



Ensayos Hardware-in-the-Loop de pantógrafos con modelos de catenaria realistas

S. Gregori¹, M. Tur¹, S. Bruni², A. Facchinetti², J. Gil¹, A.M. Pedrosa¹, A. Correcher³, F.J. Fuenmayor¹

¹ Instituto Universitario de Ingeniería Mecánica y Biomecánica (I2MB), Universitat Politècnica de València, sangreve@upv.es, manuel.tur@mcm.upv.es, jaigiro@upv.es, anpedsan@dimmm.upv.es, ffuenmay@mcm.upv.es

² Department of Mechanical Engineering, Politecnico di Milano, stefano.bruni@polimi.it, alan.facchinetti@polimi.it

³ Instituto Universitario de Automática e Informática Industrial, Universitat Politècnica de València, ancorsal@upv.es

En los últimos años los ensayos Hardware-in-the-Loop (HiL) de pantógrafos han centrado el foco de diversos trabajos de investigación debido al elevado potencial que presenta esta técnica para poder sustituir determinados ensayos en vía. Esta metodología se basa en la interacción del pantógrafo real con un modelo numérico de la catenaria. Así pues, en un banco de ensayos HiL, se mide la fuerza aplicada sobre los frotadores del pantógrafo, la cual se aplica al modelo numérico de catenaria. A continuación, se obtiene la respuesta dinámica de la catenaria ante esta fuerza y, finalmente, el lazo se cierra imponiendo el desplazamiento vertical del hilo de contacto calculado a los frotadores del pantógrafo por medio de un actuador lineal. Este proceso se repite cada 2 milisegundos.

Dicha restricción de tiempo real supone tener que recurrir a un modelo de catenaria que por un lado sea lo suficientemente realista para describir el comportamiento dinámico de dicho sistema y, por otro, se pueda resolver lo suficientemente rápido como para aplicarse en ensayos HiL. Debido a esta limitación, en la bibliografía se encuentran modelos de catenaria simplificados para este tipo de ensayos. Habitualmente se trata de tramos cortos, de unos pocos vanos, con alguna condición de contorno especial, como por ejemplo de periodicidad.

En este trabajo se propone la aplicación de ensayos HiL de pantógrafos en tiempo real con un modelo de catenaria de elementos finitos, realista, que incluye dos cantones completos con seccionamiento, en el que el pantógrafo puede interactuar con dos hilos de contacto simultáneamente. Tras describir el algoritmo que se ejecuta durante el ensayo HiL y proponer una estrategia para repartir la fuerza medida en el banco entre los dos hilos de contacto de la catenaria, la fuerza de contacto obtenida se compara con la medida experimental en vía, tanto en el dominio temporal como en frecuencia, obteniendo un grado de similitud notable, dando validez a los ensayos HiL realizados.

1. Introducción

De los más de 15000 km de red ferroviaria de Adif en el estado español, casi 10000 km están electrificados con un hilo conductor que permite la tracción eléctrica, elemento fundamental de lo que se conoce como línea aérea de contacto, o más comúnmente, catenaria. Esta estructura de cables es la encargada de proporcionar la potencia a la unidad motriz por medio del contacto con los frotadores del pantógrafo, mecanismo articulado situado en el techo de la locomotora. En la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria, se produce una fuerza de contacto que determina en gran medida la calidad de captación de corriente. Valores elevados de esta fuerza producen un desgaste severo en los componentes en contacto, mientras que valores muy bajos pueden llegar a provocar despegues y la consecuente aparición de arcos eléctricos, que producen efectos nocivos en el sistema [1].

En las últimas décadas, el problema de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria ha captado la atención de muchos grupos de investigación, dando como resultado una amplia variedad de códigos de simulación numérica [2] que resuelven el problema con elevada precisión. Estas herramientas computacionales son muy útiles para el diseño de nuevas líneas ya que permiten simular multitud de configuraciones distintas de forma rápida y con un coste muy bajo. Sin embargo, para la homologación de nuevos pantógrafos operando bajo una determinada catenaria sigue siendo necesaria la medición de la fuerza de contacto en vía. Esto conlleva un proceso costoso, regulado por la norma EN 50317 [3], que requiere la paralización de la línea y la utilización un tren auscultador con un pantógrafo instrumentado.

