



Modelo térmico-dinámico acoplado para engranajes rectos de alta velocidad

A. Arana¹, I. Ulacia¹, J. Larrañaga¹, A. Iñurritegui¹, E. San Jose²

¹ Dpto. de Mecánica y Producción Industrial. Mondragon Unibertsitatea, Arrasate-Mondragón, España. email: aarana@mondragon.edu, iulacia@mondragon.edu, jlarranaga@mondragon.edu, ainurritegui@mondragon.edu

² Dpto. de Ingeniería. Egile Innovation Solution (EIS), Mendaro, España. email: ekain.sanjose@egile.es

El desarrollo de transmisiones a engranajes para aplicaciones aeronáuticas de alta velocidad de hasta 80.000 rpm implica el tratamiento de fenómenos térmicos y dinámicos además de los análisis de la distribución de carga, el error de transmisión y las tensiones habituales. La elevada velocidad de giro repercute no sólo en la magnitud de las excitaciones y el de número resonancias, si no también en el incremento de calor generado en el sistema como consecuencia de un mayor deslizamiento. Este calor provoca a su vez la distorsión geométrica de la pareja de engranajes, modificando la distribución de carga y reduciendo el juego disponible; lo que afecta a las cargas dinámicas y el error de transmisión de manera continua. En determinadas condiciones como el fallo del sistema de lubricación, este proceso puede volverse inestable tal y como han demostrado diversos estudios experimentales acelerando el fallo total de la transmisión

En este trabajo se presenta un modelo térmico-dinámico acoplado de parámetros concentrados que permite la modelización de contactos de engranajes rectos resolviendo simultáneamente la ecuación de movimiento, la distribución de carga y la difusión de calor, acopladas mediante la ecuación de distorsión térmica. Los resultados confirman las observaciones experimentales de la literatura científica apuntando a la diferencia de temperatura entre piñón y rueda como el factor fundamental en el cambio de la respuesta dinámica, seguida de la reducción de juego provocada por las dilataciones. Finalmente, este trabajo identifica las condiciones operativas que conllevan el colapso de la transmisión y proporciona recomendaciones para evitarlas, prolongando así su vida útil.

1. Introducción

En la última década, las preocupaciones medioambientales han impulsado la mayor parte de los esfuerzos de investigación en transmisiones por engranajes hacia la maximización de la eficiencia y el aumento de la densidad de potencia. La búsqueda de la reducción del tamaño de los componentes y del volumen de aceite de las actuales transmisiones automovilísticas y aeronáuticas, junto con el aumento de la velocidad de entrada de las mismas, han llevado al límite las temperaturas de los engranajes, aumentando la probabilidad de fallo. Además, en tales circunstancias, la magnitud y gradiente de temperaturas en los engranajes se vuelve prominente y, como resultado, pueden surgir problemas relacionados con la distorsión térmica.

En la literatura científica son numerosas las evidencias experimentales sobre los efectos de la distorsión térmica, principalmente relacionadas con engranajes de turbo-maquinaria que funcionan a velocidades tangenciales elevadas (superiores a 50 m/s). Welch y Boron [1] descubrieron que la dilatación térmica diferencial del piñón con respecto de la rueda produce abombamiento del cilindro de diámetro primitivo que provoca una sobrecarga en la zona central con una carga menor en los extremos. Del mismo modo, Martinaglia [2] describió que el patrón de contacto bajo carga en engranajes helicoidales a alta velocidad se desplazaba hacia los extremos debido al fenómeno de bombeo axial de aceite, que trasladaba la ubicación de la temperatura máxima superficial del flanco en contacto desde el centro del mismo hacia el lado de salida. Akazawa et al. [3] también observaron un fuerte marcado de la raíz de los dientes de los turbo-engranajes debido a la existencia de un contacto prematuro, a pesar de que los engranajes tenían un perfil corregido. Más recientemente, Matsumoto et al. [4] confirmaron experimentalmente la relación entre el aumento del esfuerzo de flexión de la raíz del diente y la deformación térmica. Sin embargo, incluso con estas evidencias, el número de publicaciones científicas sobre la influencia de la deformación térmica en el comportamiento de los engranajes es pequeño, y la mayoría de ellas se centran en engranajes de plástico [5, 6] debido a la dependencia de la temperatura de las propiedades del material, así como al elevado coeficiente de dilatación térmica con respecto de los engranajes de acero.

Uno de los pocos trabajos sobre la predicción del comportamiento cuasi-estático del contacto en engranajes metálicos con distorsión térmica fue realizado por Tozaki et al. [7] quienes desarrollaron un modelo térmico de elementos finitos para predecir la distribución de la temperatura y la geometría deformada de la referencia [4]. Las deformaciones de la geometría se introdujeron posteriormente en un modelo de distribución de carga que se utilizó para calcular las tensiones de flexión. Aunque, el modelo demostró que las deformaciones térmicas podían integrarse en el flujo de trabajo de diseño, se hicieron varias suposiciones sin soporte científico aparente y el tipo y la magnitud de la deformación térmica no se discutieron, limitándose a analizar un único caso.

Desde el punto de vista dinámico, el número de trabajos existentes es igualmente escaso y está especialmente centrada en las variaciones de la rigidez de engrane y la temperatura de contacto. Luo y Li [8] sugirieron que las deformaciones térmicas afectan a la rigidez individual y de la pareja de engranajes e introdujeron este efecto en la ecuación de movimiento con el fin de investigar la influencia de la temperatura en la dinámica del sistema. Gou et al. [9] desarrollaron un modelo de dinámica no lineal para un sistema engranaje-rotor-cojinete con el fin de investigar el efecto de la temperatura instantánea o *flash* del diente sobre la dinámica de una pareja de engranajes rectos. De manera similar, Pan et al. [10] desarrollaron un modelo de dinámica no lineal de 10 grados de libertad para un sistema de transmisión engranaje-rotor-rodamiento e investigaron los efectos de la temperatura de contacto y la carga aleatoria sobre el comportamiento dinámico. Finalmente, uno de los trabajos más destacados es el de Liu et al. [11] que analizaron el efecto de las condiciones térmicas en la vibración no lineal de los sistemas planetarios en equilibrio térmico donde además de la rigidez de engrane en condiciones térmicas, se introdujo la variación de la holgura causada por el incremento de temperatura. Aunque existen modelos similares en la literatura científica en torno a los efectos dinámicos causados por la temperatura, la gran mayoría se centra en los cambios de rigidez y/o juego y no se estudia la influencia de las desviaciones geométricas de origen térmico como fuente de excitación adicional o de modificación de las condiciones de separación interdental; lo que afecta a la pérdida de contacto, los impactos y la carga dinámica.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo térmico-dinámico analítico acoplado para estudiar la influencia de la distorsión térmica en el comportamiento mecánico de engranajes rectos. El modelo térmico de parámetros concentrados previamente desarrollado por los autores en [12] se simplifica y acopla a un modelo dinámico discreto no lineal con juego incorporado, utilizando las deformaciones térmicas como ecuación de acople entre ambos fenómenos. Posteriormente, se discute el método de resolución para un cálculo eficiente y se emplea el modelo completo para analizar un caso práctico. Entre otras cosas, se analiza el rango de temperaturas estacionarias del piñón y de la rueda para la aplicación seleccionada y se discute la magnitud de las desviaciones geométricas y su impacto en el error de transmisión sin carga como punto de partida para el análisis bajo carga. Finalmente, se identifica el tipo de desviaciones producidas debido a la distorsión térmica y su influencia en la distribución de la carga y el error de transmisión cuasi-estáticos y dinámicos para tres condiciones de referencia. Los resultados son útiles para determinar la cantidad de modificación necesaria para compensar dichas distorsiones y mejorar el comportamiento de los contactos en condiciones térmicas-dinámicas.

