digital desarrollado, siendo comúnmente empleada en una variedad de aplicaciones ingenieriles. Su comportamiento de una viga en voladizo está determinado por su rigidez, material, longitud, carga aplicada y condiciones de frontera. La ecuación diferencial que describe el comportamiento de la viga en voladizo bajo una carga concentrada  $F$  en el extremo libre viene dada por la ecuación 1:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 y(x)}{dx^4} = 0 \quad (1)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material de la viga,  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga,  $y(x)$  es el desplazamiento transversal de la viga,  $x$  es la posición a lo largo de la viga. Asumiendo

pequeñas deformaciones, la deflexión viene dada por de la integración de la ecuación 1 con las correspondientes condiciones de contorno, según la ecuación 2:

$$y(x) = \frac{P \cdot x^2}{E \cdot I} (3L - x) \quad (2)$$

Donde  $P$  es la carga puntual aplicada en el extremo libre de la viga,  $L$  es la longitud total de la viga,  $x$  es la distancia medida desde el extremo fijo de la viga (por lo que  $0 \leq x \leq L$ ).

La distribución de momentos flectores  $M(x)$  y cortantes  $V(x)$  viene expresada por la ecuación 3 y ecuación 4.

$$M(x) = -F \cdot (L - x) \quad (3)$$

$$V(x) = -F \quad (4)$$

La tensión máxima, ubicada en el punto de empotramiento, viene dada según la ecuación 5.

$$\sigma_{max} = \frac{F \cdot L}{I} \cdot \frac{h}{2} \quad (5)$$

Donde  $h$  es la altura del perfil. Las reacciones en el empotramiento pueden calcularse a partir de la fuerza aplicada  $F$ , según la ecuación 6 y ecuación 7:

$$M = -F \cdot L \quad (6)$$

$$R_{vertical} = -F \quad (7)$$

## 2.2. Método de elementos finitos

La simulación por el método de elementos finitos (FEM) permite crear un modelo numérico detallado de la viga., una vez ésta es discretizada utilizando un determinado número y tipo de elementos. El cálculo de una estructura por elementos finitos requiere de la definición de las condiciones de contorno del problema. En concreto, en una viga en voladizo con carga puntual se debe especificar la condición de fijación y la carga aplicada en su extremo. Cuando se realiza el cálculo, para un determinado nivel de carga, se obtienen los correspondientes resultados de desplazamientos, deformaciones y estado tensional, entre otros, a partir de la resolución de la ecuación 8, en la que  $\bar{K}$  describe la rigidez del sistema,  $\bar{u}$  el campo de desplazamientos de los nodos, y  $\bar{F}$  las fuerzas nodales aplicadas.

$$\bar{K} \cdot \bar{u} = \bar{F} \quad (8)$$

## 2.3. Modelo físico y sensorización

Dado que al llevar a cabo una simulación numérica se requiere conocer el estado de carga, la creación de un gemelo digital requiere la integración de los valores de carga recogidos por los sensores y trasladarlos en tiempo real al algoritmo de resolución. En este trabajo se utiliza un sensor de fuerza resistivo integrado en el extremo libre de la viga, que, junto a un sistema de adquisición de datos, permite obtener los datos de fuerza aplicada en tiempo real. En concreto, el sensor utilizado se basa en dos láminas conductoras separadas por un material piezorresistivo, de manera que su resistencia se reduce a medida que se aplica presión entre las láminas. Suelen mostrar un comportamiento lineal en escala doble logarítmica, que será definido en adelante en este trabajo.

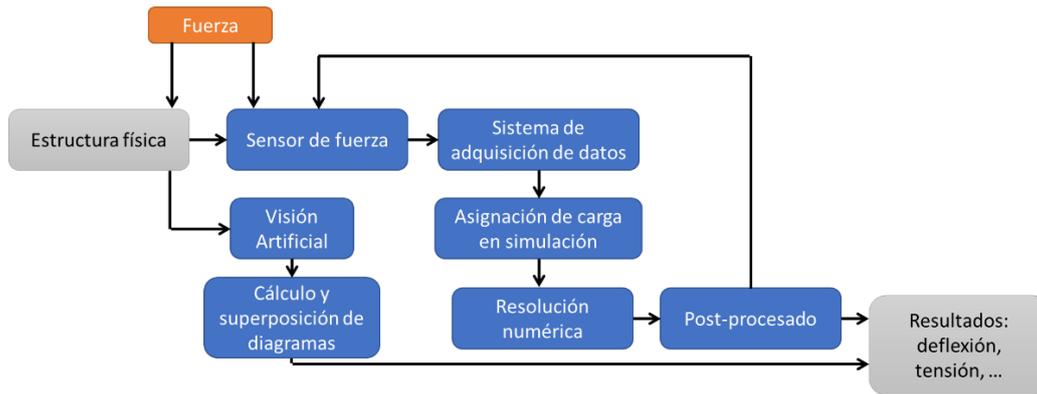
Por otro lado, para determinar el estado de deflexión de la viga analizada se utilizará una cámara junto a un algoritmo de procesamiento de imágenes, para identificar en tiempo real la posición de cada uno de los puntos de la viga. De esta forma se podrán comparar los resultados numéricos con los que ocurren realmente en el modelo físico, verificando así que las cargas aplicadas y los modelos numéricos reproducen fielmente la realidad.

Los datos recopilados por estos sensores, integrados todos en un algoritmo cíclico, se envían a un sistema de procesamiento, que los utiliza para el cálculo numérico y compara ambos resultados, de forma que el gemelo digital reproduzca la estructura en tiempo real. Esto permite la monitorización continua del comportamiento de la viga y la predicción de su rendimiento futuro.

## 3. Metodología

Para abordar la implementación práctica del problema, se parte de la estructura física, a la que se incorporan los sensores descritos. En este trabajo se ha incorporado un sensor de fuerza en el extremo de la viga. Un sistema de adquisición lee el valor de tal sensor, típicamente como valor de resistencia para lo cual se acondiciona previamente la señal y poder así medirla como diferencia de potencial. A continuación, tal valor se lee por el software de simulación, el cual previamente se habrá diseñado para que tal valor lo tome como una entrada al problema. Una vez leído el valor, se resuelve la simulación numérica, que en este caso será un problema estructural. Por último, se monitorizan los resultados tales como la tensión máxima o la deflexión, y se muestran los mismos en tiempo real, permitiendo además generar alarmas si las condiciones de carga se acercan a los límites previamente previstos para la estructura. Por otra parte, un sistema de visión artificial permite visualizar la

deformada del modelo físico en tiempo real, así como calcular y dibujar los diagramas de esfuerzos. El proceso es ilustrado en el esquema de la Figura 1.