Recientemente, en un punto intermedio entre la simulación numérica y las medidas en vía, han emergido los llamados ensayos Hardware in the Loop (HiL) o simulaciones híbridas, en los que la interacción entre un modelo numérico de la catenaria con el pantógrafo real se produce en condiciones controladas de laboratorio. Por un lado, en los ensayos HiL se mantiene la versatilidad y el bajo coste inherente a las simulaciones numéricas, mientras que, por otro, no se incorporan las incertidumbres derivadas de los modelos matemáticos de pantógrafo, que en ocasiones pueden llegar a ser muy complejos [4].

En contrapartida, los ensayos HiL exigen que el modelo de catenaria se resuelva en tiempo real y a la vez que sea lo más realista posible para que los resultados obtenidos sean lo más parecidos posible a las medidas en vía. Este balance entre eficiencia computacional y precisión del modelo suele entrar en conflicto ya que, usualmente, es habitual en la literatura simplificar el modelo de catenaria con diversos enfoques para cumplir con la exigencia de tiempo real [5, 6], alejándolo por tanto del comportamiento dinámico de una catenaria real.

Recientemente, los autores del presente trabajo han realizado avances notables al conseguir realizar ensayos HiL de pantógrafos con un modelo de catenaria realista de un cantón completo de alrededor de 1 km de longitud [7], elaborado mediante el método de los elementos finitos con el mismo nivel de precisión que los modelos utilizados en los softwares de simulación numérica, sin simplificaciones adicionales. En este trabajo, se propone un nuevo avance en el uso de modelos de catenaria realistas en ensayos HiL de pantógrafos, con la utilización de un modelo de catenaria formado por dos cantones con su correspondiente seccionamiento, donde el pantógrafo contacta con los hilos del cantón entrante y saliente de forma simultánea. Adicionalmente, para validar los resultados obtenidos en el ensayo HiL, estos se comparan con medidas realizadas en vía.

Después de esta breve introducción, en el Apartado 2 se describe el banco de ensayos HiL y el procedimiento seguido para realizar los ensayos. A continuación, en el Apartado 3 se presenta el modelo de catenaria utilizado, mientras que en el Apartado 4 se resumen y discuten los resultados más importantes del trabajo. Finalmente, el Apartado 5 recoge las principales conclusiones extraídas.

2. Banco y procedimiento de ensayo

El banco de ensayos de pantógrafos que se ha utilizado en este trabajo para realizar las simulaciones HiL se encuentra en las instalaciones del Instituto de Ingeniería Mecánica y Biomecánica (I2MB) de la Universitat Politècnica de València (UPV) [8]. Como puede observarse en la Figura 1, el banco consiste en una estructura tipo pórtico de perfiles de aluminio que contiene en su parte superior un actuador vertical y otro horizontal para reproducir el movimiento del hilo de contacto de la catenaria. Adicionalmente, un controlador de tiempo real se encarga de enviar las señales a los controladores propios de los actuadores y recibir las de los sensores de medida. Estas medidas provienen de dos células de carga que contactan directamente sobre los frotadores del pantógrafo, con lo que se conoce en todo momento la fuerza que el actuador vertical (o hilo de contacto virtual) ejerce sobre el pantógrafo. En la Figura 1 también se puede observar un circuito neumático necesario para accionar el pantógrafo y regular la fuerza estática que este ejerce. El pantógrafo objeto de estudio en el presente trabajo es el ATR95, utilizado en Italia en trenes de alta velocidad.

