



Mecanismos sencillos de actuación en piezoeléctricos fijados a vigas para control de vibraciones

J. Jiménez Sicardo¹, A. J. Nieto Quijorna¹, Á. L. Morales Robredo¹, C. Ramiro Redondo¹, P. Pintado Sanjuán¹

¹ Departamento de Mecánica Aplicada e Ingeniería de Proyectos. DYNAMO Research Group. Universidad de Castilla La Mancha. Javier.JSicardo@uclm.es, AntonioJavier.Nieto@uclm.es, AngelLuis.Morales@uclm.es, Carmen.Ramiro@uclm.es, Publio.Pintado@uclm.es

En las últimas décadas, se ha observado un notable aumento en el volumen de publicaciones académicas que utilizan actuadores piezoeléctricos en estructuras con el propósito de atenuar vibraciones. En general, se utilizan de forma pasiva o semiactiva mediante la conexión a circuitos de derivación o shunt; aunque también pueden utilizarse de forma activa aplicando directamente tensiones en el actuador piezoeléctrico.

En este trabajo se presenta un caso de estudio simple, consistente en la aplicación de un control de tipo LQR/LQG en una estructura consistente en una viga en voladizo a la que se ha fijado un parche piezoeléctrico muy cercano a la raíz del empotramiento. Esta viga es perturbada a través de su base (con aceleración de magnitud acotada pero desconocida) y la misión de la actuación del piezoeléctrico es atenuar la vibración del extremo libre de la viga en voladizo.

Como es habitual en este tipo de estudios, la capacidad del control para cancelación de vibraciones se mide mediante el cociente de las PSD del extremo libre frente a la excitación de la base. En el trabajo se comprueba que el desempeño del control LQR/LQG es razonable para esta aplicación.

1. Introducción

Desde el descubrimiento del efecto piezoeléctrico directo [1] e inverso [2] en el siglo XIX, en que se determinó que un material piezoeléctrico trabaja como transductor bidireccional entre los dominios eléctrico y mecánico de modo que pueden servir como sensores y como actuadores electromecánicos, a este tipo de material se le consideran materiales inteligentes y tienen numerosas utilidades prácticas en la actualidad, fruto de trabajos de caracterización y normalización [3], en especial en su uso considerado en régimen lineal sin considerar fenómenos disipativos en ninguno de los dos dominios en que trabaja.

La aplicación de interés en este caso es su uso como actuador para la atenuación de vibraciones en estructuras ligeramente amortiguadas. En este respecto, existen trabajos que abordan la actuación del piezoeléctrico como un elemento fundamentalmente capacitivo, maximizando entonces la disipación de energía mecánica de las vibraciones a través de su vertiente eléctrica añadiéndole circuitos de derivación resistivos (R) o resistivos-inductivos (RL, también conocidos como resonantes al crear un circuito RLC) [4-5] por cada modo de vibración [6]. Estos son los enfoques conocidos como pasivos, aunque para las frecuencias bajas típicas de los primeros modos de vibración de algunas estructuras se requieren valores de inductancia muy altos y poco prácticos de construir, que se abordan más bien mediante un enfoque semiactivo realizando el comportamiento inductivo de forma sintética a través de amplificadores operacionales [7-8], los cuales también permiten sintetizar capacidades negativas dirigidas a suprimir el carácter capacitivo del material piezoeléctrico [9]. Este tipo de metodologías son conocidas y se pueden encontrar explicadas en detalle en manuales como [10-11].

El manual [11] dedica también un capítulo al uso de controles de tipo LQR (*Linear Quadratic Regulator*) y LQG (*Linear Quadratic Gaussian*, que es un controlador LQR al que se le añade estimación de estados internos mediante Filtro de Kalman) para el control de vibraciones. No obstante, la aplicabilidad en el mencionado trabajo termina en osciladores y péndulos invertidos. Otros trabajos más recientes ejecutan estos controles en vigas en voladizo como la que se utiliza en este estudio, pero se observa una notable ausencia en los mismos de ser excitados mediante fuerzas en la base (cuya influencia se mide a través de la aceleración experimentada en la base) y medidos en la punta a través de acelerómetros.

Como ya se ha adelantado, en este estudio se pretende analizar el control LQR y LQG sobre una viga en condiciones empotrada-libre (en voladizo), que recibe perturbaciones desde su base y que tiene un actuador piezoeléctrico fijado en la raíz del empotramiento, el cual se excita de forma activa aplicando tensiones eléctricas comandadas por las acciones de control. Adicionalmente, se aplican limitaciones en la capacidad de control de forma externa al controlador puesto que estas arquitecturas de control son muy eficaces, pero no atienden a restricciones. Esto se hará de forma simulada, y se medirá la eficiencia en la atenuación de vibraciones mediante el cociente de PSD (*Power Spectral Density*) del extremo libre frente a la excitación, tanto del sistema controlado como no controlado, considerando un solo modo de vibración en el análisis, que puede ser de interés en otras aplicaciones.