2. Modelo térmico-dinámico acoplado

El modelo desarrollado en este trabajo está basado en el modelo dinámico torsional discreto de Tamminana et al. [13] y una adaptación del modelo térmico transitorio desarrollado por los autores y presentado anteriormente en [12]. El modelo dinámico torsional mostrado gráficamente en la Figura 1a) y expresado analíticamente en la Ecuación 1 representa la pareja de engranajes como dos discos rígidos de radios base $r_{b,1}$ y $r_{b,2}$ y momentos polares de inercia I_1 e I_2 para piñón y rueda respectivamente. La ecuación de movimiento de la Ecuación 1a), que representa el comportamiento dinámico de estos discos, incluye a su izquierda una rigidez de engrane variable en el tiempo $k(t)$ así como una amortiguación constante $c = 2 \cdot \xi \cdot \sqrt{m_{eq} \cdot \bar{k}}$ donde $m_{eq} = I_1 \cdot I_2 / (I_1 \cdot r_{b,2}^2 + I_2 \cdot r_{b,1}^2)$ es la masa equivalente del sistema, ξ es el factor de amortiguación y \bar{k} es la rigidez media. Por otro lado, a la derecha de la igualdad se incluyen la fuerza transmitida en el engrane $F_0 = m_{eq} \cdot (r_{b,1} \cdot T_1 / I_1 + r_{b,2} \cdot T_2 / I_2)$ debido al par aplicado $T_{1,2}$ así como la influencia de la excitación externa $\varepsilon(t)$ producida por los errores de fabricación o las modificaciones intencionadas del dentado $\delta(t)$, la distancia de aproximación o receso $s(t)$ y las distorsiones geométricas de origen térmico $\eta(t)$. Este último término será fundamental para el acoplamiento de los modelos térmico y dinámico tal y como se presenta en la Sección 2.2. Todas estas variables consideran su evolución a lo largo de la línea de acción, tangente a los círculos de base de modo que la diferencia de deformaciones angulares $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ de los discos da lugar al error de transmisión dinámico $x(t) = r_{b,1} \cdot \theta_1(t) + r_{b,2} \cdot \theta_2(t) - \varepsilon(t)$, donde el término $\varepsilon(t)$ es también conocido como error de transmisión sin carga.

$$m_{eq} \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k(t) \cdot g[x(t)] = F_0 + m_{eq} \cdot \ddot{\varepsilon}(t) \quad (1a)$$

$$g[x(t)] = \begin{cases} x(t) - \kappa/2, & x(t) > \kappa/2 \\ 0, & |x(t)| \leq \kappa/2 \\ x(t) + \kappa/2, & x(t) < -\kappa/2 \end{cases} \quad (1b)$$

El término $g[x(t)]$ representa el comportamiento no lineal producido por la pérdida de contacto entre los flancos cuando la fuerza dinámica F_{dyn} supera la precarga entre la pareja de engranes. En presencia de juego normal $\kappa > 0$ los dientes pueden perder el contacto y la fuerza normal cae a cero instantáneamente. Para modelizar este fenómeno Tamminana et al. [13] emplean una función lineal a tramos expresada en la Ecuación 1b). La Figura 1b) recoge gráficamente el comportamiento descrito donde se identifican tres regímenes de impacto: i) en el rango I no hay pérdida de contacto, ii) en el rango II se produce la separación del dentado y el posterior rebote y iii) en el rango III se produce la separación y el impacto en flancos derecho e izquierdo. Cabe destacar que la presencia de errores de forma, modificaciones o distorsiones de origen térmico agrupados en el parámetro ε adelantan o retrasan la aparición de estos regímenes (véase la Figura 2b) por lo que deben tenerse en cuenta en el cálculo.

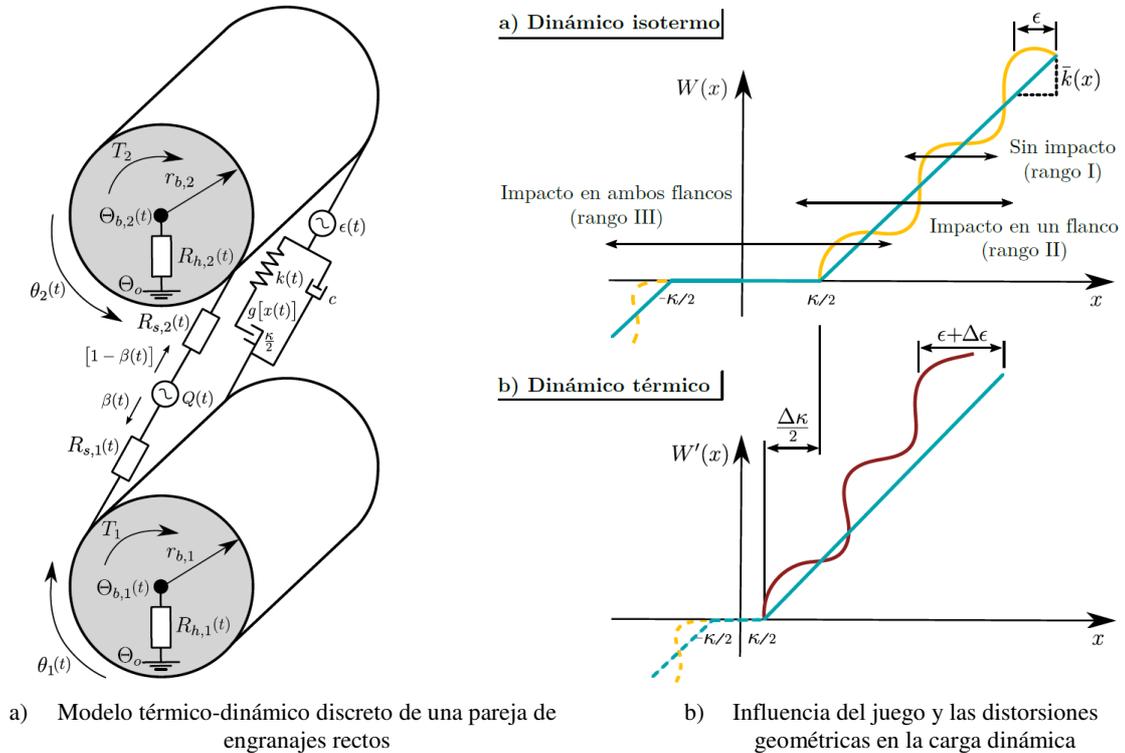


Figura 1: Resumen gráfico del modelo térmico-dinámico acoplado de una pareja de engranajes rectos

Finalmente, y con el fin de simplificar el análisis del problema térmico-dinámico acoplado, fenómenos como las fluctuaciones de par o la influencia del rozamiento no son incluidos. La variación de la rigidez en el tiempo se determina siguiendo el procedimiento habitual, resumido en la referencia [14], y el error de transmisión sin carga $\epsilon(t) = |\epsilon_{1,2}(t)| = |\max[\delta_{12}(t) + \eta_{12}(t) + s_{12}(t)]|$ es la suma de las modificaciones, distorsiones y distancias de aproximación/receso totales respectivamente, considerando en cada término las contribuciones instantáneas del piñón y de la rueda y teniendo en cuenta que por regla general todos los términos son negativos con respecto de la evolvente teórica. De este modo, cuando $\epsilon(t) - \kappa_{1,2} = 0$ el error de transmisión sin carga iguala el juego total disponible y por lo tanto indica el bloqueo de la transmisión.

2.1. Transferencia de calor

La Figura 1a) también muestra de manera gráfica el modelo térmico asociado a la pareja de engranajes rectos. El sistema se compone de dos nodos másicos, con capacidad calorífica $c_{1,2} = m_{1,2} \cdot c_{p,1,2}$, que representan el piñón y la rueda a temperatura instantánea $\Theta_{b,1}(t)$ y $\Theta_{b,2}(t)$ respectivamente y dos nodos auxiliares (sin masa) que representan los puntos de definición de las condiciones de contorno para la resolución del sistema. Así, el nodo auxiliar que representa al aceite, tiene una temperatura impuesta Θ_o mientras que el nodo correspondiente al punto de engrane impone el calor instantáneo generado en el contacto $Q(t)$. Por otro lado, las resistencias $R_{s,1,2}(t)$ y $R_{h,1,2}(t)$ corresponden a las resistencias térmicas de estricción del contacto y convección con el aceite respectivamente. El primero varía ligeramente con el proceso de engrane mientras que el segundo depende de la temperatura del cuerpo considerado, por lo tanto, ambos son variables en el tiempo. Las ecuaciones que permiten determinar su magnitud instantánea han sido previamente presentadas por los autores en la referencia [12]. Aunque es posible desarrollar redes térmicas más complejas (con mayor número de nodos) y con un mayor nivel de detalle de los procesos de transferencia de calor (e.g. [15]) el modelo térmico propuesto se considera suficientemente representativo de ensayos de laboratorio con par, velocidad y temperatura del aceite impuesta.