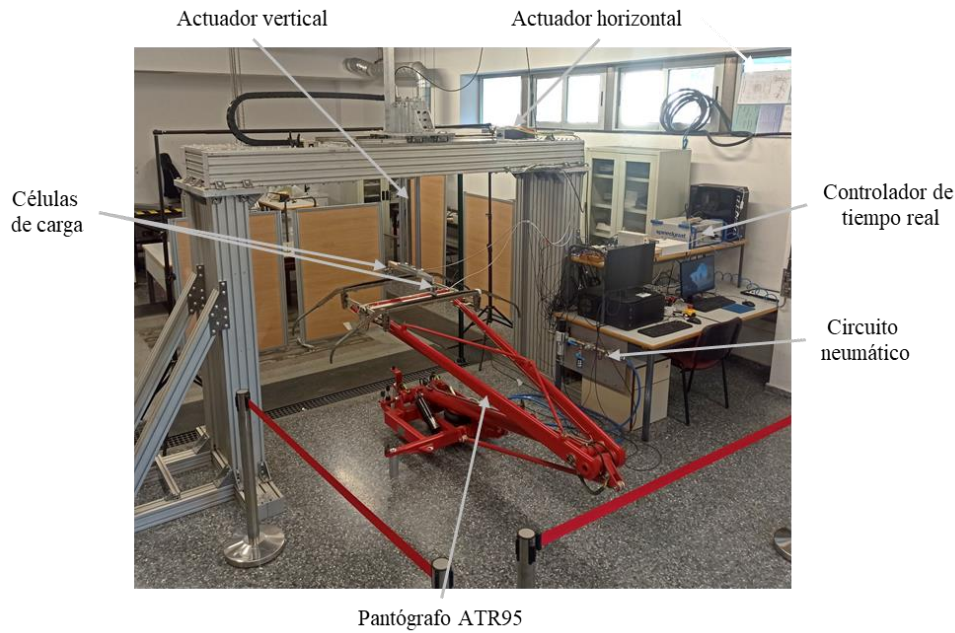


Figura 1: Banco de ensayos HiL con sus principales elementos.

A la hora de realizar un ensayo HiL, en un determinado paso de tiempo se adquieren las señales de las células de carga, tras pasar por un acondicionador de señal, en el controlador de tiempo real que controla el proceso. La suma de ambas fuerzas es introducida como entrada al modelo numérico de la catenaria y a continuación se resuelve la dinámica del sistema en un paso de tiempo [7], obteniendo como resultado la posición vertical del hilo de contacto z_c . Esta posición se envía al motor, el cual intenta alcanzarla mediante un controlador PID. De esta forma se cierra el bucle y se avanza al siguiente paso de tiempo del ensayo. Todo este proceso se repite continuamente cada 2 ms hasta que el ensayo finaliza. Este proceso se puede observar de forma esquematizada en la Figura 2. Como los desplazamientos laterales del hilo de contacto son despreciables frente a los verticales, la posición y_c que sigue el actuador lateral del banco se corresponde con la de la configuración estática del hilo de contacto, obtenida previamente a la realización del ensayo.

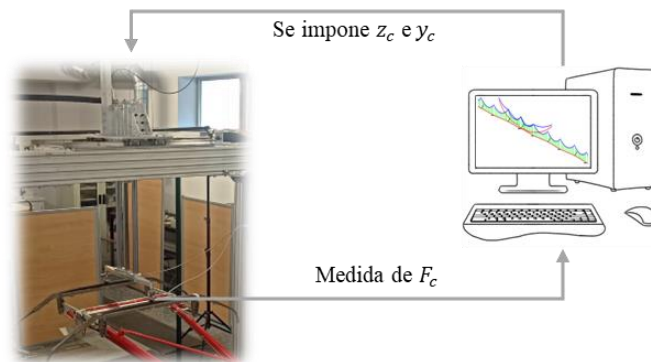


Figura 2: Flujo de información en cada paso de tiempo del ensayo.

3. Modelo de catenaria

El tramo de catenaria seleccionado en este trabajo puede observarse en la Figura 3 donde se incluyen los principales componentes del modelo de catenaria y los puntos kilométricos (PK) de inicio y fin de cada uno de los dos cantones considerados. Se trata de un tramo de la catenaria italiana C270 correspondiente a la línea Turín-Milán. Para elaborar el modelo de la catenaria se aplica el método de los elementos finitos utilizando elementos ANCF con una formulación en coordenadas nodales absolutas. El cable sustentador y el hilo de contacto se modelan con elementos viga, mientras que las péndolas y los brazos de atirantado se modelan con elementos tipo barra. Las grifas de unión entre componentes se incluyen mediante masas puntuales.

En primer lugar, se resuelve el problema de configuración inicial para definir las coordenadas nodales y las longitudes de los elementos de forma que se cumpla el equilibrio estático ante fuerzas gravitatorias y ciertas condiciones de diseño como la tensión mecánica en los cables o la posición de ciertos puntos como los de unión

entre péndolas e hilo de contacto. Se remite al lector interesado a la referencia [9] para obtener detalles sobre la formulación de este problema.

