



Nueva metodología para la determinación del módulo de flexión, mediante el análisis de una Viga en Doble Voladizo Asimétrica

Ugutx Garitaonandia¹, Nagore Insausti¹, Juan de Gracia¹, Faustino Mujika¹

¹ Grupo MecMat, Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería de Gipuzkoa
Universidad del País Vasco – Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

ugutz.garitaonandia@ehu.es nagore.insausti@ehu.es juan.degracia@ehu.es faustino.mujika@ehu.es

En este trabajo se propone una nueva metodología para la obtención del módulo de flexión de laminados compuestos.

Esta metodología está basada en el método de la Viga en Doble Voladizo Asimétrica, del inglés Asymmetric Double Cantilever Beam (ADCB). La asimetría puede ser debida al material de las dos sub-vigas que forman la viga, la secuencia de apilado del material compuesto o las características geométricas de cada sub-viga.

Se ha diseñado y fabricado un conector mecánico para unir las dos sub-vigas que formarán la probeta a analizar. De esta forma, utilizando una sub-viga formada con un material de referencia, del cual se conocen sus características mecánicas, se ha desarrollado un procedimiento novedoso para determinar el módulo de flexión del material correspondiente a la otra sub-viga, analizando la apertura de la probeta.

Se ha desarrollado una aproximación analítica adaptada a esta metodología. Estos resultados se han comparado con ensayos realizados con el conector mecánico diseñado a tal efecto y simulaciones numéricas realizadas utilizando el método de elemento finitos.

1. Introducción

El ensayo de la Viga en Doble Voladizo, en inglés *Double Cantilever Beam* (DCB), es el método más utilizado para medir la tenacidad a la fractura interlaminar de materiales compuestos en Modo I, debido a su simplicidad y practicidad [1]. Las normas ASTM D5528-13 [2] e ISO 15024:2023 [3] definen los parámetros a utilizar para realizar los ensayos DCB. En la Figura 1 se representan los parámetros geométricos de la probeta para realizar el ensayo DCB.

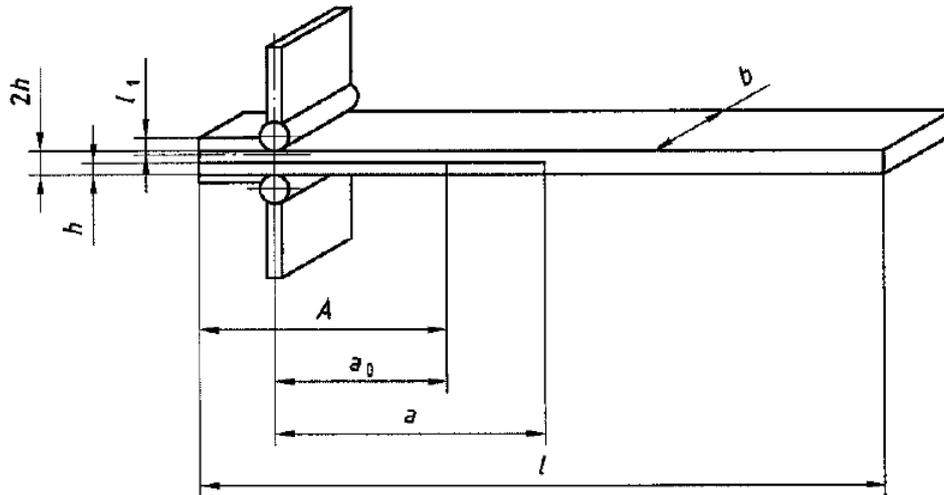


Figura 1: Configuración geométrica de la probeta para el ensayo DCB, según la norma ISO 15024:2023.

En los casos en los que las sub-vigas que componen la probeta tengan diferente geometría o estén constituidos por diferente material, se crea el ensayo de Doble Viga en Voladizo Asimétrica (ADCB). En estos ensayos, debido a la asimetría, además de la fractura en Modo I, también aparece la fractura en Modo II –representados en la Figura 2-.