El resto de este trabajo se estructura como sigue: en la Sección 2 se modela el sistema en el dominio de la frecuencia, con atención al cálculo del acoplamiento electromecánico piezoeléctrico, introduciendo también el principio práctico de uso del controlador LQR y el filtro de Kalman, con el que se consigue el controlador LQG. La Sección 3 introduce un ejemplo de aplicación en que se observa cómo los controles ofrecen resultados similares, con la diferencia de que solo el control LQG sería técnicamente factible si se emplean acelerómetros para medida de las salidas. La Sección 4 muestra los resultados obtenidos mediante estos controles, acabando en la Sección 5 con unas breves conclusiones y líneas de trabajo propuestas para la aplicación práctica de estos controles.

2. Modelado

Esta sección describe el modelado matemático del sistema que se analiza, a partir del modelo de viga de Euler-Bernoulli en voladizo (empotrada-libre), sometida a aceleraciones en su base y con un actuador piezoeléctrico fijado lo más cerca posible a este extremo fijo, que introduce momentos que pueden considerarse puntuales en los dos extremos de esta unión piezoeléctrico-viga. Se disponen acelerómetros de medición en la mitad de su longitud suspendida y en su extremo, tal como puede verse en el diagrama de la Figura 1, aunque en este trabajo solo se utilizarán las mediciones del extremo.



Figura 1: Diagrama sucinto de la disposición de elementos en el sistema bajo estudio.

Para facilitar el control, el sistema se presenta en espacio de estados y se introducen los conceptos básicos mínimos indispensables para comprender estas estrategias de control y su utilidad en la aplicación práctica en este trabajo.

2.1. Viga de Euler-Bernoulli con momentos externos

El modelo de viga de Euler-Bernoulli de la Ecuación (1), con momentos externos aplicados añadidos M_a , calcula deflexión de una viga (unidimensional) $w(x, t)$ según coordenadas longitudinales y temporales, mediante una ecuación en derivadas parciales

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \nu I \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f + \frac{\partial M_a}{\partial x} \quad (1)$$

Siendo E es el módulo de elasticidad, I el momento de inercia de la sección de la viga, ν es el coeficiente de Poisson, y ρ es la masa de la viga por unidad de longitud. Las acciones f y M_a son, respectivamente, fuerzas y momentos aplicados por unidad de longitud en la viga. El término M_a se introduce debido a las acciones del piezoeléctrico en la viga. Esta Ecuación (1) queda más sencilla de leer utilizando notación de Newton (·) para derivadas temporales y la notación de Lagrange (') para derivadas espaciales. Entonces, obviando además las dependencias de la deflexión w , la Ecuación (1) queda

$$EIw^{(IV)} + \nu I\dot{w}^{(IV)} + \rho\ddot{w} = f + M_a' \quad (2)$$

que se puede resolver mediante separación de variables, resultando $w(x, t)$ descompuesta en suma de funciones de forma modal $W_i(x)$ y coordenadas modales $q_i(t)$ para cada modo i (superposición modal), de modo que si se consideran n modos de vibración (truncamiento modal), se tiene

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n W_i(x) q_i(t) \quad (3)$$

En condiciones de contorno empotrado-libre, la forma modal $W_i(x)$ se puede expresar [12] como

$$W_i(x) = \sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x) - \frac{\sin(\beta_i l) + \sinh(\beta_i l)}{\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)} (\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)) \quad (4)$$

siendo los valores de β_i dados en la mencionada referencia para cada modo. Así, la Ecuación (3) se puede introducir en (2) y, mediante integración a lo largo de la viga e identificando los parámetros de adimensionalización como $\omega_i^2 = EI\beta_i^4/\rho$ y $2\xi_i\omega_i = \nu I\beta_i^4/\rho$, se tiene

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{m_i} \int_0^l W_i(f + M_a') dx \quad (5)$$

ecuación que no queda completamente adimensionalizada porque las masas modales afectan a las fuerzas y momentos aplicados. No obstante, por definición, la masa modal $m_i = \rho \int_0^l W_i^2 dx$ equivale a la masa suspendida de la viga para cualquier modo de vibración empotrado-libre.