Para la resolución de la dinámica, el problema se linealiza en torno a la configuración de equilibrio inicial, y se transforman las coordenadas a una base modal. Para resolver la dinámica de un paso de tiempo, se aplica el algoritmo de integración temporal de Newmark, dando lugar a la Ec. (1).

$$\mathbf{x}_c^t = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c^{t-1} + \mathbf{B}_c F_c^{t-1} \quad (1)$$

donde $\mathbf{x}_c^t = \{\mathbf{q}_c^t \quad \dot{\mathbf{q}}_c^t \quad \ddot{\mathbf{q}}_c^t\}^T$ es el vector de estado, formado por el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en coordenadas modales, $\mathbf{A}_c$ y $\mathbf{B}_c$ son matrices que dependen de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del modelo, del incremento de tiempo utilizado en la integración temporal, y de los parámetros γ y β que definen el algoritmo de Newmark. Además, pese a utilizar una transformación modal lineal, en la simulación se tiene en cuenta el comportamiento no lineal de las péndolas, que no son capaces de transmitir esfuerzos de compresión. Esto se consigue calculando y añadiendo de forma iterativa al sistema unas fuerzas externas correctoras en las péndolas que han entrado a compresión en cada paso de tiempo [7].

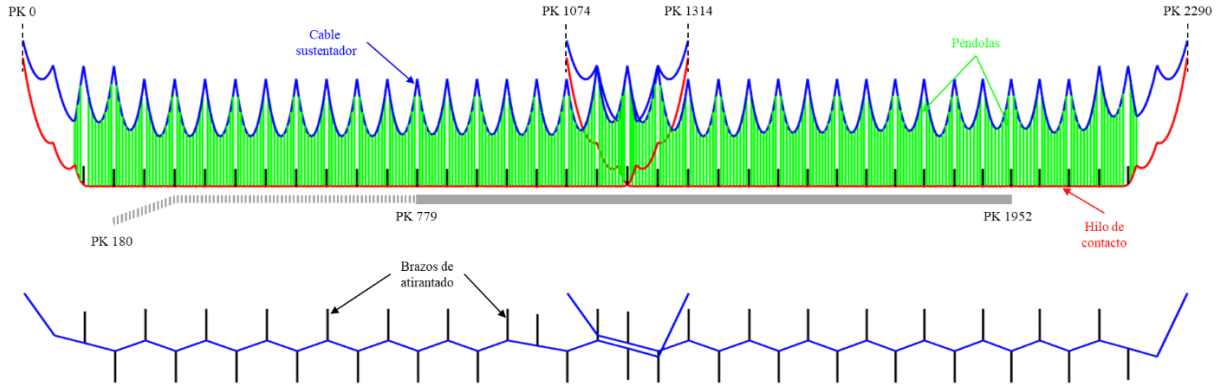


Figura 3: Modelo de elementos finitos de la catenaria. Vista lateral (arriba) y cenital (abajo) de los dos cantones que conforman el modelo.

Si el pantógrafo tan solo interactúa con un único hilo de contacto, la fuerza de contacto medida en el banco F_c se introduce en la Ec. (1) para obtener los desplazamientos, y con estos se calcula fácilmente la posición de referencia a enviar al actuador vertical. Sin embargo, en el seccionamiento entre dos cantones, la fuerza de contacto medida se tiene que repartir adecuadamente sobre cada uno de los hilos de contacto. Con ese propósito, se añade una masa virtual intermedia m_i , unida a los hilos de contacto a través de un resorte de rigidez k_i , tal y como se observa en la Figura 4. Además, este grado de libertad adicional ayuda a mejorar la estabilidad de la simulación HiL sin tener un efecto apreciable en la fuerza de contacto obtenida.

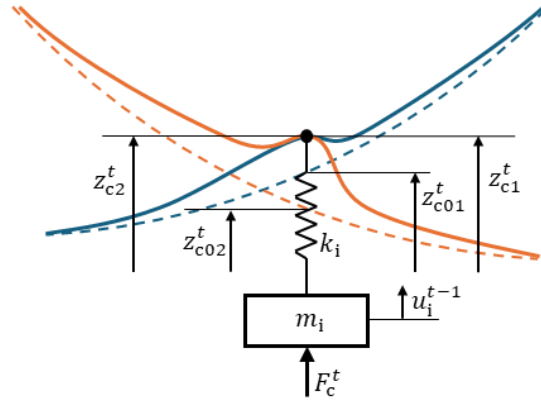


Figura 4: Contacto simultáneo con dos hilos.