La solución de la distribución de temperaturas para piñón y rueda requiere el planteamiento matricial de la ecuación de calor transitoria para el piñón y la rueda mostrada a continuación. En la Ecuación 2 asumimos que la capacidad calorífica permanece constante en los cuerpos y que sólo el valor de las resistencias de estricción de contacto y convección son dependientes de la temperatura y condiciones locales durante el engrane lo que convierte al sistema en una ecuación matricial no lineal que requiere de métodos numéricos iterativos para su resolución.

$$[\mathbf{C}] \cdot \dot{\Theta}(t) + [\mathbf{K}(\Theta, t)] \cdot \Theta(t) = Q(t) \cdot [\boldsymbol{\beta}(t)] \quad (2a)$$

$$\beta_1(t) = \frac{R_{s,2}(t)}{R_{s,1}(t) + R_{s,2}(t)} \approx \frac{\sqrt{u_1(t)}}{\sqrt{u_1(t)} + \sqrt{u_2(t)}} \rightarrow \beta_2(t) = 1 - \beta_1(t) \quad (2b)$$

En la Ecuación 2a), los términos de la matriz de conductancia $[\mathbf{K}]$ se obtienen invirtiendo los términos de resistencia de modo que $K_{i,j} = R_{i,j}^{-1}$. Por otro lado, el calor generado en el contacto $Q(t) = \mu(t) \cdot W_{dyn}(t) \cdot V_s(t)$, siendo $\mu(t)$ el coeficiente de rozamiento en el contacto, $W_{dyn}(t)$ la carga normal dinámica sobre el diente y $V_s(t)$ la velocidad de deslizamiento instantánea. Del mismo modo que en el cálculo de las rigideces [14], en aquellas regiones con dos pares de dientes en contacto (entre los puntos de engrane normalizados A y B o D y E) el calor total será la suma del calor generado en cada pareja $Q(t) = Q_{1,2}(t) + Q_{3,4}(t)$ mientras que en la zona de contacto único (entre los puntos B y D) el calor será $Q(t) = Q_{1,2}(t)$. Para terminar, el parámetro $\beta(t)$ representa el reparto de calor en el contacto y depende de la relación entre las resistencias de estricción [16]. Para altas velocidades de rotación, con números de Peclet grandes ($L \gg 5$), se puede demostrar que el coeficiente de reparto depende exclusivamente de las velocidades de rodadura $u_{1,2}(t)$ [17].

Con el fin de determinar los parámetros restantes (fricción, distribución de carga y cinemática) necesarios para la resolución de la Ecuación 2 se hace preciso determinar los radios de curvatura instantáneos. Siguiendo la definición de la evolvente resulta que los radios de curvatura $\rho_{1,2}(t) = r_{b,1,2} \cdot \xi_{1,2}(t)$, donde ξ es el ángulo de rodadura y por lo tanto la velocidad de rodadura es $u_{1,2}(t) = \omega_{1,2} \cdot \rho_{1,2}(t)$. De aquí, se obtiene que la velocidad de entrada en el contacto es $V_e(t) = |u_1(t) + u_2(t)|/2$ y de manera similar la velocidad de deslizamiento $V_s(t) = |u_1(t) - u_2(t)|$.

Finalmente, la carga dinámica normal $W_{dyn}(t)$ sobre un diente se obtiene de la fuerza de engrane dinámica $F_{dyn}(t)$ resultante de la resolución de la ecuación de movimiento, Ecuación 1. La Ecuación 3 muestra el proceso a seguir, donde la carga normal por diente depende de las rigideces individuales $k_{1,2}(t)$ obtenidas según [14], las desviaciones iniciales $\epsilon_{1,2}(t)$ y el error de transmisión dinámico $x(t)$.

$$F_{dyn}(t) = F_0 + m_{eq} \cdot [\ddot{\epsilon}(t) - \ddot{x}(t)] = c \cdot \dot{x}(t) + k(t) \cdot g[x(t)] \quad (3a)$$

$$F_{dyn}(t) = W_{dyn,1}(t) + W_{dyn,2}(t) = k_1(t) \cdot [x(t) + \epsilon_2(t)] + k_2(t) \cdot [x(t) + \epsilon_1(t)] \quad (3b)$$

2.2. Distorsión térmica

Como consecuencia del calentamiento del piñón y de la rueda los flancos sufren una expansión radial $\Delta r(\xi_y)$ proporcional a la distancia radial del punto de contacto instantáneo $r_{1,2}(t)$ y al incremento de temperatura $\Delta\theta_{b,1,2}(t)$. La Figura 2 resume gráficamente las consecuencias de la dilatación entre las que destacan el incremento del radio base, el cambio del ángulo de presión local, la modificación del paso base y finalmente la reducción de la holgura disponible. Todos estos fenómenos quedan recogidos a través de la distorsión local $\eta(\xi_y)$ la cual puede sumarse a los errores de fabricación o modificaciones geométricas a través de la desviación total local $\epsilon(\xi_y)$, normal al punto de contacto.

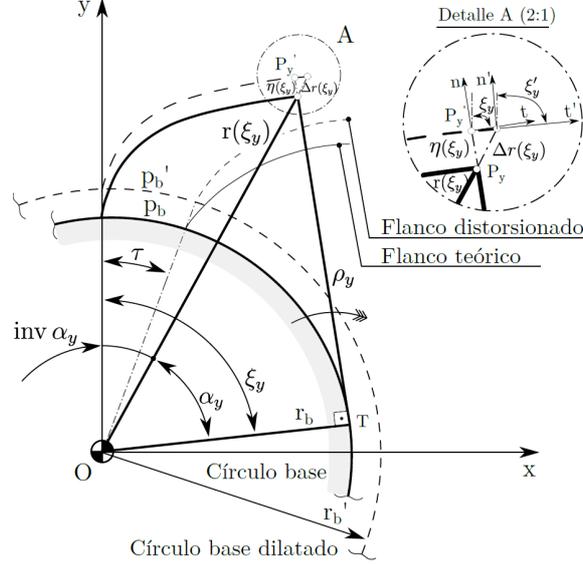


Figura 2: Distorsión térmica del perfil evolvente y definición de distancias normales al flanco

A partir de la Figura 2 resulta evidente que la distorsión $\eta(\xi_y)$ puede obtenerse siguiendo la Ecuación 4 para un incremento de temperatura conocido $\Delta\theta_{b,1,2}(t)$ sobre la temperatura ambiente obtenido a partir de resolución del problema térmico y un coeficiente de expansión térmica lineal α_L . Otras consecuencias de la distorsión térmica como el error de paso, de perfil o la reducción del juego han sido previamente presentados por los autores en [18].

$$\Delta\epsilon(\xi_y) = \eta(\xi_y) \approx \Delta r(\xi_y) \cdot \sin(\alpha_y) = \left[r_b \cdot \sqrt{1 + \xi_y^2} \cdot \Delta\theta_b \cdot \alpha_L \right] \cdot \sin[\arctan(\xi_y)] = r_b \cdot \xi_y \cdot \Delta\theta_b \cdot \alpha_L \quad (4)$$

Esta última expresión se considera la ecuación de acople entre el problema térmico y dinámico ya que las distorsiones térmicas en la dirección normal pueden re-integrarse en la Ecuación 1 como $\epsilon'(t) = \epsilon(t) + \Delta\epsilon(t)$