Las fuerzas aplicadas f son las fuerzas de inercia debidas a las aceleraciones en la base del extremo empotrado (a_b , siendo $f = -\rho a_b$), de modo se puede denominar Q_i al efecto masa causado por la inercia

$$Q_i = -\rho \int_0^l W_i dx \quad (6)$$

resultando entonces

$$\frac{1}{m_i} \int_0^l W_i f dx = \frac{Q_i}{m_i} a_b \quad (7)$$

El añadido del piezoeléctrico supone entonces que los momentos aplicados M_a' , tras un análisis fruto de la aplicación del Principio de Hamilton resultan ser las acciones del acoplamiento electromecánico θ_i según modo de vibración y la tensión aplicada al piezoeléctrico u_p , de forma que, a partir de las propiedades electromecánicas del piezoeléctrico, sus dimensiones y su colocación relativa a la fibra neutra de la viga resulta que $M_a' = \theta_i u_p$, con

$$\theta_i = e_{31} b_p \frac{h_b + h_p}{2} \int_{x_{1p}}^{x_{2p}} \frac{d^2 W_i}{dx^2} dx \quad (8)$$

de modo que x_{1p} y x_{2p} son respectivamente los extremos del piezoeléctrico más próximo y lejano a la raíz del empotramiento, b_p es la anchura del material piezoeléctrico, h_b y h_p son los respectivos espesores de la viga y del piezoeléctrico y $e_{31} = d_{31}/s_{11}^E$ es una relación entre la constante de carga d_{31} y la flexibilidad (inversa del módulo de elasticidad) del piezoeléctrico en cortocircuito s_{11}^E , ambas en eje perpendicular al de polarización eléctrica, que son parámetros de catálogo. Todas estas integrales se pueden calcular de forma numérica.

Así pues, incorporando los resultados (6-7) y (8) en (5), se obtiene la ecuación de movimiento de la viga equipada con parche piezoeléctrico

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{Q_i}{m_i} a_b + \frac{\theta_i}{m_i} u_p \quad (9)$$

en la que se puede comprobar claramente que la dinámica vibratoria de la viga en cuestión es excitada, por una parte, a través de las aceleraciones que experimenta en su base (a_b) y, por otra, de la dinámica adicional que se introduce en ésta a través de aplicar una tensión u_p al piezoeléctrico, que son respectivamente perturbación y acción de control en este sistema.

2.2. Descripción en espacio de estados

La descripción de un modelo en espacio de estados permite trabajar con sistemas dinámicos con un número arbitrario de entradas y/o salidas, lo cual es de utilidad para sistemas de control avanzado. Esta descripción matricial, en forma de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con entradas externas, es equivalente a tener una matriz de funciones de transferencia entre cada entrada y cada salida, permitiendo calcular por separado (suponiendo descripción continua) la tasa de variación $\dot{x}(t)$ de estados internos del sistema y los valores de las observaciones (mediciones) $y(t)$ como funciones de los estados actuales $x(t)$ (a los que se debe la evolución propia interna del sistema) y de las actuaciones $u(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (10)$$

No se debe confundir el conjunto de estados $x(t)$ del modelo en espacio de estados con las posiciones x de la viga, por lo que se hará distinción expresa entre ellas cada vez que se mencionen.

Para tratar las acciones de control u y las perturbaciones d por separado, se puede dividir las matrices B y D , resultando entonces $Bu = [B_u|B_d][u|d]^T = B_u u + B_d d$ y procediendo de manera análoga con D . De esta manera, la Ecuación (9) da lugar a dos estados $x(t) = [x_1, x_2]^T = [q_i, \dot{q}_i]^T$ por cada modo i , y dos acciones en total (control u_p y perturbación a_b), por lo que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ \ddot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_i/m_i \end{bmatrix} u_p + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_i/m_i \end{bmatrix} a_b \quad (11)$$

Por cada modo de vibración que se considere (se puede componer para un número cualquiera de modos de vibración). Para las salidas, se debe tener en consideración qué se mide (posición, velocidad, aceleración) y la superposición modal de la Ecuación (3). Como se decide disponer de un acelerómetro en el extremo libre de la viga, entonces $y(t) = \ddot{w}(L, t) = W_1(L)\ddot{q}_1$, lo que significa

$$y(t) = [\ddot{w}(L, t)] = W_1(L)[- \omega_i^2 \quad -2\xi_i\omega_i] \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ W_1(L)\theta_i/m_i \end{bmatrix} u_p + \begin{bmatrix} 0 \\ W_1(L)Q_i/m_i \end{bmatrix} a_b \quad (12)$$

La medida de aceleración dada por la salida $y(t)$ solo considera los modos de vibración modelados. Una medición real podría ver afectadas sus componentes en frecuencias naturales más altas debido a no haber sido modeladas.

En este trabajo, el control LQR y LQG se hace simulando el sistema continuo, por lo que no se necesita trabajar en la discretización temporal de las matrices del sistema.