**Figura 1:** Esquema del proceso de adquisición de datos y simulación mediante Matlab.

### 3.1. Implementación en docencia

Este gemelo digital tiene como principal objetivo ser de utilidad en el ámbito académico universitario, orientado a su implementación en asignaturas de Mecánica de Estructuras y Análisis por Elementos Finitos tanto en niveles de grado como de máster. La propuesta permite a los estudiantes visualizar en tiempo real la respuesta estructural de una viga sometida a diferentes condiciones de carga, comparando simultáneamente los datos experimentales con los resultados de simulación numérica y teóricos. Esta comparación facilita una comprensión más profunda de los conceptos base de la materia como la rigidez, la deformación, tensiones mecánicas y su relación con las propiedades geométricas, como la inercia, y del material.

Durante su desarrollo, principalmente práctico, los estudiantes pueden interactuar con el modelo físico y digital, modificar sus parámetros y observar el impacto en el comportamiento estructural, promoviendo el aprendizaje activo y el desarrollo de pensamiento crítico. Además, el entorno permite reforzar habilidades en adquisición de datos, interpretación de resultados y uso de herramientas de simulación, todo dentro de un contexto controlado pero realista. De esta forma, el gemelo digital no solo actúa como un recurso tecnológico, sino como un instrumento pedagógico que conecta teoría y práctica de forma dinámica y accesible.

Las actividades pueden ser llevadas a cabo por grupos de 3-4 estudiantes. A cada grupo se asignarán geometrías y condiciones de contorno diferentes, de forma que se cuente con una variedad de modelos y resultados que puedan ser finalmente comparados para obtener conclusiones. Las diferentes etapas y contenidos de la implementación del proyecto son las descritas en la Tabla 1.

**Tabla 1:** Etapas en la implementación del proyecto.

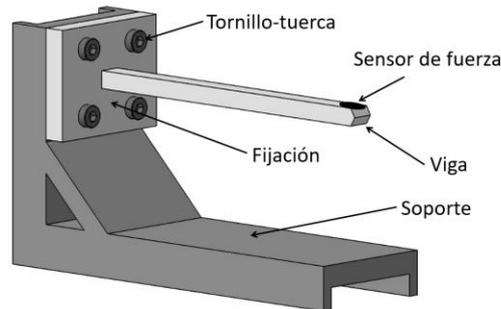
Sesión	Título	Contenido
<b>Sesión 1</b> (2h)	Planificación del proyecto fundamentos teóricos	Descripción general del proyecto y planificación.
		Descripción teórica del modelo de viga analizado.
		Implementación de ecuaciones en Matlab.
<b>Sesión 2</b> (2h)	Modelado FEM en Matlab.	Implementación de ecuaciones expuestas en clases teóricas
		Diseño CAD (software comercial Catia / SolidWorks)
<b>Sesión 3</b> (2h)	Modelado FEM en Abaqus y parametrización	Fabricación de prototipos.
		Desarrollo de código Matlab para parametrización de Abaqus.
<b>Sesión 4</b> (2h)	Sistema de adquisición de datos y sistema de visión por computador.	Vinculación Arduino y Matlab.
		Instalación de sensores de fuerza y acondicionador de señal.
		Descripción del sistema de visión por computador.
<b>Sesión 5</b> (2h)	Implementación global	Compilación global del sistema
		Análisis de funcionalidad
		Análisis de resultados y comparación con otras geometrías y materiales.

A través de su uso, los estudiantes podrán comprender de forma visual y práctica el comportamiento estructural de una viga sometida a distintas condiciones de carga. La posibilidad de comparar en tiempo real los resultados experimentales con los obtenidos por simulación numérica les permitirá reforzar la validación de modelos y la interpretación de datos. Además, al interactuar con el entorno digital, podrán modificar parámetros del modelo y

observar su impacto en la respuesta estructural, desarrollando así habilidades de análisis, pensamiento crítico y toma de decisiones. Este enfoque también promueve el aprendizaje activo y el desarrollo de competencias digitales mediante el uso de herramientas de simulación avanzadas, conectando de manera directa la teoría con la práctica en un contexto accesible y dinámico.

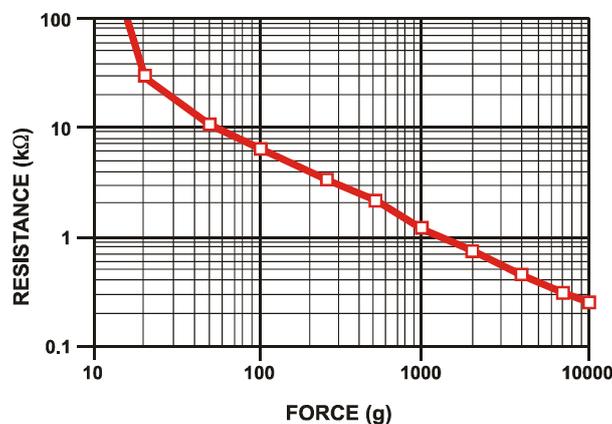
### 3.2. Modelo físico

El modelo físico creado se basa en una viga en voladizo, empotrada sobre una estructura soporte. La viga tiene una sección rectangular de 10 x 5 mm, y una longitud de 150 mm, fabricada con PLA mediante impresión 3D (Smart Materials 3D) con relleno 100%. La viga se ensambla con el soporte por un conjunto de 4 tornillos M4. En su extremo, un alojamiento permite la colocación del sensor de fuerza, según se muestra en la descripción geométrica de la Figura 2.



**Figura 2:** Modelo geométrico de la viga en voladizo, soportes y sensorización.

El sensor de fuerza utilizado es un sensor de tipo resistivo (FSR 400 Series, Interlink Electronics) con una superficie de contacto circular de 8 mm de diámetro y 1 mm de espesor. El sensor varía su resistencia en función de la presión aplicada. En sus extremos, dos terminales permiten soldarlo y conectarlo al sistema de adquisición de datos. La aplicación de fuerza se realiza mediante una barra circular rígida de diámetro 8 mm con una lámina de caucho en su extremo, coincidiendo en su forma con la forma circular del sensor. De esta forma se garantiza que la aplicación de fuerza sea uniforme en la superficie del sensor. La curva de resistencia – fuerza dada por el fabricante es la mostrada en la Figura 3. Tales datos han sido incluidos en el sistema de procesamiento de datos, de forma que, para cada valor de resistencia medido, se conozca con precisión la fuerza correspondiente.