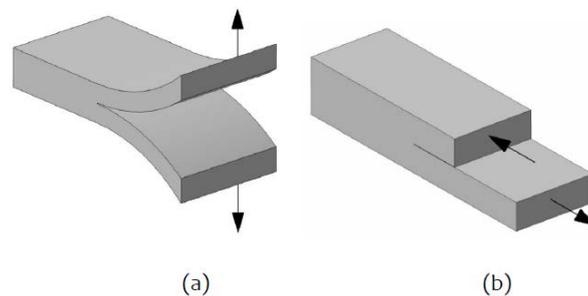


Figura 2: Modos de fractura interlaminar: (a) Modo I; (b) Modo II.

Durante el ensayo ADCB, además de producirse la apertura de la probeta, ésta se inclina respecto al plano horizontal. Esta inclinación está relacionada con la geometría y propiedades mecánicas de las sub-vigas que componen la probeta de ensayo.

El objetivo de este trabajo es proponer una nueva metodología para determinar el módulo de flexión de laminados compuestos de forma sencilla y práctica mediante ensayos ADCB. Para ello se ha utilizado una sub-viga que formará la probeta de ensayo con un material de referencia cuyas propiedades mecánicas sean conocidas, en este caso de acero. Midiendo la apertura creada al realizar el ensayo ADCB, se obtiene el módulo de flexión de la otra sub-viga, en este caso se han utilizado diferentes placas fabricadas con material compuesto unidireccional. Se ha desarrollado un procedimiento analítico utilizando el teorema de Engesser-Castigliano y también se ha diseñado un nuevo elemento de fijación para unir placas fabricadas con diferentes materiales. Los resultados obtenidos mediante la aproximación analítica se han comparado con los resultados obtenidos en ensayos experimentales y mediante simulaciones numéricas.

2. Configuración del ensayo de la Viga en Doble Voladizo Asimétrica ADCB

La Figura 3 muestra un ensayo ADCB utilizando el conector mecánico diseñado. Mediante este conector se une una sub-viga de material compuesto unidireccional fabricada con fibra de vidrio en la parte superior, y otra sub-

viga hecha de acero en la parte inferior. Se fija una bisagra a cada sub-viga en su lado izquierdo y se ensaya en una máquina universal.



Figura 3: Ensayo ADCB utilizando un conector mecánico.

En la siguiente Figura 4 se definen los parámetros geométricos de la probeta a ensayar, las condiciones de contorno impuestas, la longitud de grieta y la aplicación de la fuerza transmitida por el conector mecánico.

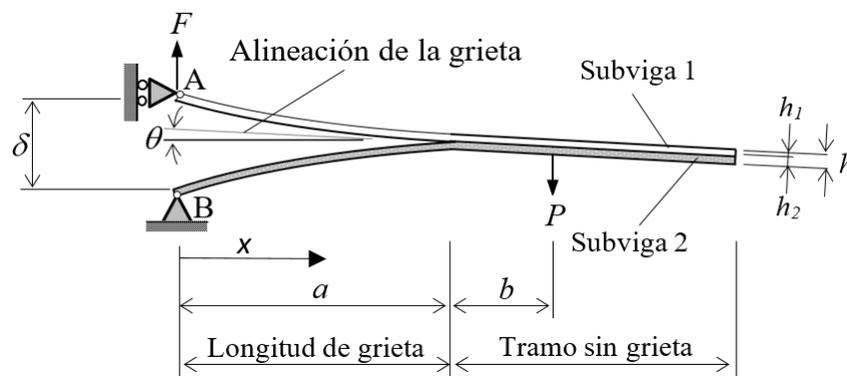


Figura 4: Configuración del ensayo ADCB.

3. Aproximación analítica

3.1. Teorema de Engesser-Castigliano

Se ha utilizado el *Teorema de Engesser-Castigliano* [4] para calcular la apertura de la probeta. La ecuación (1) representa el planteamiento general.

$$\delta = \int_0^a \frac{M_1 M_1'}{E_1 I_1} dx + \int_0^a \frac{M_2 M_2'}{E_2 I_2} dx + \int_0^b \frac{M_3 M_3'}{EI} dx \quad (1)$$

Respecto a los parámetros que intervienen en la ecuación (1); los momentos M_1 y M_2 son los momentos flectores soportados por cada sub-viga en el tramo con grieta de longitud a , mientras que el momento M_3 es el momento flector que actúa en la longitud b del tramo sin grieta. Por otra parte, los momentos M_i' son los momentos flectores creados al aplicar una fuerza puntual unitaria en el punto A. Finalmente, los productos $E_i I_i$ corresponden a la rigidez de cada sub-viga o al tramo sin grieta, respecto al eje de flexión.