2.3. Control LQR

Los controles LQR (*Linear Quadratic Regulator*) son bien conocidos en la actualidad. Reciben su nombre de ser reguladores lineales que dan respuesta a una función de costes de tipo cuadrático a través de la realimentación del vector de estados, motivo por el que este tipo de controles son considerados avanzados debido a que permiten control de sistemas con múltiples entradas y salidas. En particular, el propósito de un controlador LQR es el de encontrar una ganancia asintóticamente estabilizante óptima K^* de modo que las acciones de control óptimas $u^*(t)$ realimenten al vector de estados $x(t)$ con una ley lineal

$$u^*(t) = -K^*x(t) \quad (13)$$

Estas acciones óptimas (13) se deciden en tanto que minimizan un funcional de costes J_{LQR} tal como

$$J_{LQR} = \int_0^\infty y(t)'Qy(t) + u(t)'Ru(t)dt \quad (14)$$

donde la matriz Q que penaliza los errores de seguimiento debe ser al menos semidefinida positiva; y R penaliza el uso de acciones de control, que debe ser definida positiva. La elección de estos parámetros se hace en virtud del tipo del control que se desea a sabiendas de que mantener las proporciones de ambas matrices constante, se llega al mismo valor de K^* : más peso relativo de Q sobre R implica un control más agresivo.

Esta optimización puede hacerse *offline* solo con la información del sistema dinámico y termina resultando en la ya mencionada ganancia K^* con la que realimentar el vector de estados de manera óptima para unos Q y R dados. La resolución de la minimización del funcional de la Ecuación 14 es también conocida (ecuación de Riccati) y se resuelve de forma automatizada en la mayoría de software de control, entre ellos MATLAB. Por otra parte, se hace notar que, como la aplicación que se busca es de mitigación de aceleraciones, el funcional J_{LQR} de la Ecuación

(14) penaliza las salidas $y(t)$ en vez de los estados $x(t)$ y que, como la aceleración deseada es nula en todo caso: cualquier aceleración que se registre es su propio error (que se pretende eliminar).

Sin limitaciones externas, un sistema como el de las ecuaciones (10) controlado a la perfección con esta ganancia tomaría la dinámica de un sistema autónomo afectado únicamente por las perturbaciones (no se muestran), tal que

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A - BK^*)x(t) \\ y(t) &= (C - DK^*)x(t)\end{aligned}\quad (15)$$

No obstante, por idílicas que las dinámicas del sistema (15) puedan resultar, se ponen de manifiesto varias limitaciones que impiden su materialización en lo que respecta a este trabajo: en primer lugar, en este experimento los estados $x(t)$ son las coordenadas modales temporales, que no son medibles directamente y mucho menos accesibles o medibles por separado con un acelerómetro, única medida disponible. También, esta optimización se hace irrestricta, es decir, no considera ninguna limitación física del sistema ni de la actuación, pudiendo llegar a comandar acciones u_p fuera de su rango de actuación (o peor, peligrosas para su operación real, aunque no es el caso para este trabajo). En particular, la primera de las limitaciones indicadas hace imposible trabajar realmente con un control LQR.

Para solventar estas dificultades, al no poder materializar un control LQR para este caso debido a la imposibilidad de medir estos estados $x(t)$, sí se pueden estimar a través de las observaciones $y(t)$ para obtener unos estados estimados $\hat{x}(t)$, que es lo que se hará en el siguiente apartado a través de un filtro de Kalman. Para tomar en consideración las limitaciones de tensión, de forma externa al control se impondrá una saturación.

2.4. Control LQG

Como ya se ha adelantado, con una medida en aceleraciones no se obtiene información suficiente para obtener los estados $x(t)$ a través de medición directa, por lo que es necesario estimarlos a través de la aceleración que se mide en la punta. En palabras sencillas, si el LQR responde a la pregunta “¿qué ganancia se debe aplicar a los estados $x(t)$ para calcular las acciones de control $u(t)$ si se ven estas salidas?”, el estimador entra a responder “¿qué estados $\hat{x}(t)$ se tienen si se observa esta salida?”, haciendo posible aplicar las ganancias LQR. El encadenamiento de un controlador LQR con un estimador no tiene una denominación específica como tal; pero en el caso de que el estimador sea un filtro de Kalman [13] sí la tiene: se trata de un controlador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*). El uso de un circunflejo ($\hat{\cdot}$) sobre un valor indica que se trata de una estimación.