2.3. Método de resolución

Para la resolución acoplada del sistema de ecuaciones térmico-dinámico definido por las Ecuaciones 1 a 4 se emplea el algoritmo de resolución temporal paso a paso de Newmark combinado con el método Newton-Raphson para la convergencia de la parte no lineal que resulta de la inclusión de las deformaciones de origen térmico $\epsilon(t)$ en la ecuación de movimiento. El algoritmo de Newmark ha sido ampliamente empleado en la literatura científica en torno al comportamiento dinámico de engranajes [19-21], concretamente para la resolución eficiente de problemas dinámicos que impliquen el tratamiento de la pérdida de contacto entre dientes. No obstante, para evitar bucles recursivos con diferentes niveles de iteración en el proceso de resolución de cada aspecto del problema (dinámico, pérdida de contacto, térmico) conviene simplificar el sistema de ecuaciones planteado. Así, para el modelo térmico planteado en la Figura 1a), la Ecuación 2 presenta una solución analítica para la temperatura del piñón y la rueda, $\theta_{b,1}(t)$ y $\theta_{b,2}(t)$ respectivamente, cuando las condiciones de contorno implican que los nodos auxiliares que los rodean (el del aceite y el del punto de engrane) consideren temperaturas y/o calor conocidos y además todas sus propiedades (R_h , R_s , c y β) son constantes. Bajo esta premisa se puede demostrar que la Ecuación 2 se reduce a la expresión analítica mostrada en la Ecuación 5 al aplicarlo al modelo térmico planteado en la Figura 1a) donde todos los términos han sido previamente definidos.

$$\theta_{1,2}(t) = \theta_{1,2}(t=0) \cdot e^{\frac{-t}{R_{h,1,2} \cdot c_{1,2}}} + [\theta_o + Q \cdot \beta_{1,2} \cdot R_{h,1,2}] \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{R_{h,1,2} \cdot c_{1,2}}} \right) \quad (5)$$

Cuando el paso temporal Δt es lo suficientemente pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$), los términos de resistencia de convección $R_{h,1,2}$, capacidad calorífica $c_{1,2}$, calor Q y coeficiente de reparto de calor $\beta_{1,2}$ del modelo térmico planteado se pueden considerar constantes y por lo tanto, se puede sustituir la variable temporal t por Δt determinando así la temperatura del piñón o de la rueda $\Theta_{1,2}(t + 1)$ en el instante $t+1$ a partir de la temperatura previa $\Theta_{1,2}(t)$ en el instante t . Esta aproximación permite acoplar la solución del problema térmico y de distorsión térmica correspondiente (Ecuación 4) a la solución dinámica dentro del algoritmo de Newmark de manera eficiente.

La Figura 3 resume de manera gráfica el proceso de resolución acoplada del sistema de ecuaciones. El proceso se inicia con la definición de la geometría de los engranajes, seguido de la discretización temporal y la definición de las fases de engrane de los diferentes dientes a lo largo de la simulación. Posteriormente, se determinan las magnitudes cinemáticas, las desviaciones y la rigidez de cada diente, tanto individuales como totales, necesarias para la resolución de la ecuación de movimiento (Ecuación 1). En una segunda fase, se inicia la integración temporal según el algoritmo de Newmark, el cual produce las posiciones x , velocidades v y aceleraciones a de cada instante lo que permite la obtención de la carga dinámica del engrane F_{dyn} y la carga por diente W_{dyn} con la Ecuación 3. Este último, junto con la cinemática previamente resuelta y las curvaturas locales permite determinar el coeficiente de rozamiento según [22] lo que se emplea para determinar el calor generado. Del mismo modo, se pueden definir las resistencias de estricción y convección, necesarias para el cálculo de la temperatura instantánea mediante la Ecuación 5. Finalmente, la Ecuación 4 permite obtener la distorsión térmica ϵ' la cual es empleada a su vez para determinar la separación $g[x(t)]$ y con ello las fuerzas dinámicas actualizadas. En este momento se emplea el método de Newton-Raphson para conseguir la convergencia en los resultados de las fuerzas dinámicas F_{dyn} , tras lo cual el algoritmo da paso a la resolución de los siguientes tramos hasta alcanzar la duración total de la simulación.

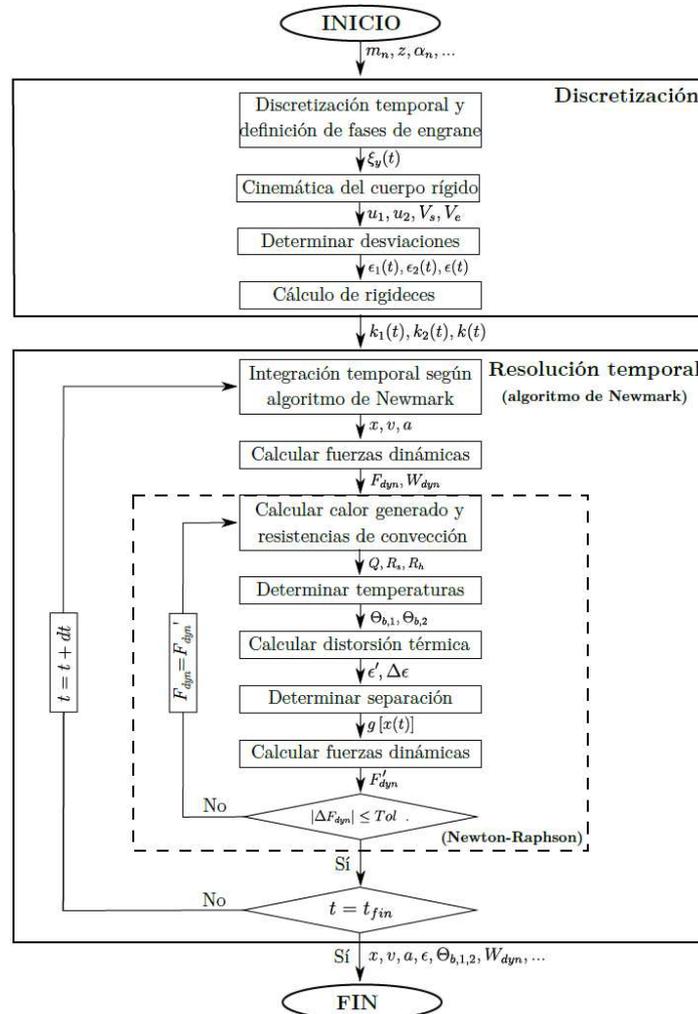


Figura 3: Algoritmo de resolución del problema térmico-dinámico acoplado

Cabe destacar que para la resolución del sistema es necesario definir las condiciones iniciales de la simulación tanto para la parte dinámica como para la térmica. En el primero se considera que la deformación inicial corresponde a la deflexión estática $x(t = 0) = F_0/\bar{k}$ mientras que la velocidad y aceleración son cero respectivamente. $v(t = 0) = a(t = 0) = 0$. Para el segundo se considera que la temperatura de partida de los cuerpos es igual al impuesto por el baño de aceite es decir $\Theta_{b,1,2} = \Theta_o$.

3. Caso de estudio

El modelo desarrollado será analizado en las condiciones experimentales de Otto [23], ligeramente modificadas para extender su alcance. En primer lugar, a partir de las predicciones de temperatura y gradientes entre piñón y rueda se estudiarán las distorsiones geométricas a escala real y su impacto en las desviaciones normales a lo largo de la línea de acción, así como el error de transmisión sin carga resultante. Posteriormente, se obtendrá la distribución de carga y el error de transmisión cuasi-estáticos para diferentes condiciones térmicas. Finalmente se obtendrán estas mismas curvas en condiciones térmicas-dinámicas y se analizarán las implicaciones de un cálculo acoplado frente al cálculo cuasi-estático previo.

3.1. Descripción general

La Tabla 1 resume las características geométricas de la pareja de engranajes empleada. Se trata de engranajes orientados a ensayos de picadura normalizados en bancos de ensayos de recirculación de potencia mecánica tipo FZG y no poseen modificaciones de perfil o longitudinales que alteren la distribución de carga y el error de transmisión.