Sustituyendo los parámetros d_i en la ecuación (1):

$$d_1 = \frac{1}{E_1 I_1}, \quad d_2 = \frac{1}{E_2 I_2}, \quad d = \frac{1}{EI} \quad (2)$$

$$\delta = d_1 \int_0^a M_1 M_1' dx + d_2 \int_0^a M_2 M_2' dx + d \int_0^b M_3 M_3' dx \quad (3)$$

Al desarrollar la aproximación analítica, también se tiene en cuenta el peso del conector mecánico utilizado para unir las dos sub-vigas. Este peso adicional, incluso en los casos en los que la propia probeta tiene un peso significativo, crea un momento flector respecto a los puntos de amarre donde se encuentran las bisagras, lo que hace que se generen fuerzas de reacción horizontales en dichos puntos.

Sustituyendo las fuerzas de reacción que transmiten las condiciones de contorno en los puntos A y B, y planteando las ecuaciones de momentos flectores en cada tramo (Figura 5):

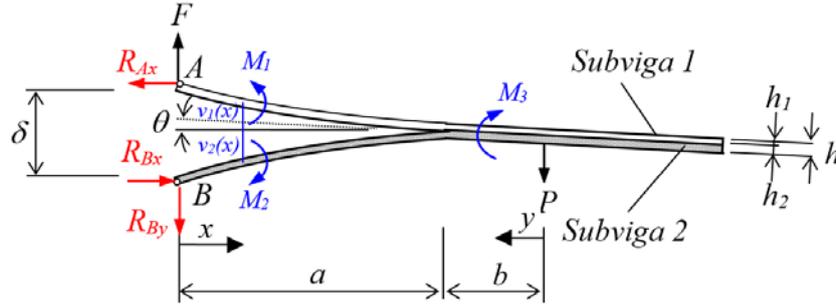


Figura 5: Fuerzas de reacción y momentos internos en el ensayo ADCB.

En las ecuaciones (4) se detallan los valores de las fuerzas de reacción que se producen en los apoyos A y B:

$$R_{Ax} = \frac{P(a+b)}{(h+\delta)} \leftarrow ; \quad R_{Bx} = \frac{P(a+b)}{(h+\delta)} \rightarrow ; \quad R_{By} = (P - F) \downarrow \quad (4)$$

La apertura total puede calcularse como la suma de los desplazamientos verticales producidos en cada sub-viga:

$$\delta = v_1 + v_2 \quad (5)$$

En este sentido, el desplazamiento vertical que se produce en cualquier sección de cada sub-viga en función de la variable x:

$$v_1(x) = \frac{F a^3 d_1}{3} - \frac{F a^2 d_1}{2} x + \frac{F d_1}{6} x^3 \quad (6)$$

$$v_2(x) = \frac{R_{By} a^3 d_2}{3} - \frac{R_{By} a^2 d_2}{2} x + \frac{R_{By} d_2}{6} x^3 \quad (7)$$

Por lo que las ecuaciones de los momentos flectores en función de las variables x e y quedan de la siguiente forma:

$$M_1(x) = F x - R_{Ax} \left[\frac{h_1}{2} - \frac{F a^2 d_1}{2} x + \frac{F d_1}{6} x^3 \right] \quad (8)$$

$$M_2(x) = (F - P) x - R_{Bx} \left[\frac{h_2}{2} - \frac{(F-P) a^2 d_2}{2} x + \frac{(F-P) d_2}{6} x^3 \right] \quad (9)$$

$$M_3(y) = -P y \quad (10)$$

3.2. Método de la carga unitaria

Para calcular las ecuaciones correspondientes a los momentos flectores M'_i se ha empleado el método de la carga unitaria. Para ello, se ha aplicado una fuerza unitaria en el punto A (Figura 6):