Las ecuaciones de cualquier estimador asumen que el sistema (10) se encuentra afectado de errores/ruidos en las acciones y en las medidas, por lo que resulta ser más bien, obviando dependencias temporales, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_d d \\ y &= Cx + D_u u + D_d d + n\end{aligned}\quad (16)$$

donde por necesidad ya se consideraban las componentes de ruido/incertidumbres d en las entradas al proceso aunque en este caso las medidas y se ven también afectadas por las componente de ruido en las medidas n . En el caso de uso del filtro de Kalman, se asume que estos ruidos son de tipo gaussiano, para lo que este tipo de estimador es óptimo al minimizar la covarianza del error de la estimación en estado estacionario ($e = x - \hat{x}$). En general, cualquier estimador de estados es otro sistema dinámico que realiza las estimaciones de (16) de la forma

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= A\hat{x} + B_u u + B_d d + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} D_d \\ 0 \end{bmatrix} d\end{aligned}\quad (17)$$

con salidas explícitas en $\hat{y}$ para los estados estimados $\hat{x}$. La ganancia de estimación L se aplica a la diferencia entre las medidas obtenidas y las inferidas. La determinación de esta ganancia L en un estimador óptimo se suele hacer minimizando el funcional

$$J_{EST} = \int_{-\infty}^t n(\tau)' Q n(\tau) + d(\tau)' R d(\tau) d\tau \quad (18)$$

que tiene asociada su correspondiente ecuación de Riccati. En el caso de un filtro de Kalman con ruidos gaussianos, el funcional de costes J_{EST} tiene su equivalencia en la minimización de la covarianza del error de estimación. Esto no garantiza de por sí una estabilidad asintótica, pero sí una estabilidad BIBO (*Bounded Input Bounded Output*).

La elección de los parámetros matriciales Q y R (ambas necesariamente definidas positivas) para obtener la ganancia L del estimador sigue una lógica similar a la del LQR, aunque más que penalizaciones tienen un sentido de indicadores de la “desconfianza” en el parámetro opuesto (respectivamente, técnicamente son las covarianzas de ruido y medida): una Q alta implica cambios rápidos en la estimación que siguen los de la medida al suponerla fidedigna y poco afectada de ruido; y una R alta implica más lentitud en el cambio de estimación al suponer que los cambios bruscos de la medida son debidos a perturbaciones que rechazar. Se refiere al lector a literatura especializada en caso de necesitar profundizar en estos conceptos. El uso de sensores suficientemente precisos, leídos con un adecuado acondicionamiento de señal, motiva la elección de Q elevadas frente a R .

3. Materiales y métodos

Para tener datos fieles a la realidad, el modelado del sistema se hace tomando como base un espécimen real del laboratorio, que es una pletina como la que aparece en la Figura 2, que tiene un parche piezoeléctrico adherido a la estructura base muy cercano a este extremo, modelo P-876.A15 (de material PIC255) de PI Ceramic [15]. El modelo de esta pletina será simulado suministrándole perfiles temporales de aceleración en el empotramiento provenientes de ensayos reales, dejando los electrodos del piezoeléctrico en abierto. Estas magnitudes de interés se muestran en la Tabla 1. También se muestran el tiempo de muestreo y el rango e intensidades de excitación del ensayo (*random*), suficientes como para modelar dos modos de vibración, aunque en el trabajo actual se utilizará solo uno para comprobar las características del control. El ensayo real tiene una duración de al menos 90 segundos.

Tabla 1: Dimensiones y características de los especímenes y ensayos previos.

Descripción	Valor	Unidades
Longitud libre de pletina	294.5	mm
Anchura de pletina	35.2	mm
Espesor de pletina	2.98	mm
Densidad volumétrica	2720	Kg/m ³
Ancho piezoeléctrico	35	mm
Distancia x_{1p}	4	mm
Distancia x_{2p}	64	mm
Constante de carga piezo	$-180 \cdot 10^{-12}$	C/N
Flexibilidad piezo	$16.1 \cdot 10^{-12}$	m ² /N
Frecuencia de muestreo	1.652	kHz
Rango de excitación	10 – 240	Hz
Intensidad de excitación	$8 \cdot 10^{-5}$	g ² /Hz

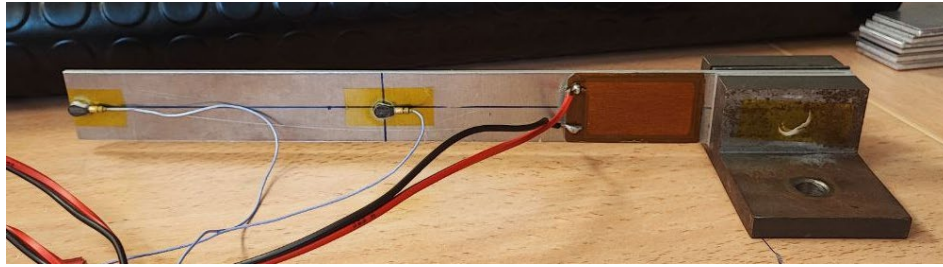


Figura 2: Detalle de pletina real objeto de modelado y simulación.