La fuerza de contacto que se aplica a cada uno de los hilos se obtiene en dos pasos. En primer lugar, a partir de la fuerza medida en el paso de tiempo anterior F_c^{t-1} y la altura del hilo de contacto en el punto de contacto z_c^{t-1} se obtiene el desplazamiento de la masa intermedia u_i^{t-1} , con lo que la fuerza en el resorte intermedio resulta:

$$F_i^t = k_i(z_c^{t-1} - u_i^{t-1}) \quad (2)$$

En segundo lugar, se impone que en el equilibrio la altura del hilo de contacto de ambos cantones ha de ser la misma y que la fuerza total ha de ser la suma de las fuerzas aplicadas a cada hilo por separado. Esto es:

$$\begin{aligned} F_{c1}^t + F_{c2}^t &= F_i^t \\ z_{c1}^t &= z_{c2}^t \end{aligned} \quad (3)$$

La altura del hilo de contacto depende de la configuración estática y del estado del sistema, pudiéndose expresar como:

$$\begin{aligned} z_{c1}^t &= z_{c01}^t + \hat{A}_{c1} x_{c1}^{t-1} + \hat{B}_{c1} F_{c1}^t \\ z_{c2}^t &= z_{c02}^t + \hat{A}_{c2} x_{c2}^{t-1} + \hat{B}_{c2} F_{c2}^t \end{aligned} \quad (4)$$

donde las matrices $\hat{A}_{c1}$, $\hat{A}_{c2}$, $\hat{B}_{c1}$ y $\hat{B}_{c2}$ se extraen de las matrices que definen la ecuación de estado (Ec. (1)). Finalmente, combinando las Ecs. (3) y (4) se obtienen las fuerzas que se aplican a cada uno de los hilos.

En el ensayo HiL, se ven involucrados tanto el modelo de la catenaria como la masa intermedia, el actuador lineal y el pantógrafo. También aparecen retrasos debido a las comunicaciones y los filtros analógicos aplicados a las medidas. Con todo ello, para estabilizar el sistema, se utiliza un controlador LQG que combina un controlador LQR, para minimizar la diferencia de posición entre el motor y la masa intermedia, con un filtro de Kalman utilizado como estimador de estado.

4. Resultados

Se ha realizado una simulación HiL con el pantógrafo ATR95 y el modelo de catenaria que se observa en la Figura 3. El ensayo empieza en el punto kilométrico (PK) 180 y termina en el 1952. En los primeros pasos de tiempo del ensayo, la posición de referencia enviada al actuador lineal se multiplica por una función rampa para que el inicio del ensayo sea suave. Después se deja un cierto tiempo para que la dinámica de la interacción se estabilice y se disipe el transitorio inicial. Este tramo se remarca con un trazo gris discontinuo en la Figura 3. Finalmente, la sección de análisis comprende el tramo desde el PK 779 hasta el PK 1952 (tramo marcado con trazo gris continuo en la Figura 3), la cual incluye 20 vanos de la catenaria entre los que se encuentra el solape entre los dos cantones, siendo el PK 1194 donde se cruzan los hilos de contacto de los dos cantones.

4.1. Comparación con medidas experimentales

En esta sección se procede a comparar la fuerza de contacto obtenida en el ensayo HiL con la medida en vía según el procedimiento que regula la norma EN 50317 [3]. Se ha utilizado una frecuencia de muestreo de 100 Hz, por lo que se dispone de una discretización temporal de 0.01 s. La velocidad del vehículo durante el tramo analizado era de 301.5 km/h. En la Figura 5 se observan ambas fuerzas representadas frente al PK para el tramo analizado.

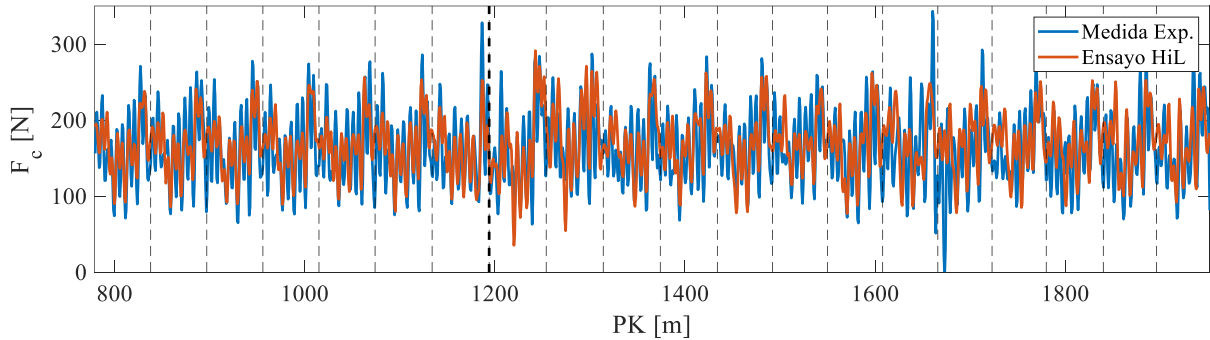


Figura 5: Comparación entre la fuerza de contacto medida en vía y la obtenida en el ensayo HiL. Soportes marcados con las líneas verticales discontinuas.