Tabla 1: Características de los engranajes FZG tipo C-PT [23]

	Símbolo [unidad]	Engranajes	
		Piñón	Rueda
Número de dientes	z [-]	16	24
Módulo normal	m_n [mm]	4.5	
Ancho de cara	b [mm]	14	
Ángulo de presión normal	α_n [°]	20	
Factor de corrección teórico	x [-]	0.1818	0.1716
Cremañera según DIN 3972	[-]	(1.39/1/0.25)	
Tolerancias según DIN 3967	E_{sn} [mm]	-0.07/-0.11	
Calidad según DIN 3961	[-]	Q5	
Distancia entre ejes	a_w [mm]	91.5 ±0.01	
Juego normal	j_{bn} [μm]	170	
Material	[-]	16MnCr5	
Rugosidad superficial	Ra [μm]	0.2-0.4	
Dureza	HRC	59-63	

Las condiciones operativas de los ensayos de Otto [23] son extensos y quedan recogidos en a Tabla 2. La velocidad giro produce velocidades tangenciales en el rango 0-20 m/s y el par en el piñón corresponde al rango de carga estándar (*Load Stage* LS de 0 a 12) para ensayos FZG según la norma DIN 51354-2 [24], el cual produce pares nominales de hasta 535 Nm en el nivel máximo que resultan en presiones de contacto en el punto primitivo de hasta 1.8 GPa.

Tabla 2: Rango de aplicación del estudio.

	Símbolo [unidad]	Valor	
		min.	máx.
Velocidad de giro	N_l [rpm]	0	6000
Par de entrada	T_l [Nm]	0	600
Temperatura del aceite	Θ_b [°C]	60	120
Nivel de aceite relativo	h_o/d_2 [-]	0.05	0.5

La pareja de engranajes está lubricada con el aceite de referencia FVA3A, un aceite mineral de grado de viscosidad ISO VG 100 con aditivos EP de extrema presión (4% Anglamol) cuyas características reológicas están bien definidas en laboratorio [25], lo cual es necesario para una correcta predicción del coeficiente de rozamiento [22]. El nivel de aceite mínimo llega hasta a la mitad de la altura del diente de la rueda mientras que la altura máxima implica que el aceite alcanza los ejes (véase la Figura 4). Finalmente, la temperatura nominal del aceite en los ensayos de Otto [23] es de 90°C, pero en este trabajo se ha optado por extender el rango para analizar la influencia de las diferentes condiciones de contorno térmicas en el modelo dinámico.

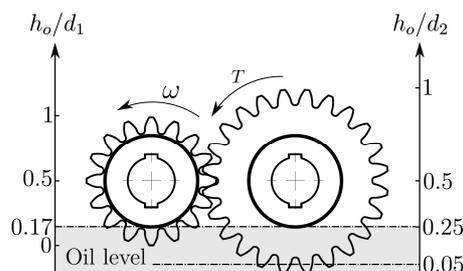


Figura 4: Representación gráfica de los niveles de aceite considerados

3.2. Temperatura y distorsión térmica

La Figura 5 recoge las temperaturas predichas por la Ecuación 5 en condiciones cuasi-estáticas, con el calor calculado siguiendo el procedimiento habitual [26] y considerando que las resistencias de convección cambian con la temperatura instantánea. Los resultados son coherentes con los obtenidos por Otto [23] con temperaturas de hasta 160°C en los niveles de carga y velocidades más elevados incluso cuando el nivel de aceite alcanza los ejes. Por su parte, la diferencia de temperatura con la rueda puede llegar a ser de hasta 30°C cuando los niveles de inmersión son bajos, es decir, cuando el nivel de aceite baja por debajo del radio exterior del piñón, de modo que la rueda sigue inmersa en aceite mientras el piñón no lo está, con la consiguiente reducción de la transferencia de calor por convección con el aceite.

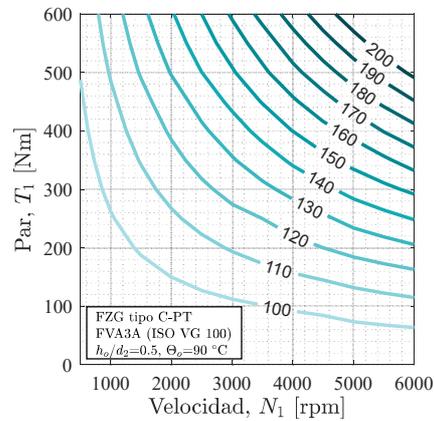


Figura 5: Predicción de la temperatura del piñón para el rango de velocidad y par estudiado a temperatura y nivel de aceite constantes

Para facilitar el estudio se identifican tres niveles de temperatura y diferencias térmicas entre el piñón y la rueda. Así, se considerarán temperaturas de 20°C, 90°C y 160°C para el piñón y diferencias de temperatura entre piñón y rueda, de 0°C, 15°C y 30°C, correspondientes a diferentes condiciones operativas. La condición de referencia, correspondiente a una temperatura del piñón de 20°C y 0°C de diferencia con respecto de la rueda, se considera representativa de las condiciones habituales en las simulaciones donde no se analiza el impacto de la temperatura en condiciones cuasi-estáticas o dinámicas.

La Figura 6 muestra la magnitud de las dilataciones del piñón y de la rueda en los niveles de temperatura considerados. A escala real, las dilataciones no son apreciables, ya que el tamaño de los engranajes es relativamente pequeño, sin embargo, si se analizan los diagramas K se observa que la dilatación produce un error de inclinación que alcanza la mitad del juego disponible, incluso para rangos de temperatura estándar de los ensayos (90°C). En el caso de la rueda, la desviación en la cabeza supera incluso la tolerancia de fabricación con respecto de la medida teórica. Es de prever que la combinación de diferentes temperaturas entre piñón y rueda reduzca el juego disponible y produzca errores de inclinación del perfil que afecten a la distribución de carga y el error de transmisión.

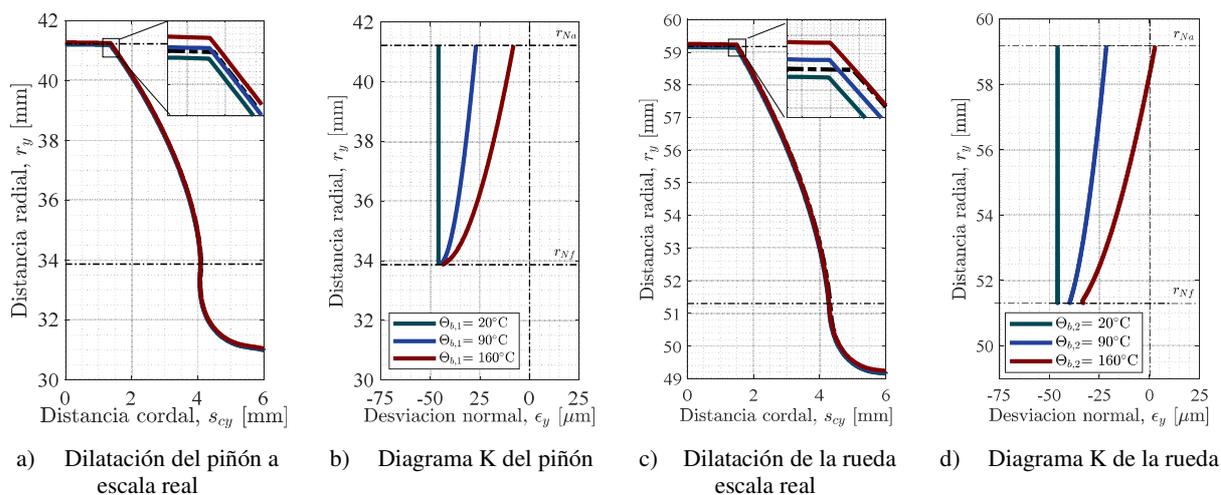


Figura 6: Magnitud de las dilataciones y desviaciones normales del piñón y la rueda

En la Figura 7 se analiza el impacto de las desviaciones normales a lo largo de la línea de acción tanto de manera individual como combinada. Como se puede observar en la Figura 7a tanto el piñón como la rueda presentan errores de inclinación de perfil que tienden a compensarse entre sí. Así la mayor desviación del piñón se encuentra hacia el punto normalizado E de fin del engrane mientras que el de la rueda está en el punto A, al inicio del mismo.