**Figura 3:** Relación de resistencia – fuerza del sensor utilizado.

El valor de fuerza en función de la resistencia se ha modelado según la Ec.8, donde  $F$  es la fuerza aplicada y  $R_s$  es el valor de resistencia del sensor correspondiente a tal valor de fuerza.

$$F = 10^{\left(\frac{\log(10^4) - \log(20)}{\log(30) - \log(0.25)}\right) \cdot (\log(R_s) - \log(30)) + \log(20)} \quad (9)$$

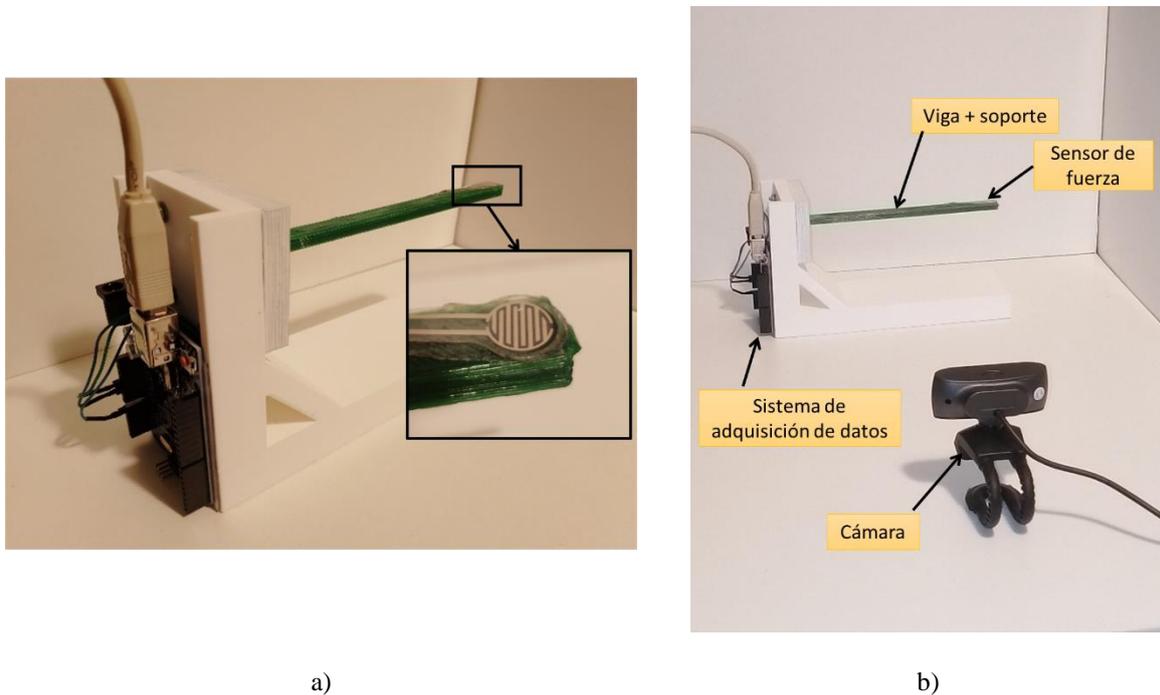
El sistema de adquisición de datos está basado en Arduino UNO. Este sistema, vinculado con Matlab, ha sido utilizado en demostradores y experimentos en tiempo real por distintos investigadores y docentes (Kosim et al., 2022; Mohd Bakri et al., 2015; Raffi et al., n.d.; Takács et al., 2023). Se ha utilizado un divisor de tensión, de forma que la resistencia del sensor pueda ser leída como una diferencia de potencial por el sistema de adquisición.

Mediante el divisor de tensión utilizado, la relación entre voltaje y resistencia del sensor viene dada por la ecuación 10.

$$R_s = \frac{V_{cc} - V_{out}}{V_{out}} \quad (10)$$

Donde  $V_{out}$  es la lectura de tensión del sistema de adquisición de datos,  $V_{cc}$  es la tensión de alimentación, de 5V.

El montaje experimental es el mostrado en la Figura 4, donde en la Figura 4a se observa un detalle del sensor de fuerza, y en la Figura 4b el conjunto de la viga, el sistema de adquisición y la cámara.



**Figura 4:** Detalle del sensor (a), y montaje experimental completo (b).

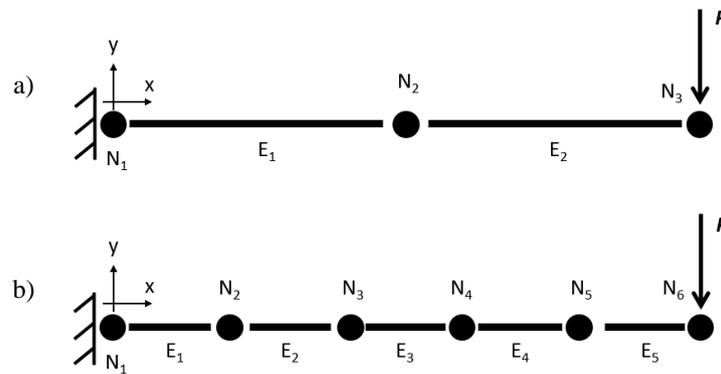
### 3.3. Modelo analítico

Distintos modelos numéricos han sido implementados para el cálculo de desplazamientos en el modelo de viga en función de la carga leída por el sensor. Se utiliza en primer lugar la definición analítica de la curva elástica para obtener el desplazamiento máximo del extremo libre, además de un modelo 2D y otro 3D desarrollado en códigos comerciales.

El modelo analítico ha sido incluido en el análisis utilizando la ecuación 2 evaluada en  $x=L$ , obteniendo el desplazamiento del extremo libre, parametrizando el valor de la carga aplicada. El valor de la carga aplicada es el correspondiente al leído por el sensor del modelo físico. Los valores geométricos y de material son los correspondientes al modelo físico.

### 3.4. Modelos FEM 1D

Dos modelos unidimensionales han sido implementados en Matlab utilizando elemento viga [14] con dos tamaños de malla diferentes. Inicialmente se ha creado la geometría del modelo, como una línea de longitud 150 mm. Un primer modelo se ha discretizado con dos elementos (Figura 5a), mientras que el segundo modelo utiliza cinco elementos tipo viga (Figura 5b). Apoyado en la teoría del Método de Elementos Finitos, se ha calculado la matriz de rigidez  $K_e$  de cada uno de los elementos, según la ecuación 11. Posteriormente, se ensamblan las matrices de rigidez de todos los elementos del modelo, teniendo en cuenta el vínculo entre nodos, y obteniendo la matriz de rigidez global del modelo,  $K$ , descrita en la ecuación 8.