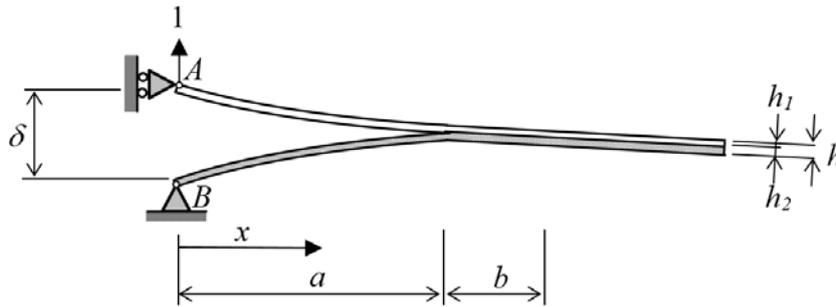


Figura 6: Configuración correspondiente a la carga unitaria.

En este caso, las fuerzas de reacción que se producen en los apoyos A y B son las siguientes:

$$R'_{Ax} = 0 ; \quad R'_{Bx} = 0 ; \quad R'_{By} = 1 \downarrow \quad (11)$$

Y las ecuaciones correspondientes a los momentos flectores:

$$M'_1(x) = x ; \quad M'_2(x) = x ; \quad M'_3(y) = 0 \quad (12)$$

Sustituyendo las ecuaciones (8), (9), (10) y (12) en la ecuación (3), integrando y realizando el cambio $R_{Ax}=R_{Bx}=R$, se obtiene la ecuación (13) que proporciona la apertura mediante aproximación analítica:

$$\delta = \frac{F a^3}{3} (d_1 + d_2) - \frac{P a^3}{3} d_2 + R \left[\frac{a^2}{4} (-h_1 d_1 + h_2 d_2) + \frac{2F a^5}{15} (-d_1^2 + d_2^2) - \frac{2P a^5}{15} d_2^2 \right] \quad (13)$$

Analizando esta expresión se deduce que la apertura puede descomponerse en dos términos; el correspondiente a las fuerzas verticales y el correspondiente a las fuerzas horizontales:

$$\delta_{(F.vert.)} = \frac{F a^3}{3} (d_1 + d_2) - \frac{P a^3}{3} d_2 \quad (14)$$

$$\delta_{(F.horiz.)} = R \left[\frac{a^2}{4} (-h_1 d_1 + h_2 d_2) + \frac{2F a^5}{15} (-d_1^2 + d_2^2) - \frac{2P a^5}{15} d_2^2 \right] \quad (15)$$

El valor de las fuerzas horizontales solo toma valores considerables cuando la apertura es reducida. Además, analizando la influencia de cada término, se comprueba que prácticamente toda la apertura corresponde a las fuerzas verticales.

Con el fin de deducir una expresión analítica que permita obtener el módulo de flexión de la sub-viga que no es de un material de referencia, se plantean los valores de las fuerzas y sus correspondientes aperturas para dos estados de carga, considerando únicamente el término correspondiente a la apertura debida a las fuerzas verticales:

$$\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{F_2 a^3}{3} (d_1 + d_2) - \frac{P a^3}{3} d_2 - \left(\frac{F_1 a^3}{3} (d_1 + d_2) - \frac{P a^3}{3} d_2 \right) \quad (16)$$

$$\Delta\delta = \frac{(F_2 - F_1) a^3}{3} (d_1 + d_2) \quad (17)$$

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta F} = f_{AB} = \frac{a^3}{3} \left(\frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2} \right) \quad (18)$$

Expresando los momentos de inercia de las sub-vigas en función de sus dimensiones geométricas $I_i = (1/12)w_i \cdot h_i^3$ y operando se obtiene la expresión analítica para obtener el módulo de flexión:

$$E_1 = \frac{4 a^3 E_2 w_2 h_2^3}{(f_{AB} E_2 w_2 h_2^3 - 4 a^3) \cdot w_1 h_1^3} \quad (19)$$

4. Ensayos experimentales

Para realizar los ensayos mecánicos se ha utilizado la máquina universal INSTRON 5967. Dicha máquina dispone de las características necesarias para realizar los ensayos según las normas ASTM D5528-13 e ISO 15024:2023.