En general, la tendencia observada es similar en ambas señales, observando claramente un patrón marcado que tiende a repetirse en cada uno de los diferentes vanos de los consta la catenaria (soportes señalados con las líneas verticales en trazo discontinuo en la Figura 5, siendo la de trazo más grueso el soporte donde se cruzan los hilos de contacto en el seccionamiento). Sin embargo, es cierto que existen diferencias apreciables que pueden deberse a multitud de factores, siendo uno de los más significativos es la altura del hilo de contacto. En el ensayo HiL se ha utilizado un modelo de catenaria nominal, con el hilo de contacto situado perfectamente a una altura de 5.3 m respecto del plano de la vía en los puntos de conexión del hilo con las péndolas y los brazos de atirantado. Sin embargo, en la catenaria real, errores en el tendido de los cables o pérdidas mecánicas en las poleas de compensación se traducen en una altura del hilo de contacto que puede diferir de la nominal e influir notablemente en la fuerza de contacto obtenida en las medidas.

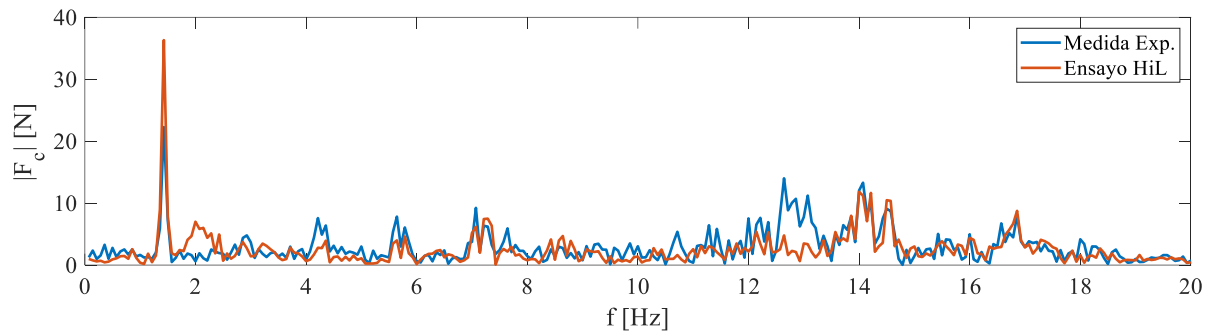


Figura 6: Comparación del contenido en frecuencia de la fuerza de contacto medida en vía y la obtenida en el ensayo HiL.

Estas diferencias se aprecian muy bien en el contenido en frecuencia de ambas señales, obtenido mediante la Transformada Discreta de Fourier. En la Figura 6 se observa cómo, aunque el parecido es más que razonable, en el ensayo HiL se sobreestima el contenido en bajas frecuencias, sobre todo en la frecuencia de paso por vano (~ 1.4 Hz), y se subestima el contenido en frecuencias asociadas al paso por péndola (12.5-13 Hz). Por último, en la Tabla 1 se recoge una comparativa de los principales parámetros estadísticos de la fuerza de contacto medida en vía y de la obtenida en el ensayo HiL. En este caso las diferencias en el contenido en frecuencia se observan en la desviación típica de la F_c considerando solo contenido de 0 a 5 Hz y de 5 a 20 Hz. En el primer caso se obtiene una desviación típica mayor en el ensayo HiL, mientras que en el segundo caso esta es menor a la obtenida con las medidas en vía.

Tabla 1: Comparación de parámetros estadísticos de la fuerza de contacto medida en vía y la obtenida en el ensayo HiL.

	Medida en vía	Ensayo HiL
Velocidad (km/h)	301.7	301.5
Valor medio de F_c (N)	162.6	168.9
Desviación típica de F_c (N)	47.4	39.0
Desviación típica de F_c de 0 a 5 Hz (N)	22.4	30.6
Desviación típica de F_c de 5 a 20 Hz (N)	41.6	32.8
Mínimo absoluto de F_c (N)	0	35.2
Máximo absoluto de F_c (N)	343.1	291.2
Porcentaje de pérdida de contacto (%)	0.07	0

Finalmente, cabe destacar que el ensayo HiL se ha realizado dos veces; una de ellas desactivando el movimiento del actuador lateral que reproduce el descentramiento de la catenaria, obteniendo en ambos ensayos resultados casi idénticos. Esto es debido a que el pantógrafo ATR95 no posee movimiento de giro lateral de la mesilla (balanceo), con lo que su comportamiento dinámico, al menos hasta 20 Hz, no se ve modificado por el punto de aplicación de la fuerza sobre los frotadores.