Esto indica que, por regla general, cuando no exista diferencia de temperaturas entre piñón y rueda los errores de inclinación se compensan. La Figura 7b) confirma lo observado para las tres temperaturas seleccionadas. Cuando el incremento de temperatura es idéntico en ambos engranajes sólo se produce una reducción del juego disponible. No obstante, cuanto mayor sea la diferencia de temperaturas mayor es el error de inclinación relativo y por lo tanto se produce un diagrama de desviaciones a lo largo de la línea de acción en forma de diente de sierra. Este diagrama corresponde al error de transmisión sin carga para este tipo de aplicaciones.

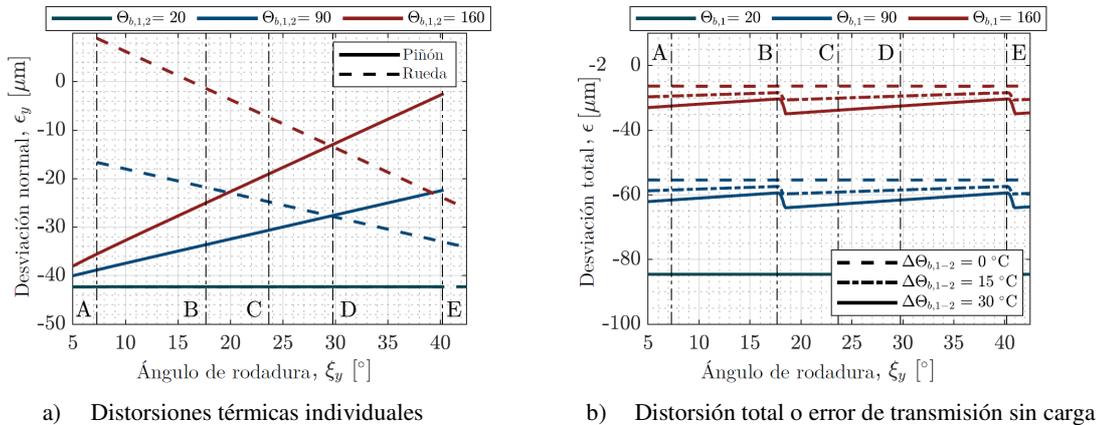


Figura 7: Distorsiones térmicas individuales y desviaciones totales a lo largo de la línea de acción

Las desviaciones observadas producen dos alteraciones en la ecuación del movimiento (Ecuación 1). Por un lado, la reducción del juego y el error de inclinación observados repercuten en la función no lineal $g[x(t)]$ de la ecuación de movimiento, que regula la separación del dentado y por lo tanto determina el régimen de impactos. Por otro lado, las desviaciones de perfil implican una excitación adicional a la izquierda de la Ecuación 1a). En la sección 3.4 se analizará el impacto dinámico de estas distorsiones geométricas, pero antes se presenta el comportamiento cuasi-estático a modo de referencia.

3.3. Resultado térmico cuasi-estático

La Figura 8 muestra la influencia de las desviaciones precedentes en el error de transmisión bajo carga. Se escoge para el análisis el nivel de carga 5, correspondiente a un par en el piñón de 94.1 Nm que produce 773 MPa de presión de contacto en el punto primitivo C. Como se puede observar en la Figura 8a) la curva de referencia a temperatura ambiente se sitúa en torno a los 100 μm de desfase medio con respecto a la posición teórica. Sin embargo, incrementos de temperatura sucesivas aumentan su valor medio acercándolo a cero, lo que indica que efectivamente el juego interdentado se ha visto reducido. Por su parte, la Figura 8b) muestra el comportamiento de la curva a 90 $^\circ\text{C}$ cuando es sometido a sucesivas diferencias de temperatura con la rueda. El error de inclinación observado en la Figura 7b) se suma al error de transmisión bajo carga de la Figura 8a) con la consiguiente distorsión del error de transmisión bajo carga.

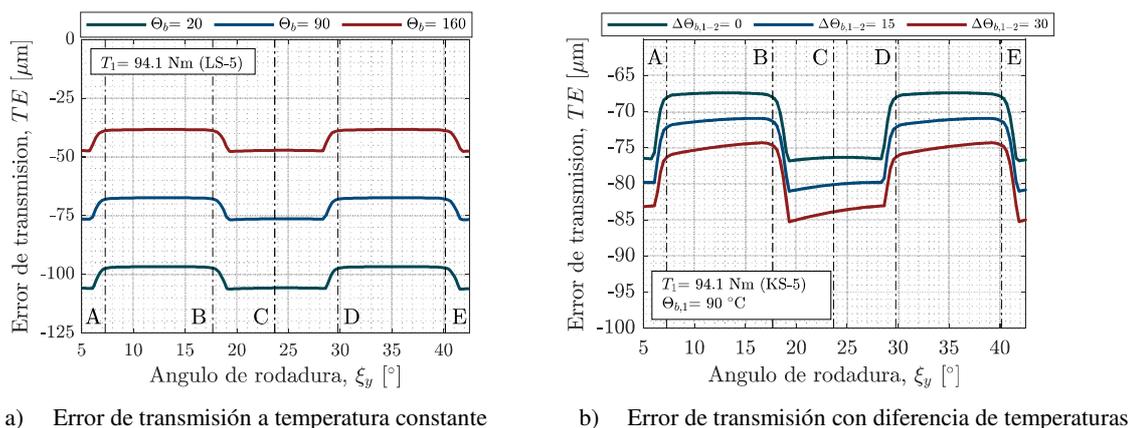


Figura 8: Error de transmisión térmico cuasi-estático en las condiciones seleccionadas

El comportamiento observado tiene el correspondiente impacto en los diagramas de distribución de carga para este mismo nivel de par. Así, la reducción de la holgura observada en la Figura 8a) no debería afectar al aspecto de las curvas de reparto de carga mientras que el error de inclinación relativo mostrado en la Figura 8b) sí lo modificará. Es importante remarcar que, aunque estos resultados son representativos de una única condición de carga y temperatura para engranajes de tamaño medio con un juego estándar, el tipo de error identificado (inclinación de perfil y reducción de juego) es extrapolable a cualquier tamaño de engranaje tal y como se demostró en [18].

La Figura 9, recoge las curvas de distribución de carga para estos niveles de temperatura. Efectivamente, una reducción de la holgura no afecta a la forma general del diagrama (Figura 9a), pero el error de inclinación descrito anteriormente sobrecarga la región de contacto doble hacia la salida del engrane (entre los puntos D y E en la línea de acción) y por lo tanto lo descarga en la zona de contacto doble al inicio del engrane (entre los puntos A y B).

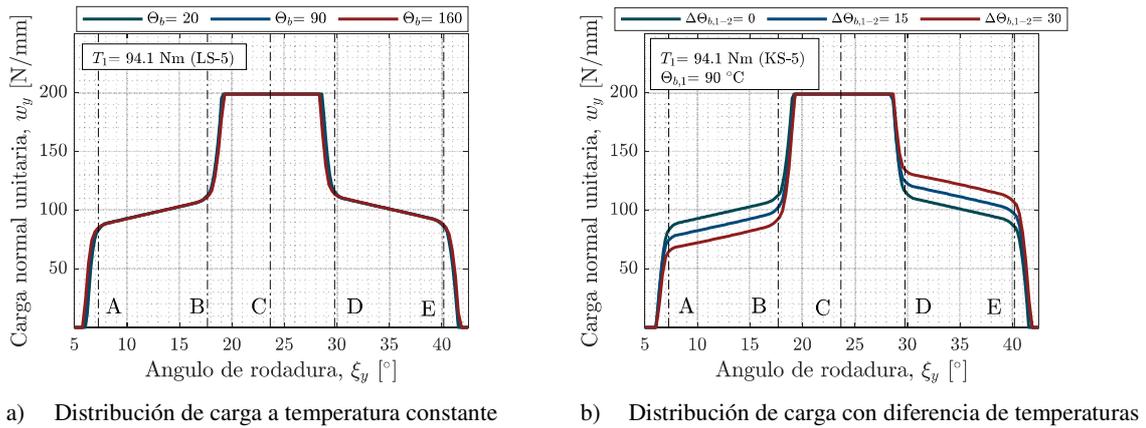


Figura 9: Distribución de carga térmica cuasi-estática en las condiciones seleccionadas

3.4. Resultado térmico- dinámico

Para analizar el impacto de las condiciones dinámicas se ha seleccionado el nivel de velocidad estándar de los ensayos FZG [24] el cual corresponde a 2170 rpm en el piñón produciendo una velocidad tangencial de 8.3 m/s. En lo que sigue, las simulaciones han sido realizadas con un coeficiente de amortiguación constante de $\xi=0.06$.