Para analizar probetas fabricadas con diferentes materiales de forma sencilla y realizar ensayos ADCB, en lugar de fabricar laminados compuestos con una determinada longitud de grieta o crearlos utilizando adhesivos, se ha diseñado un conector mecánico para unir las placas formadas por dos materiales diferentes. Este conector mecánico debe fijar firmemente las dos placas, dejando una longitud de grieta conocida, creando así un empotramiento entre ellas.

Se han realizado ensayos con tres probetas diferentes. Para crear cada probeta se han utilizado dos placas o sub-vigas de sección rectangular de base w_i y altura h_i . El material de cada placa es el siguiente: laminado compuesto unidireccional con fibras de carbono (FC), laminado compuesto unidireccional con fibras de vidrio (FV) y acero. Se han combinado dichas placas con el objetivo de analizar diferentes configuraciones.

En todos los casos el peso del conector mecánico ha sido $P = 2 \text{ N}$ y el ancho medio de dicho conector es $b = 23 \text{ mm}$. Los restantes parámetros se especifican en la Tabla 1:

Tabla 1: Propiedades geométricas y de material de cada probeta.

Probeta	a (mm)	h_1 (mm)	w_1 (mm)	E_1 (GPa)	h_2 (mm)	w_2 (mm)	E_2 (GPa)
FV-Acero1	68	1,96	13,9	30,7	1,53	15,8	210
FC-Acero2	69	2,98	13,8	87,5	1,53	15,7	210
FV-FC	71	1,96	13,9	30,7	2,98	13,8	87,5

Antes de iniciar el ensayo, la probeta se inclina debido al peso del conector mecánico, y durante el ensayo, esta inclinación variará debido a la asimetría geométrica y material de las sub-vigas. El cambio de inclinación es una de las variables a tener en cuenta durante el ensayo. Se han utilizado los resultados experimentales de carga-desplazamiento proporcionados por la máquina de ensayos, tras comprobar que la rigidez del sistema de ensayo no afecta a los resultados.

5. Validación numérica

Las simulaciones numéricas por el método de los elementos finitos pueden utilizarse para validar los resultados obtenidos mediante la aproximación analítica y los ensayos experimentales [5,6]. Se ha creado un modelo para

cada probeta utilizando el software ABAQUS Standard. Para el modelado se han empleado elementos del tipo CPS4I con un tamaño de elemento de 0,25 mm. Estos elementos tienen modos incompatibles y son muy adecuados en los casos de flexión simple, para incorporar los efectos del cortante.

Respecto a las propiedades mecánicas de los materiales utilizados para fabricar las placas, el acero tiene un módulo de elasticidad $E = 210$ GPa y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Por otra parte, las propiedades mecánicas de los laminados compuestos unidireccionales [7] se enumeran en la Tabla 2:

Tabla 2: Propiedades de los materiales compuestos unidireccionales formados con fibra de vidrio y carbono.

Material de la placa	E_{11} (GPa)	E_{22} (GPa)	E_{33} (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{23} (GPa)	G_{13} (GPa)	ν_{12}	ν_{23}	ν_{13}
Fibra de vidrio / epoxy	30,7	10,3	10,4	4,3	3,5	4,3	0,28	0,50	0,28
Fibra de carbono / epoxy	87,5	10,3	10,4	7,0	3,7	7,0	0,27	0,54	0,27

En la Figura 7 se muestra el modelo correspondiente a la probeta formada por una placa de laminado compuesto unidireccional de fibra de vidrio en la parte superior y una placa de acero en la parte inferior, denominado FV-Acero1. En esta figura pueden apreciarse los símbolos correspondientes a las condiciones de contorno impuestas en los puntos A y B, además de los símbolos correspondientes a las fuerzas de apriete transmitidas por el conector mecánico.