5. Conclusiones

En este trabajo se propone la realización de ensayos HiL de pantógrafos con un modelo de catenaria realista, sin simplificaciones adicionales a los modelos utilizados en la simulación numérica del problema, que incorpora el seccionamiento entre dos cantones. El planteamiento propuesto se aplica a un tramo concreto de la catenaria C270 entre Turín y Milán del que se disponen medidas de la fuerza de contacto. La comparación entre la fuerza de contacto obtenida en el ensayo HiL y la medida en vía muestra un parecido entre ambas más que razonable, especialmente en el dominio de la frecuencia. Las diferencias observadas entre los resultados y las medidas en vía se pueden atribuir a desviaciones de la geometría del hilo de contacto entre la catenaria real instalada y la utilizada en el modelo numérico de catenaria. Por tanto, se concluye que disponer de medidas de la altura del hilo de contacto es vital para conseguir mimetizar en el laboratorio mediante ensayos HiL las medidas que se realizan en vía.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación recibida por parte de la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2023-148854OB-C21) y de la Universitat Politècnica de València en el programa de ‘Primeros Proyectos de Investigación’ (PAID-06-2023).

7. Referencias

- [1] Kiessling F., Puschmann R., Schmieder A., Schneider E., Contact lines for electrical railways: planning, design, implementation, maintenance, 3rd ed., Publicis Publishing, Erlangen (2018)
- [2] Bruni S., Ambrósio J., Carnicero A., Cho Y. H., Finner L., Ikeda M., et al., “The results of the pantograph-catenary interaction benchmark”, *Vehicle System Dynamics* **53**(3), 412–435 (2015)
- [3] EN 50317:2012, “Aplicaciones ferroviarias. Sistemas de captación de corriente. Requisitos y validaciones de medidas de la interacción dinámica entre el pantógrafo y las líneas aéreas de contacto”, Comité Europeo de Normalización Electrotécnica, Bruselas, 2012.
- [4] Gil J., Tur M., Gregori S., Pedrosa A. M., Fuenmayor F. J., “Modelling of a high-speed railway pantograph with non-linear head-suspension mechanism and parameter optimisation”, *Nonlinear Dynamics*, published online (2024)
- [5] Facchinetti A., Bruni S., “Hardware-in-the-loop hybrid simulation of pantograph–catenary interaction”, *Journal of Sound and Vibration* **331**(12), 2783–2797 (2012)
- [6] Schirrer A., Aschauer G., Talic E., Kozek M., Jakubek S., “Catenary emulation for hardware-in-the-loop pantograph testing with a model predictive energy-conserving control algorithm”, *Mechatronics* **41**, 17–28 (2017)
- [7] Tur M., Gregori S., Correcher A., Gil J., Pedrosa A. M., Fuenmayor F. J., “Hardware-in-the-Loop pantograph tests with general overhead contact line geometry”, *Mechatronics* **102**, 103231 (2024)
- [8] Correcher A., Ricolfe-Viala C., Tur M., Gregori S., Salvador-Muñoz M., Fuenmayor F. J., Gil J., Pedrosa A. M., “Hardware-in-the-loop test bench for simulation of catenary-pantograph interaction (CPI) with linear camera measurement”, *Sensors* **23**(4), 1773 (2023)
- [9] Tur M., García E., Baeza L., Fuenmayor F. J., “A 3D absolute nodal coordinate finite element model to compute the initial configuration of a railway catenary”, *Engineering Structures* **71**, 234–243 (2014)

8. Anexo: Parámetros geométricos y de material de la catenaria

A continuación, se recogen en diferentes tablas los parámetros geométricos y de material necesarios para definir el modelo de catenaria utilizado en este trabajo. En concreto, en las Tablas 2 y 3 se define el número de postes y vanos, la longitud de cada vano, el descentramiento en cada soporte, la altura del hilo de contacto y del cable sustentador en los soportes, y el número de péndolas de cada vano, para el primer y el segundo cantón respectivamente.

Tabla 2: Definición de la geometría del primer cantón.