**Figura 5:** Modelo 2D de elemento viga, utilizando 2 elementos (a) y 5 elementos (b).

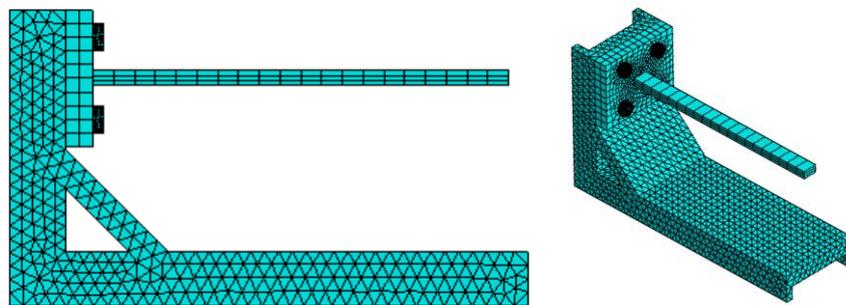
$$K_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Las condiciones de contorno definen desplazamiento y giro nulos en el nodo de empotramiento, y una fuerza puntual aplicada en dirección descendente en el extremo libre. La resolución de la ecuación 8 permite obtener el campo de desplazamientos y giros en cada uno de los nodos, permitiendo representar la deformada de la viga.

### 3.5. Modelos FEM 3D (Abaqus)

El potencial de los gemelos digitales se manifiesta en su totalidad cuando pueden resolverse problemas de elevada complejidad. Así, se ha optado por la implementación del modelo numérico del conjunto de la viga con mayor detalle en el software comercial Abaqus, software ampliamente utilizado en la industria. Se amplían de esta forma los horizontes del método permitiendo calcular no sólo geometrías sencillas, como el mostrado en el punto anterior, sino también en estructuras de alta complejidad.

El modelo implementado en Abaqus ha sido creado con elementos tetraédricos lineales de 4 nodos C3D4, tanto en los elementos de fijación, como la estructura soporte. La viga en voladizo ha sido modelada utilizando elementos hexaédricos lineales de 8 nodos C3D8, incluyendo tres elementos en el espesor de la viga. En total, el modelo tiene 132688 elementos, de los cuales 168 pertenecen a la viga. Se remarca aquí la diferencia entre los modelos desarrollados con elemento viga en Matlab, y el desarrollado con elemento hexaédrico en Abaqus, resultando este último más preciso.

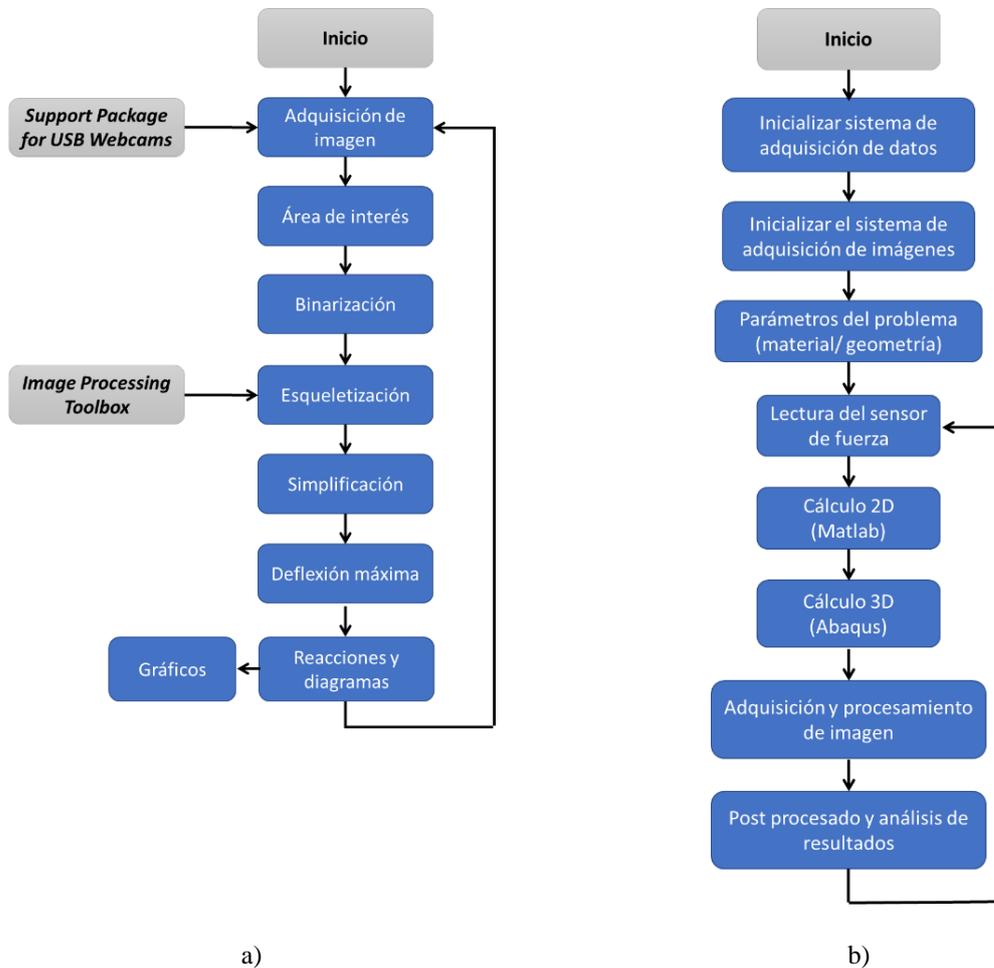


**Figura 6:** Modelo de simulación en Abaqus en 3D.

Tras la creación del modelo utilizando el preprocesador Abaqus CAE, se ha implementado un algoritmo en Matlab que permite modificar en tiempo real el archivo de entrada de Abaqus (.inp) de forma que el valor de la carga de la simulación corresponda con el valor medido por el sensor en el modelo físico. A continuación, el mismo algoritmo inicia el *solver* de Abaqus, y se devuelve el archivo de resultados. Tal archivo de resultados es leído y se obtienen los resultados de los desplazamientos de la viga, permitiendo graficarlos junto a los valores numéricos del punto 3.2.

### 3.6. Visión artificial

Para analizar la viga física en tiempo real y poder calcular la elástica se ha implementado un sistema de visión artificial basado en una cámara de bajo coste Trust Trino HD (Trust International B.V), de 1280 x 720 píxeles y 30 fps. El procesado se ha realizado mediante el paquete *Support Package for USB Webcams*, así como el *Image Processing Toolbox*. El primero permite la adquisición de imágenes a partir de una amplia variedad de cámaras, mientras que el segundo proporciona un amplio conjunto de algoritmos y modelos para el procesamiento de imágenes, su análisis, y la visualización. El diagrama de flujo seguido es el mostrado en la Figura 7a.



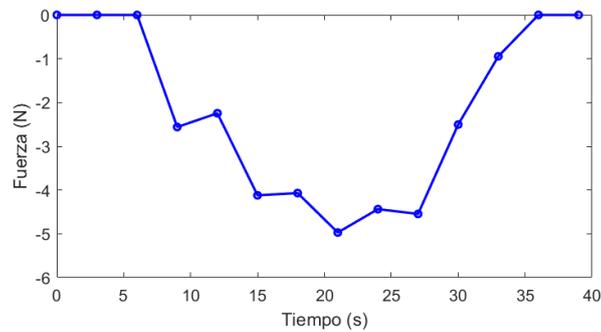
**Figura 7:** Diagrama de flujo del procesamiento y análisis de imágenes (a) y diagrama de flujo de la implementación completa (b).