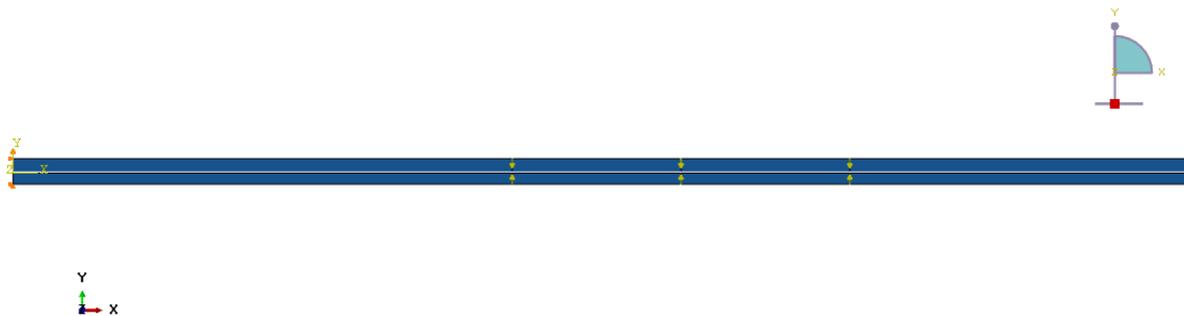


Figura 7: Modelo de la probeta FV-Acero1 con las condiciones de contorno y las fuerzas de apriete del conector mecánico.

En la Figura 8 se muestra el mapa de desplazamientos verticales producido en la simulación correspondiente a la probeta FV-Acero1.

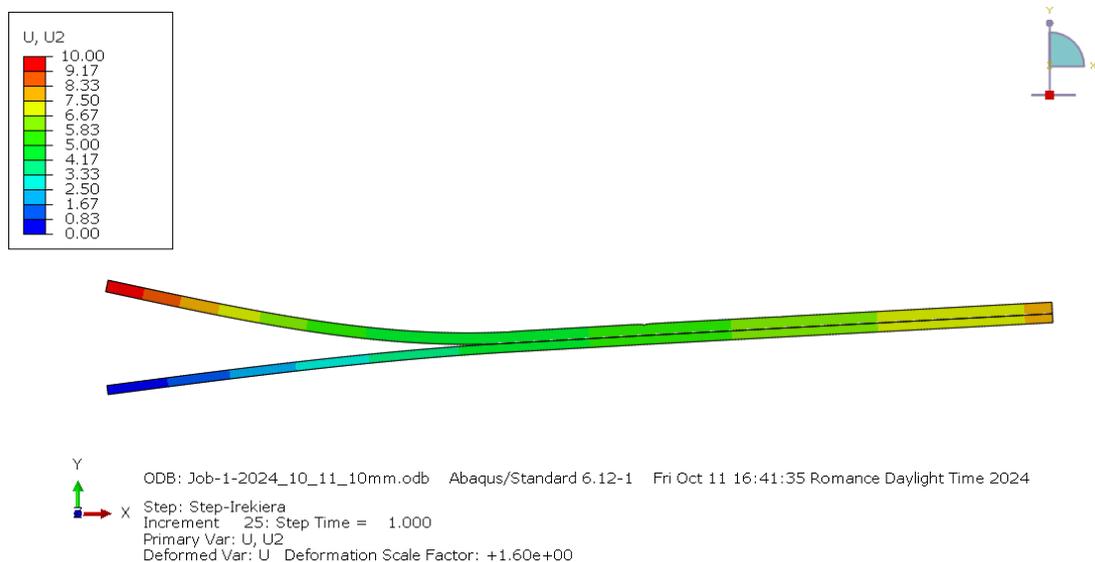


Figura 8: Mapa de desplazamientos verticales correspondiente a la probeta FV-Acero1.

En la Figura 9 se representa la apertura δ obtenida para la probeta FV-Acero1 en función de la fuerza F aplicada en el punto A, utilizando los tres procedimientos descritos en este trabajo: aproximación analítica, ensayo experimental y simulación numérica.