Poste	Vano	Long. Vano (m)	Descentramiento (m)	Alt. HC (m)	Alt. CS (m)	Núm. Péndolas
1	-	-	-2	6.8	7	-
2	1	60	-0.4	5.8	6.7	3
3	2	60	-0.1	5.333	6.7	8
4	3	60	0.2	5.3	6.7	9
5	4	60	-0.2	5.3	6.55	9
6	5	60	0.2	5.3	6.55	9
7	6	60	-0.2	5.3	6.55	9
8	7	60	0.2	5.3	6.55	9
9	8	60	-0.2	5.3	6.55	9
10	9	60	0.2	5.3	6.55	9
11	10	60	-0.2	5.3	6.55	9
12	11	60	0.2	5.3	6.55	9
13	12	60	-0.2	5.3	6.55	9
14	13	59	0.2	5.3	6.55	9
15	14	59	-0.2	5.3	6.55	9
16	15	59	0.2	5.3	6.55	9
17	16	59	-0.2	5.3	6.55	9
18	17	59	0	5.3	6.55	9
19	18	59	0.2	5.3	6.55	9
20	19	60	-0.2	5.3	6.7	9
21	20	60	0.1	5.333	6.7	8
22	21	60	0.4	5.8	6.7	3
23	22	60	-2	6.8	7	-

Tabla 3: Definición de la geometría del segundo cantón.

Poste	Vano	Long. Vano (m)	Descentramiento (m)	Alt. HC (m)	Alt. CS (m)	Núm. Péndolas
1	-	-	-2	6.8	7	-
2	1	60	-0.4	5.8	6.7	3
3	2	60	-0.1	5.333	6.7	8
4	3	60	0.2	5.3	6.7	9
5	4	60	-0.2	5.3	6.55	9
6	5	60	0.2	5.3	6.55	9
7	6	60	-0.2	5.3	6.55	9
8	7	58	0.2	5.3	6.55	9
9	8	58	-0.2	5.3	6.55	9
10	9	58	0.2	5.3	6.55	9
11	10	58	-0.2	5.3	6.55	9
12	11	57	0.2	5.3	6.55	9
13	12	57	-0.2	5.3	6.55	9
14	13	60	0.2	5.3	6.55	9
15	14	56	-0.2	5.3	6.55	8
16	15	56	0.2	5.3	6.55	8
17	16	56	-0.2	5.3	6.55	8
18	17	58	0.2	5.3	6.55	9
19	18	60	-0.2	5.3	6.7	9
20	19	57	0.1	5.333	6.7	8
21	20	57	0.4	5.8	6.7	3
22	21	60	-2	6.8	7	-

En la Tabla 5 se muestra el módulo de Young, la sección transversal y la densidad del material de los elementos con los que se modela el cable sustentador, el hilo de contacto y las péndolas. Para los dos primeros componentes, además, al modelarse mediante elementos tipo viga, también hay que definir su segundo momento de área. Adicionalmente, se incluye para ambos cables la tensión mecánica a la que se someten debido al sistema de compensación por contrapesos y poleas. Para los brazos de atirantado se recoge en la Tabla 4 el valor de su masa y su longitud.

Tabla 4: Propiedades del material y parámetros de los diferentes elementos.

Componente	E (GPa)	A (m ²)	ρ (kg/m ³)	I (m ⁴)	T (kN)	m (kg)	L (m)
Cable sustentador	120	$1.2 \cdot 10^{-4}$	8925	$1.0975 \cdot 10^{-9}$	16.25	-	-
Hilo de contacto	120	$1.2 \cdot 10^{-4}$	8890	$1.625 \cdot 10^{-9}$	20	-	-
Péndolas	85	$1.2 \cdot 10^{-4}$	9307	-	-	-	-
Brazo de atirantado	7	$2.7037 \cdot 10^{-4}$	2700	-	-	0.8	1.2165

Las masas de las grifas de unión entre los diferentes componentes de la catenaria se recogen en la Tabla 5.

Tabla 5: Masa de las grifas de conexión.

Grifa	m (kg)
Péndolas al cable sustentador	0.195
Péndolas al hilo de contacto	0.165
Brazo de atirantado al hilo de contacto	0.15

Además de los anteriores datos, en el modelo se incorpora una rigidez vertical en los soportes del cable sustentador de 455 kN/m y se ha utilizado un modelo de amortiguamiento proporcional de Rayleigh definido por las constantes $\alpha = 0.0125 \text{ s}^{-1}$, y $\beta = 10^{-4} \text{ s}$.