Tras la adquisición de imagen RGB, se selecciona el área de interés a analizar, la cual se sitúa en un rectángulo de 600x200 píxeles, región que contiene a la viga en todas sus posiciones deformadas esperadas, y que será utilizada para la posterior detección de la curva elástica, reduciendo así el costo computacional del análisis. Posteriormente, se binariza, utilizando para ello un umbral, variable en función de las condiciones externas de luz. A continuación, utilizando *Image Processing Toolbox*, se realiza la esqueletización de la imagen, que obtiene de un patrón continuo con la menor cantidad de datos posible que contenga el rastro del objeto original, que en la viga representa, una vez simplificada, la fibra neutra de la misma, de forma que pueda ser comparada con los métodos numéricos.

Todos los modelos descritos en los puntos anteriores, junto a los resultados de visión artificial han sido integrados en un algoritmo único que repetidamente realiza los cálculos correspondientes a todos ellos. Dado que el tiempo de ejecución del software comercial para el modelo 3D es de aproximadamente 2 segundos, y el tiempo de adquisición y procesamiento de imagen de aproximadamente 1 segundo, se ha tomado un tiempo de ciclo de 3 segundos. La secuencia de cálculo general se esquematiza en la Figura 7b.

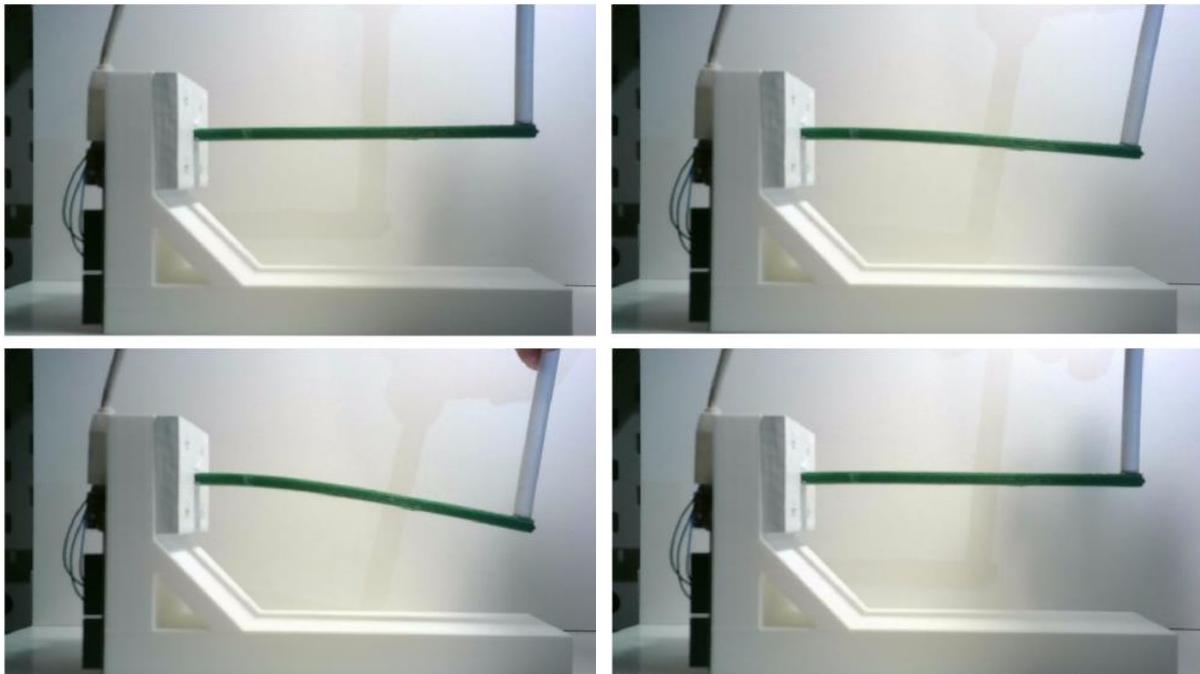
## 4. Resultados y Discusión

En primer lugar, como entrada del algoritmo, se muestra la evolución temporal de la fuerza aplicada de forma manual sobre la estructura física, en la que se ha tratado de reproducir una situación de descarga, un aumento de carga hasta un cierto valor máximo, y de nuevo situación de descarga.



**Figura 8:** Evolución de la fuerza aplicada de forma manual frente al tiempo.

Para la evaluación de la estructura en una variedad de situaciones de carga, se han aplicado secuencialmente las cargas mostradas en la Figura 8 en función del tiempo. En la Figura 9 se muestran las imágenes correspondientes a la aplicación de 4 cargas diferentes escogidas de entre los valores de la Figura 8. Estos cuatro instantes serán tomados como referencia para el análisis de resultados, teniendo en cuenta que el proceso tuvo lugar de forma continuada y repetida cada 3 segundos.



**Figura 9:** Secuencia de carga y descarga del prototipo.

Los resultados del cálculo numérico del modelo 2D son mostrados en la Figura 10. En orden creciente de a) a d) se muestra una secuencia de carga y posterior descarga de la viga. Se han superpuesto los resultados del modelo de 2 y 5 elementos, junto a la posición de la viga sin deformar. En el caso de carga nula (Figura 10a, y Figura 10d), los tres coinciden con la viga descargada. La Figura 10b y Figura 10c muestra los instantes de carga de 2.56 N y 4.97 N, respectivamente. En ambos casos, los resultados son muy similares, con desviaciones inferiores al 5%.