Para comprobar el funcionamiento de los controles LQR y LQG y sus limitaciones tomando en consideración como restricciones impuestas de forma externa las tensiones máximas que se pueden aplicar, se eligen una serie de parámetros fijos teniendo en cuenta que los parámetros Q han de ser grandes en comparación con R en ambos casos. Esto se debe a que para el LQR interesa más el seguimiento de la referencia que el coste de la actuación (aunque, como se indicó anteriormente, R debe ser estrictamente positivo); y para el filtro de Kalman se saben las propiedades de resolución y ruido de la acelerometría, pero la excitación puede considerarse aleatoria, por tanto desconocida a priori en un caso real. Los límites de tensión simétricos son elegidos de forma intencionada como ejemplos para limitar la actuación posible del piezoeléctrico salvo el último de ± 100 V que es suficiente para mitigar la vibración inducida desde la base a la intensidad de excitación de los ensayos. Esto resulta en los parámetros fijados según la Tabla 2.

Tabla 2: Características del controlador LQR y Filtro de Kalman.

Descripción	Valor	Unidades
Penalización de errores Q LQR	1	—
Penalización de acción de control R LQR	0.01	—
Ponderación medidas Q FK	1000	—
Ponderación perturbaciones R FK	1	—
Límite tensión ensayos	$\pm[10, 20, 30, 100]$	V

En cuanto a la implementación del control simulado, la Figura 3 muestra un diagrama de Simulink simplificado con las señales rotuladas y el controlador LQG señalado específicamente. El retraso unitario de la señal de control es necesario para evitar un bucle algebraico. Los resultados de control de ambos tipos de controladores se discuten en la sección correspondiente.

En caso de que se desee realizar la simulación del control LQR como también se muestra en este trabajo (teniendo en consideración su ya mencionada infactibilidad técnica en la realidad), simplemente habría que aumentar las salidas del sistema de la pletina con una matriz identidad sobre los estados para tener accesibles la aceleración (ya preexistente) junto al acceso directo a los estados internos q y $\dot{q}$, a los que se debe aplicar las ganancias K_{LQR} , resultando la única acción de control V_{IN} saturada.

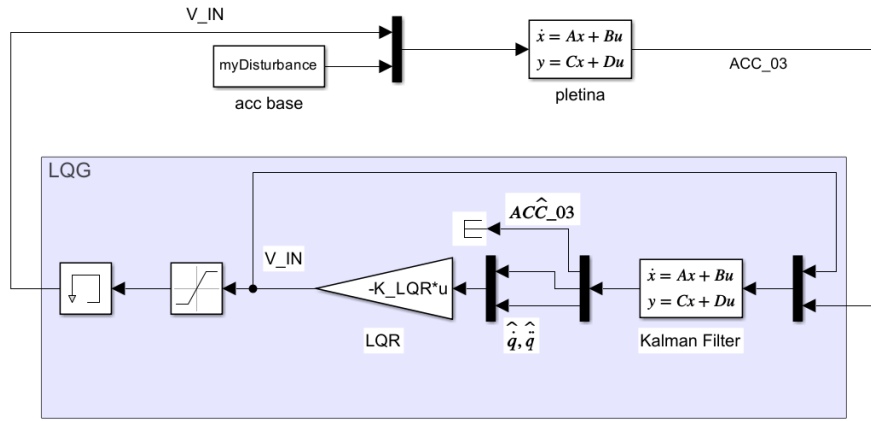


Figura 3: Diagrama simplificado del control LQG.

4. Resultados

En esta sección se muestran los resultados tanto del control LQR (tal como se ha mencionado con anterioridad, supuesto viable al tener acceso directo a los estados) como del control LQG, tomando en consideración distintas limitaciones en la tensión que se le puede aplicar al piezoeléctrico.

Ya comenzando con el cálculo de las ganancias LQR y antes siquiera de aplicar una simulación, se puede observar un gran potencial de atenuación de vibraciones, pasando los polos en bucle abierto del sistema (10) (con los parámetros físicos de la Tabla 1 y parámetros del LQR de la Tabla 2) de un valor de amortiguamiento analítico (adimensional) de $\xi_{abierto} = 0.0034$ (polos complejos conjugados prácticamente imaginarios puros) a $\xi_{LQR} = 0.156$ si se pudieran dar las condiciones para tener un sistema como el de (15). Esto es un incremento en este amortiguamiento en casi 46 veces su valor inicial.

En efecto, el resultado se puede ver aplicando el cálculo de las PSD tanto a la excitación como a las diferentes respuestas del sistema en bucle abierto con los electrodos del piezoeléctrico sin conectar (en circuito abierto), hecho experimentalmente, como a las diferentes respuestas (simuladas) tanto en control LQR como LQG. La figura 4 muestra los cocientes de PSD de aceleración en el extremo libre (ACC_{03} , la salida) frente a la de la base (ACC_{01} , la entrada), de los diferentes límites de tensión de control aplicados tanto del control LQR como del LQG. Se ofrece un detalle de los valores atenuados para más precisión.