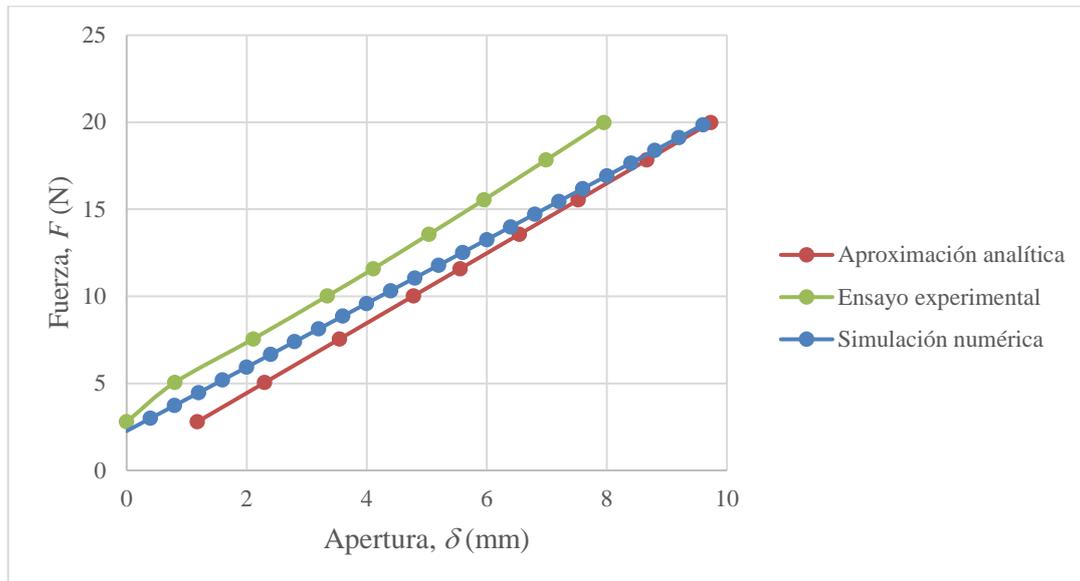


Figura 9: Apertura δ de la probeta FV-Acero1 en función de la fuerza F .

6. Conclusiones

Se ha propuesto un nuevo método para determinar el módulo de flexión realizando un ensayo ADCB. Mediante este ensayo se puede combinar un material de referencia con propiedades mecánicas conocidas, con otro material con propiedades mecánicas desconocidas para obtener las propiedades mecánicas de este último material.

Los resultados obtenidos para la apertura de la probeta que se crea durante el ensayo ADCB mediante los tres métodos analizados: aproximación analítica, ensayo experimental y simulación numérica, han sido similares.

Por lo tanto, se concluye que la aproximación analítica para obtener el módulo de flexión del material del que se desconocen las propiedades mecánicas recogida en la ecuación (19) es adecuada.

7. Agradecimientos

Los autores desean agradecer a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) por la financiación proporcionada al grupo de investigación MECMAT en la convocatoria de 2021, GIU21/015.

8. Referencias

- [1] De Gracia J., Boyano A., Arrese A., Mujika F. “A new approach for determining the R-curve in DCB tests without optical measurements”, *Engineering Fracture Mechanics* **135**, 274-285 (2015)
- [2] ASTM Standard D5528-13, “Standard test method for mode I interlaminar fracture toughness of unidirectional continuous fiber reinforced polymer matrix composites”, Philadelphia, 1994
- [3] ISO Standard 15024:2023, “Fiber-reinforced plastic composites – Determination of mode I interlaminar fracture toughness, GIC, for unidirectionally reinforced materials”, 2023
- [4] Mujika F., Tsokanas P., Arrese A., Valvo P.S., Da Silva L.F.M. “Mode decoupling in interlaminar fracture toughness tests on bimaterial specimens” *Engineering Fracture Mechanics* **290** (2023)
- [5] Garulli T., Catapano A., Fanteria D., Jumel J., Martin E.. “Design and finite element assessment of fully uncoupled multi-directional layups for delamination tests”. *J Compos Mater* 54 (6) 773–90 (2020).
- [6] Bennati S., Colleluori M., Corigliano D., Valvo P.S. “An enhanced beam-theory model of the asymmetric double cantilever beam (ADCB) test for composite laminates”. *Compos Sci Technol* 69 (11–12) 1735–1745 (2009).
- [7] Daniel I. M., Ishai O. *Engineering Mechanics of Composite Materials - 2nd Edition*. Oxford University Press ISBN 978-0195150971 (2006).