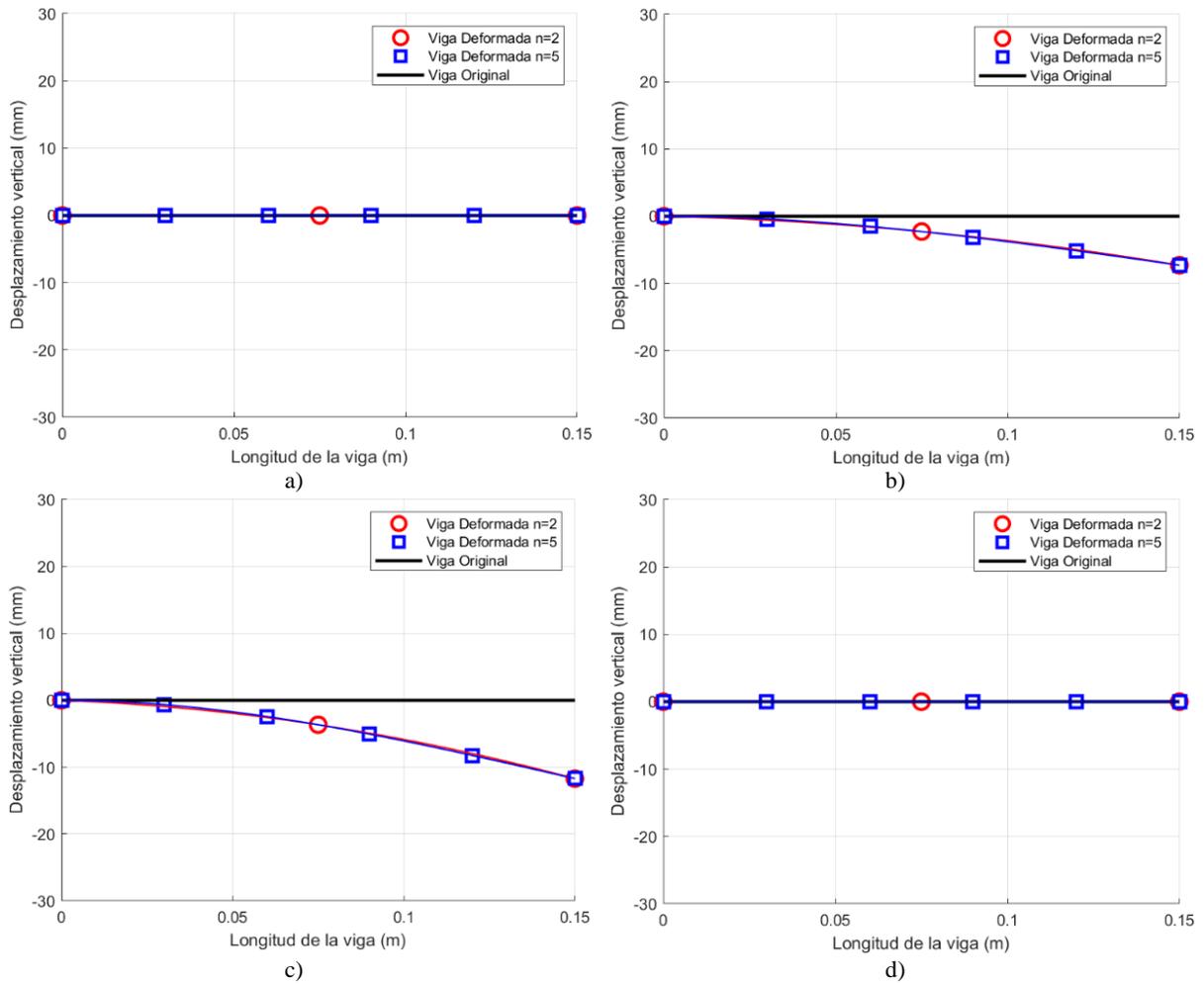


Figura 10: Secuencia de carga y descarga. Carga nula (a), 6.7 N (b), 12.5 N (c) y carga nula (d).

Durante el análisis por visión artificial, el algoritmo desarrollado procesó las imágenes mostradas en la Figura 9, comenzando por su binarización, como se describió en la Figura 7a. Las imágenes binarizadas, mostradas en la Figura 11, se utilizan posteriormente para identificar la deformada de la viga. Se observa, en la posición central de cada imagen, la región correspondiente a la viga objeto del análisis, pudiéndose comprobar la correspondencia con las imágenes de la Figura 9. Además, aparecen en las mismas otras regiones correspondientes a elementos externos a la propia viga, que posteriormente en el algoritmo de procesamiento serán excluidas del análisis.

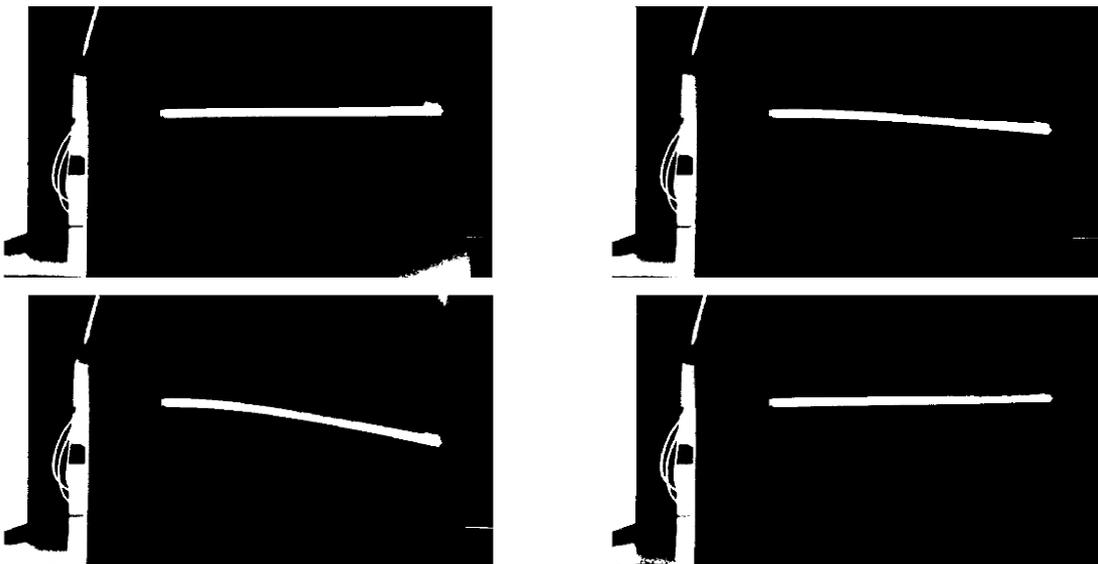
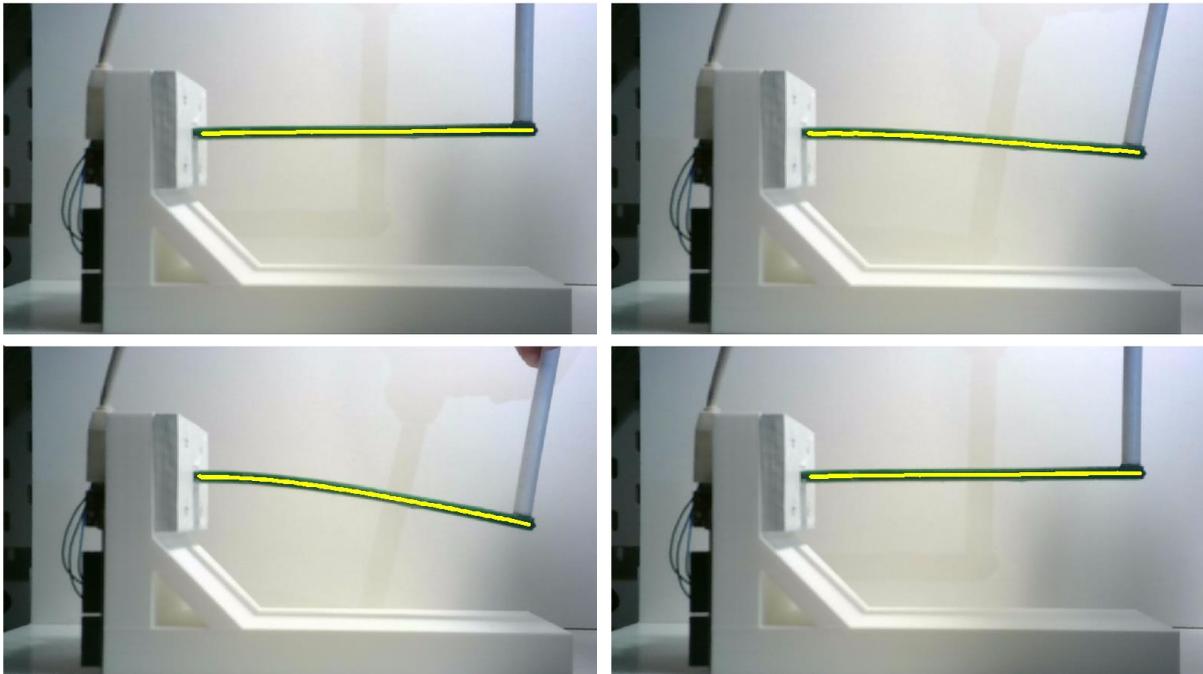