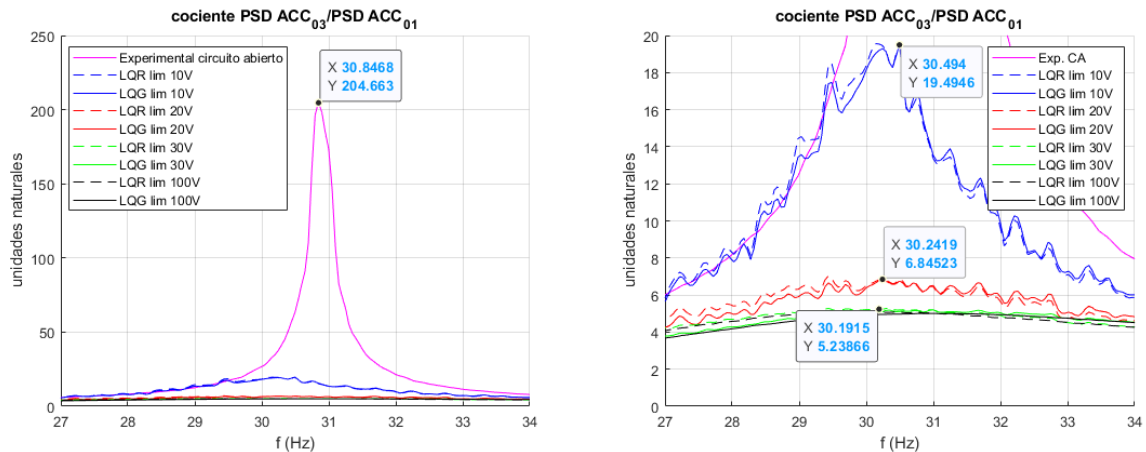


Figura 4: Cocientes de PSD de aceleraciones de sistema excitado en bucle abierto y controlado (izquierda) en vista completa y (derecha) detalle de los sistemas controlados con diferentes limitaciones de tensión del actuador. Los controles LQR se señalan en línea discontinua y los LQG, en línea continua.

Ya en el caso más desfavorable (control limitado a ± 10 V) se puede observar una reducción de un 90.48 % de la salida frente al caso sin controlar. Se ve como la limitación a ± 30 V es prácticamente suficiente para la atenuación de las vibraciones, llegando a (en caso de no limitarse la actuación del piezoeléctrico en la práctica) una atenuación de un 97.44 % frente al caso sin controlar. En la Figura 5 se muestra un detalle temporal de las aceleraciones reales medidas en el ensayo e inyectadas al extremo empotrado de la pletina en las simulaciones junto a las aceleraciones registradas en el extremo libre y sus contrapartes simuladas por control LQG y las acciones de control que se han tomado desde los propios controladores LQG.