La Figura 10 muestra el error de transmisión dinámico en las mismas condiciones de temperatura anteriores. Las curvas muestran el rizado característico de las simulaciones dinámicas y aunque el aspecto de las mismas es diferente a las condiciones cuasi-estáticas, es posible extrapolar las conclusiones precedentes con facilidad, no observándose fenómenos adicionales.

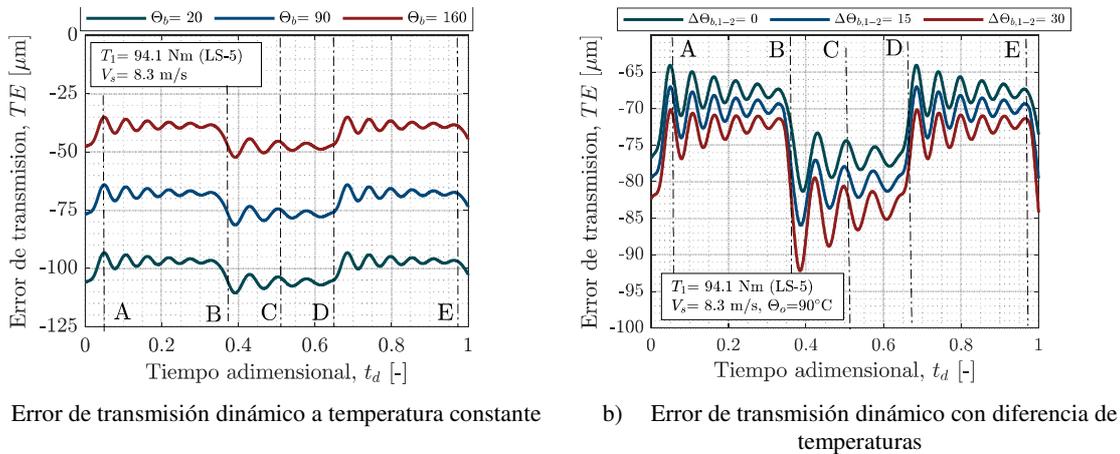


Figura 10: Error de transmisión térmico-dinámico en las condiciones seleccionadas

Desde el punto de vista de la distribución de carga, en la Figura 11 la simulación dinámica produce picos de carga en la transición entre la zona de contacto doble y simple, en los puntos B y D, tal y como se esperaba. El incremento de carga es de en torno a un 24% en condiciones isotermas mientras que en presencia de una diferencia de temperaturas entre piñón y rueda alcanza el 26%, ligeramente superior. A grandes rasgos no se observan diferencias apreciables en el comportamiento dinámico con respecto del cuasi-estático y no hay separación del dentado en ningún momento ya que la carga permanece positiva y mayor que cero en todo momento. En este caso, y del mismo modo que en las curvas de error de transmisión, las conclusiones del análisis estático pueden ser extrapoladas con facilidad, con un incremento de carga en la zona de contacto doble D-E y una reducción de la misma en la región A-B.

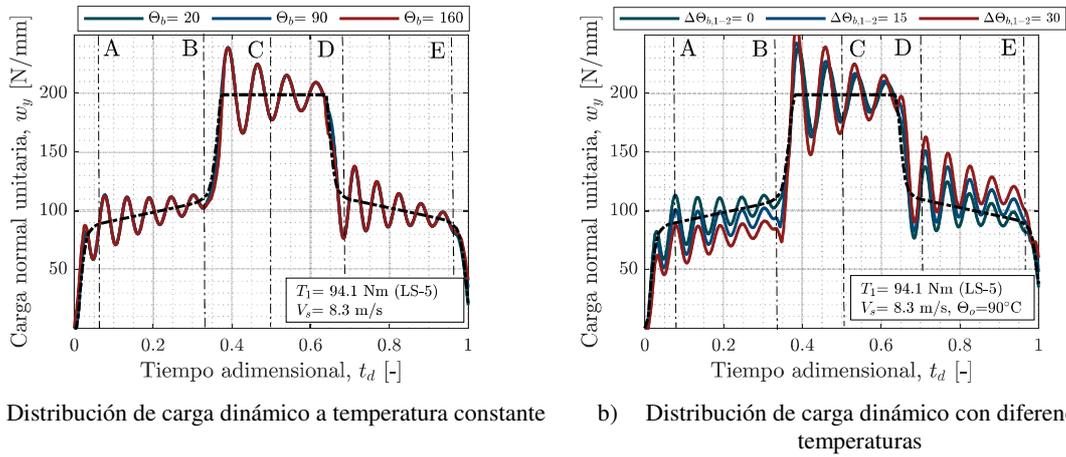


Figura 11: Distribución de carga térmico-dinámico en las condiciones seleccionadas

4. Discusión

Los resultados mostrados en el contexto de este documento corresponden a un único par y nivel de velocidad para tres temperaturas y gradientes distintos y, por lo tanto, las conclusiones no son extrapolables a todo el rango de aplicación. Por ejemplo, para un nivel de par dado se puede producir la separación del dentado y el impacto simple (véase la Figura 1b) a temperatura ambiente pero el impacto puede ser doble en condiciones de temperatura elevada debido a un menor juego disponible. Del mismo modo, comportamientos caóticos observados en niveles de par bajos, pueden verse alterados con la presencia de temperatura.

Con el fin de extender el análisis más allá de la velocidad máxima del caso práctico se realiza una simulación del comportamiento del factor de carga dinámica (ratio entre la carga máxima dinámica F_{dyn} y cuasi-estática F_s) en el rango 0-25.000 rpm. Aunque este nivel de velocidad es poco probable en engranajes rectos, el objetivo es sacar a la luz la existencia de la separación del dentado propia de sistemas no lineales con juego incorporado [27]. Para ello, se realiza un barrido de velocidades en la cual la solución dinámica estacionaria (desplazamientos, velocidades y aceleraciones) de un nivel de velocidad dado N se emplea como condición inicial del siguiente nivel de velocidad $N+1$, tanto en un barrido de velocidades crecientes como decrecientes. Para simplificar el análisis, el cálculo de la distorsión térmica se realiza en condiciones cuasi-estáticas para una temperatura y gradiente entre piñón y rueda impuesto que luego se inyecta en la simulación dinámica como desviación geométrica. Esto permite acelerar el cálculo evitando determinar la condición térmico-dinámica estacionaria para cada nivel de velocidad.

La Figura 12, muestra el resultado de esta simulación. Se observa que, para el nivel de carga y temperaturas impuesto, las curvas de factor dinámico se modifican ligeramente, con valores superiores para el caso térmico sobre el isotermo a temperatura ambiente. Este fenómeno ya fue observado en la Figura 11b) donde la distribución de carga daba lugar a valores máximos superiores en condiciones de diferencia de temperaturas debido precisamente a la presencia de desviaciones geométricas. En la Figura 12 destaca también el salto producido por la separación del dentado en torno a la velocidad de resonancia. Los saltos ascendentes y descendentes para el caso isotermo y térmico se producen en momentos distintos, adelantándose ligeramente en este último, debido precisamente al menor juego disponible. Aunque los saltos mostrados en este diagrama no parecen significativos, queda por analizar el efecto del tamaño de engranaje, así como la existencia de una carcasa que se expande mientras se reduce el juego disponible.