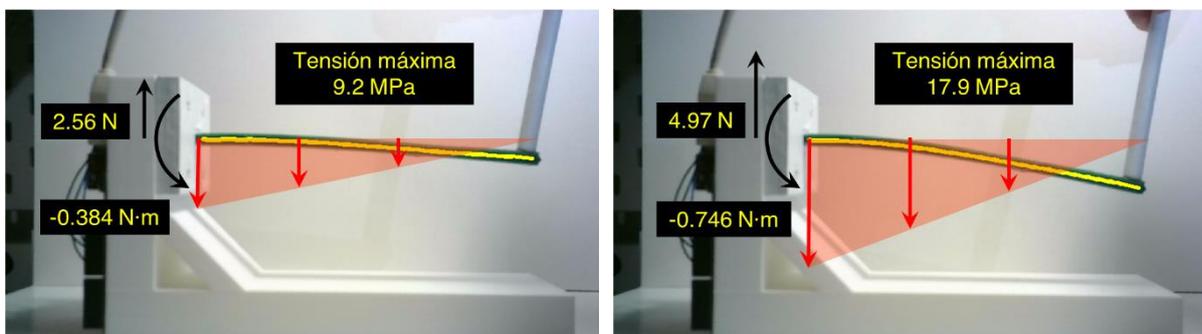
Figura 11: Secuencia de carga y descarga.

Una vez realizada la binarización de la Figura 11, se procedió a la esqueletización de las mismas, sólo en la región de interés anteriormente descrita. Como resultado, se marca en amarillo la fibra neutra de la viga para los distintos instantes analizados, correspondientes igualmente a las imágenes de la Figura 9. En todos los casos se observa la elevada fidelidad en la reproducción de la viga, independientemente del grado de curvatura o de desplazamiento.



**Figura 12:** Secuencia de carga y descarga.

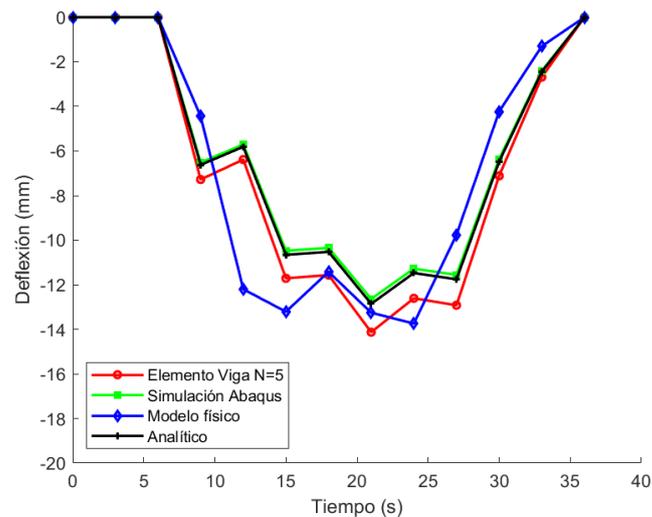
A continuación, el algoritmo superpone a las imágenes de la Figura 12, los valores calculados de las reacciones (ecuación 6 y ecuación 7) en el empotramiento (fuerza y momento), correspondientes al valor instantáneo de carga aplicado, según se muestra en la Figura 13. Igualmente, se incluye la superposición del diagrama de momentos flectores (ecuación 3) y el valor de tensión máxima alcanzado en la fibra superior de la viga en el punto de empotramiento.



**Figura 13:** Resultados de reacciones y diagrama de momento flector en tiempo real.

Por último, en la Figura 14 se muestra la evolución del desplazamiento máximo de la viga en función del tiempo. Se muestran los resultados de la simulación 2D, la simulación 3D, el modelo físico con visión artificial y la expresión analítica. Se remarca aquí el potencial de las herramientas desarrolladas para la monitorización de estructuras de elevada complejidad. Se observan resultados muy similares entre la gráfica del modelo unidimensional de elemento viga y del caso de la malla tridimensional de Abaqus. Ambas siguen la misma tendencia, si bien la pequeña diferencia entre sus valores, de en torno a un 10%, se debe a una mayor precisión del cálculo con malla tridimensional de Abaqus, teniendo en cuenta que el modelo de la viga ha sido realizado con 168 elementos hexagonales, frente a los 5 elementos tipo viga del cálculo 2D. Los resultados del modelo analítico, utilizando la ecuación 2 para  $x = L$ , son muy similares a los obtenidos mediante la simulación en Abaqus, dado que es ésta la que tendrá una mayor precisión, al haberse realizado con un mayor número de elementos. Respecto a los valores obtenidos por la visión artificial sobre el modelo físico, las tendencias son igualmente similares. Se remarca que las diferencias son notables en ciertos instantes, lo que es asociado a variaciones de presión sobre el

sensor por falta de homogeneidad y posición del aplicador de carga. Un sensor de mayor resolución podría aportar resultados más precisos y similares a los obtenidos por simulación.