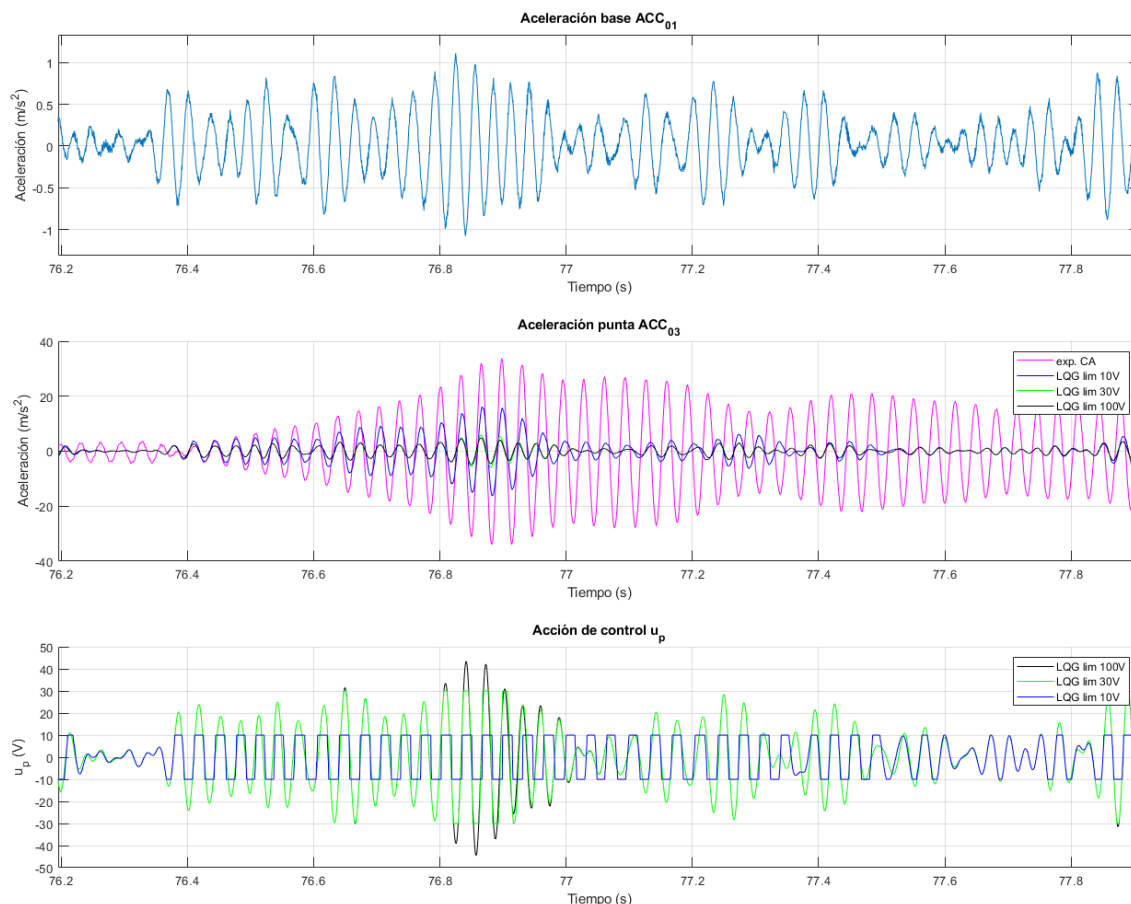


Figura 5: Detalle temporal de excitación, respuestas sin control y controlada y acciones de control.

5. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un control LQR/LQG sobre un modelo simple de viga en voladizo, que trabaja en condiciones de vibraciones forzadas desde su extremo fijo. Un modelo de piezoeléctrico, fijado próximo a la raíz del empotramiento, es capaz de atenuar estas vibraciones de forma razonable incluso en condiciones de limitación de tensión aplicada. En principio, si se tuviera acceso directo a la medición de los estados del sistema, un control LQR sería suficiente y resulta muy rápido de implementar ya que las ganancias de control se calculan simplemente conociendo el sistema. En otro caso, el añadido de un filtro de Kalman supone, a costa de necesitar la realización de los cálculos de estimación de forma adicional, la posibilidad de poder controlar este tipo de sistemas vibratorios. Como trabajos futuros, se propone la implementación de estas arquitecturas de control en un dispositivo que haga las veces de controlador a tiempo real, para el que posiblemente se requiera también la discretización de los modelos desarrollados.

6. Referencias

- [1] Curie, J., Curie, P. “Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées”. *Bulletin de la Société minéralogique de France*. 3 (4): 90–93 (1880)
- [2] Lippmann, G. “Principe de la conservation de l'électricité, ou second principe de la théorie des phénomènes électriques”. *Annales de chimie et de physique*. 24: 145 (1881)
- [3] ANSI/IEEE Standard 176-1987, “IEEE Standard on piezoelectricity”, American National Standards Institute & Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1988
- [4] Forward, R.L., “Electronic damping of vibration of vibrations in optical structures”. *Appl. Opt.* **18**, 690-7 (1979)
- [5] Hagood, N.W., von Flotow, A., “Damping of structural vibration with piezoelectric materials and passive electrical networks”, *J. Sound. Vib.* **146**, 243-68 (1991)
- [6] Hollkamp, J.J., “Multimodal Passive Vibration Suppression with Piezoelectric Materials and Resonant Shunts”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. **5**(1):49-57, 1994

- [7] Antoniou, A., “Realisation of gyrators using operational amplifiers, and their use in RC-active-network synthesis.” *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*. **116**, 11 (1969)
- [8] Vatavu M, Nastasescu V, Turcu F, Burda I., “Voltage-Controlled Synthetic Inductors for Resonant Piezoelectric Shunt Damping: A Comparative Analysis”. *Applied Sciences*, 9(22):4777 (2019)
- [9] Beck, B.S., “Negative capacitance shunting of piezoelectric patches for vibration control of continuous systems.” Tesis Doctoral, Georgia Institute of Technology, Atlanta (2012)
- [10] Moheimani, S.O.R., Fleming, A.J., *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*, Springer, London (2006)
- [11] Preumont, A., *Vibration Control of Active Structures*, Springer, Dordrecht (2011)
- [12] Rao, S.S., *Vibration of Continuous Systems*, 317-392, John Wiley & Sons, Ltd, New Jersey (2006)
- [13] Kalman, R.E., “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.” *Transactions of the ASME--Journal of Basic Engineering*, 82(D):35-45 (1960)
- [14] PI Ceramic, *P-876 DuraAct Patch Transducer*. URL <https://www.piceramic.com/en/products/piezoceramic-actuators/patch-transducers/p-876-duraact-patch-transducer-101790>