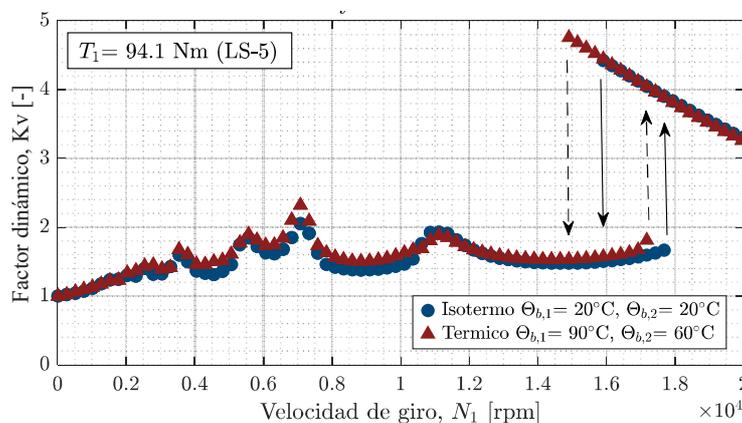


Figura 12: Evolución del coeficiente dinámico K_v para el rango de velocidad considerado

5. Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado un modelo térmico-dinámico acoplado de parámetros concentrados para predecir las condiciones dinámicas y térmicas de una pareja de engranajes rectos. Así mismo, se ha desarrollado un algoritmo eficiente para el cálculo no lineal de la separación del dentado, la carga instantánea, el calor y la distorsión que permite analizar todos los fenómenos de manera acoplada. El método desarrollado ha sido aplicado a un caso práctico y se han determinado la magnitud de las temperaturas y desviaciones normales del perfil como punto de partida del análisis cuasi-estático y dinámico. Se ha mostrado que las condiciones isotermas por encima de la temperatura ambiente sólo modifican el error de transmisión elevándolo una cantidad igual a la reducción del juego mientras que la distribución de carga no se ve afectada. Por el contrario, condiciones con temperaturas diferentes entre piñón y rueda implican un error relativo de inclinación del perfil que repercute tanto en el error de transmisión como en la distribución de carga, modificando su simetría con respecto del punto primitivo. Los resultados muestran que la distribución de carga puede verse afectada significativamente por las distorsiones geométricas inducidas térmicamente, especialmente cuando el piñón y el engranaje están sujetos a diferencias de temperatura. Estos resultados sólo son representativos de una única geometría, la analizada, en condiciones de par y velocidad limitadas, por lo cual es necesario seguir investigando con el fin de encontrar puntos críticos para ambos fenómenos y así compensar o retrasar la aparición de los mismos.

6. Agradecimientos

Los autores de este trabajo quisieran agradecer el apoyo técnico recibido a la empresa EGILE Mechanics S.L.U. así como al Gobierno Vasco por la financiación recibida. Este trabajo de investigación ha sido financiado con los proyectos IMPROVE (ref. ZL-2022/00084) y ALL-E (ref.2022/00441) del programa de investigación competitiva Hazitek en su convocatoria de 2022. Así mismo, agradecemos a Mongragon Goi Eskola Politeknikoa en general y a su grupo de investigación DMLab en particular, el soporte económico y la disposición de los medios técnicos necesarios para el desarrollo del proyecto.

7. Referencias

- [1] Welch, W. P.; Boron, J. F. “Thermal instability in high speed gearing”. *Journal of the American Society for Naval Engineers* 72 (3), 471–486 (1960)
- [2] Martinaglia, L. “Thermal behavior of high-speed gears and tooth correction for such gears”. *Mechanism and Machine Theory* 8 (3), 293 – 303 (1973)
- [3] Akazawa, M.; Tejima, T.; Narita, T. “Full Scale Test of High Speed, High Powered Gear Unit- Helical Gears of 25,000 PS at 200 m/s PLV”. ASME Paper No.80-C2/DET-4, 1980.
- [4] Matsumoto, S.; Tozaki, Y.; Fukutomi, M. “Temperature distribution in teeth and blanks of ultra high-speed gears (1st report, measurement of temperature distribution in teeth and blanks)”. *JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing* 44, 203 – 209 (2001)
- [5] Wang, J. “Numerical and experimental analysis of spur gears in mesh”. Tesis doctoral, Curtin University of Technology, Perth (2003)
- [6] Kashyap, S. et al. “Methods of describing plastic gear geometry after a temperature change with application to the prediction of gear load distribution”. Actas del congreso ASME 2011 Design Engineering Technical Conference, 497 – 505, Washington (2011)
- [7] Tozaki, Y.; Matsumoto, S.; Fukutomi, M. “Temperature distribution in teeth and blanks of ultra-high-speed gears (2nd report, calculation of temperature distribution in teeth and blanks)”. *JSME International Journal, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing* 44, 210 – 216 (2001)
- [8] Luo, B. and Li, W. “Investigation on the influence of heat on the dynamic characteristics of a gear transmission system”. *Engineering Failure Analysis* 116, 104724 (2020)
- [9] Gou, X.; Zhu, L.; Qi, C. “Nonlinear dynamic model of a gear-rotor-bearing system considering the flash temperatura”. *Journal of Sound and Vibration* 410, 187–208 (2017)
- [10] Pan, W. et al. “Nonlinear response analysis of gear-shaft-bearing system considering tooth contact temperature and random excitations”. *Applied Mathematical Modelling* 68, 113–136 (2019)
- [11] Liu, H.; Yan, P.; Gao, P. “Effects of temperature on the time-varying mesh stiffness, vibration response, and support force of a multi-stage planetary gear”. *Journal of Vibration Acoustics* 142, 051110 (2020)
- [12] Arana, A.; Ulacia, I.; Larrañaga, J. “Modelo térmico transitorio de engranajes cilíndricos en condiciones de lubricación mixta” Actas del XXI Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Elche (2016)

- [13] Tamminana, V. K.; Kahraman, A.; Vijayakar, S. “A Study of the Relationship Between the Dynamic Factors and the Dynamic Transmission Error of Spur Gear Pairs”. *Journal of Mechanical Design*, 129, 75–84 (2007)
- [14] Sánchez, M.B.; Pleguezuelos, M.; Pedrero, J.I. “Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears”. *Mechanism and Machine Theory* 139, 506-525 (2019)
- [15] Laruelle, S.N.M. “Etude du comportement thermique d'un motoréducteur”. Tesis doctoral, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon (2017)
- [16] Jaeger, J.C. “Moving sources of heat and the temperature at sliding contact”. *Proceedings of the Royal Society* 76, 205–224 (1942)
- [17] Archard, J.F. “The temperature of rubbing surfaces”. *Wear* 2, 438–455 (1959)
- [18] Arana, A. et al. “Quasi-static transmission error behaviour under the composite effect of temperatura and load”. Actas del congreso AGMA Fall Technical Meeting, Chicago, 20FTM01 (2020)
- [19] Velex, P.; Maatar, M. “A mathematical model for analysing the influence of shape deviation and mounting errors on gear behaviour”, *Journal of Sound and Vibration* 191, 629-660 (1996)
- [20] Ajmi, M.; Velex, P. “A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears”. *Mechanism and Machine Theory* 40, 173 – 190 (2005)
- [21] Guilbert, B.; Velex, P.; Dureisseix, D.; Cutuli, P. “Modular hybrid models to simulate the static and dynamic behaviour of high-speed thin-rimmed gears”. *Journal of Sound and Vibration* 438, 353 – 380 (2019)
- [22] Arana, A.; Larrañaga, J.; Ulacia, I. “Partial EHL friction coefficient model to predict power losses in cylindrical gears”. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 233(2), 303-316 (2019)
- [23] Otto, H.-P. “Flank Load Carrying Capacity and Power Loss Reduction by Minimised Lubrication”. Tesis doctoral, Technische Universität München, Munich (2009)
- [24] DIN standard 51354-2:1990-04 “Testing of lubricants; FZG gear test rig; method A/8,3/90 for lubricating oils” Deutsches Institut für Normung e.V., Munich (1990)
- [25] Bader, N. F. “Traction in EHL contacts - The influence of local fluid rheology and temperatures”. Tesis doctoral, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Hannover (2018)
- [26] Jurkschat, T.; Lohner, T.; Stahl, K. “Improved calculation method for load-dependent gear losses”. *Forschung im Ingenieurwesen* 81, 109-115 (2017)
- [27] Kahraman, A.; Blankenship, G.W. “Experiments on Nonlinear Dynamic Behavior of an Oscillator With Clearance and Periodically Time-Varying Parameters”. *Journal of Applied Mechanics* 64, 217-226 (1997)