**Figura 14:** Evolución en el tiempo de la fuerza aplicada y el desplazamiento del extremo.

## 5. Conclusiones

Los resultados han mostrado la validez del modelo de gemelo digital desarrollado, que, aunque a pequeña escala es aplicable a estructuras de mayor complejidad. La sensorización de la estructura mediante sensores resistivos para medir la fuerza y sensores ópticos para medir la deflexión ha permitido conocer en tiempo real el estado de una estructura sencilla. La simulación mediante códigos desarrollados en Matlab para elemento viga muestran la validez de los métodos numéricos desarrollados de manera sencilla por parte de los estudiantes. La aplicación de software comercial como Abaqus permite el desarrollo de gemelos digitales de mayor complejidad, con modelos numéricos más avanzados y complejos. Por su parte, la monitorización del modelo físico mediante técnicas ópticas ha permitido comparar la validez de los modelos numéricos desarrollados, mostrando diferencias inferiores al 5% entre modelos numéricos. Las diferencias resultan superiores al compararlas con el método óptico, lo cual se asocia a la resolución en la aplicación de la fuerza sobre el modelo físico, que, al ser de forma manual, se induce un error en la posición de la carga. La superposición de valores como las reacciones, tensiones máximas o los diagramas de momentos flectores a la imagen en tiempo real de la estructura física ha permitido monitorizar de forma precisa y rápida un sistema estructural como el analizado en este trabajo.

Los resultados han mostrado la validez del gemelo digital desarrollado, que, mediante el uso de sensores de distinta naturaleza se ha obtenido la respuesta de la estructura en tiempo real. Su implementación en docencia de asignaturas de ingeniería mecánica permitirá al estudiante abordar los conceptos de manera novedosa, como una herramienta versátil con potencial aplicación a sistemas mecánicos de mayor complejidad.

## 6. Referencias

- [1] Dang, H. V, Tatipamula, M., & Nguyen, H. X. (2022). Cloud-Based Digital Twinning for Structural Health Monitoring Using Deep Learning. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 18(6), 3820–3830. <https://doi.org/10.1109/TII.2021.3115119>
- [2] Deon, B., Cotta, K. P., Silva, R. F. V, Batista, C. B., Justino, G. T., Freitas, G. C., Cordeiro, A. M., Barbosa, A. S., Loução, F. L., Simioni, T., Morais, A. M., Medeiros, I. E. A., Almeida, R. J. S., Araújo Jr., C. A. A., Soares, C., & Padoin, N. (2022). Digital twin and machine learning for decision support in thermal power plant with combustion engines. *Knowledge-Based Systems*, 253, 109578. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.knosys.2022.109578>
- [3] Grieves, M. (2023). Digital Twin Certified: Employing Virtual Testing of Digital Twins in Manufacturing to Ensure Quality Products. *Machines*, 11(8). <https://doi.org/10.3390/machines11080808>
- [4] Grieves Michael and Vickers, J. (2017). Digital Twin: Mitigating Unpredictable, Undesirable Emergent Behavior in Complex Systems. In S. and A. A. Kahlen Franz-Josef and Flumerfelt (Ed.), *Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems: New Findings and Approaches* (pp. 85–113). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-38756-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-38756-7_4)

- [5] Kosim, N. A. M., Hassan, S. L. M., Halim, I. S. A., Abdullah, N. E., & Rahim, A. A. A. (2022). Air Quality Monitoring System using Arduino and Matlab Analysis. *2022 IEEE 13th Control and System Graduate Research Colloquium (ICSGRC)*, 225–230. <https://doi.org/10.1109/ICSGRC55096.2022.9845147>
- [6] Li, L., Lei, B., & Mao, C. (2022). Digital twin in smart manufacturing. *Journal of Industrial Information Integration*, 26, 100289. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jii.2021.100289>
- [7] Liljaniemi, A., & Paavilainen, H. (2020). Using Digital Twin Technology in Engineering Education – Course Concept to Explore Benefits and Barriers. *Open Engineering*, 10, 377–385. <https://doi.org/10.1515/eng-2020-0040>
- [8] Liu, X., Liu, H., & Serratella, C. (2020). Application of Structural Health Monitoring for Structural Digital Twin. *Offshore Technology Conference Asia*.
- [9] Mohd Bakri, N. A., Al Junid, S. A. M., Razak, A. H. A., Md Idros, M. F., & Halim, A. K. (2015). Mobile Carbon Monoxide Monitoring System Based on Arduino-Matlab for Environmental Monitoring Application. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 99(1), 012009. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/99/1/012009>
- [10] Nikolaev, S., Gusev, M., Padalitsa, D., Mozhenkov, E., Mishin, S., & Uzhinsky, I. (2018). *Concept for Modern Project-Based Engineering Education*. 193–203. <https://doi.org/10.1007/978-3-030>
- [11] Raffi, M. L. M., Hussain, M. A. M., Mustafa, W. A., Zabidi, M. N. A., Mardiansyah, A., & Subari, K. (n.d.). *A Systematic Review of Open-Source Software for Technical and Vocational Education and Training (TVET)*.
- [12] Screpanti, L., Scaradozzi, D., Gulesin, R. N., & Ciuccoli, N. (2022). Control Engineering and Robotics since Primary School: an Infrastructure for creating the Digital Twin model of the Learning Class. *IFAC-PapersOnLine*, 55(17), 267–272. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.09.290>
- [13] Soori, M., Arezoo, B., & Dastres, R. (2023). Digital twin for smart manufacturing, A review. *Sustainable Manufacturing and Service Economics*, 2, 100017. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.smse.2023.100017>
- [14] Takács, G., Mikuláš, E., Gulán, M., Vargová, A., & Boldocký, J. (2023). AutomationShield: An Open-Source Hardware and Software Initiative for Control Engineering Education. *IFAC-PapersOnLine*, 56(2), 9594–9599. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.263>
- [15] Torzoni, M., Tezzele, M., Mariani, S., Manzoni, A., & Willcox, K. E. (2024a). A digital twin framework for civil engineering structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418, 116584. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116584>
- [16] Torzoni, M., Tezzele, M., Mariani, S., Manzoni, A., & Willcox, K. E. (2024b). A digital twin framework for civil engineering structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418, 116584. <https://doi.org/10.1016/J.CMA.2023.116584>
- [17] Xiong, M., & Wang, H. (2022). Digital twin applications in aviation industry: A review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 121(9), 5677–5692. <https://doi.org/10.1007/s00170-022-09717-9>
- [18] Yang, D., Karimi, H. R., Kaynak, O., & Yin, S. (2021). Developments of digital twin technologies in industrial, smart city and healthcare sectors: a survey. *Complex Engineering Systems*, 1(1). <https://doi.org/10.20517/ces.2021.06>
- [19] Zhang, J., Zhu, J., Tu, W., Wang, M., Yang, Y., Qian, F., & Xu, Y. (2024). The Effectiveness of a Digital Twin Learning System in Assisting Engineering Education Courses: A Case of Landscape Architecture. *Applied Sciences*, 14(15). <https://doi.org/10.3390/app14156484>