



# Influencia del grado de libertad redundante en el comportamiento estructural de un brazo robótico de 7 grados de libertad.

Javier Ibarrola Chamizo<sup>1</sup>, Jokin Aginaga García<sup>2</sup>, Iker Agirre-Olabide<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento Ingeniería, Universidad Pública de Navarra, javier.ibarrola@unavarra.es

<sup>2</sup> Departamento Ingeniería, Universidad Pública de Navarra, jokin.aginaga@unavarra.es, iker.agirre@unavarra.es

*La robótica colaborativa aborda el desempeño de actividades más complejas, en las cuales el movimiento y la precisión priman sobre las dimensiones y el peso. El aumento del número de articulaciones (grados de libertad) en un brazo robótico le otorga versatilidad de movimiento, pudiendo adaptarse con mayor facilidad a la actividad desempeñada y a los espacios de trabajo. Cuando se tiene un brazo robótico con más de 6 grados de libertad en su cadena cinemática articular, la posición y orientación del elemento terminal queda sobredefinida. Esta situación se conoce como redundancia cinemática. En este caso, el elemento terminal del robot puede llegar a una posición y orientación determinada en infinitas coordenadas articulares.*

*Sin embargo, el comportamiento estático y dinámico del brazo robótico varía para cada una de estas coordenadas articulares. En este trabajo se muestra la influencia del grado de libertad redundante en el comportamiento estructural de un robot colaborativo de 7 grados de libertad (KUKA IIWA LBR 14 R820). Mediante el estimador por mínimos cuadrados se estiman experimentalmente las rigideces articulares del brazo y, mediante un modelo de rigidez, se calcula la matriz de rigidez cartesiana.*

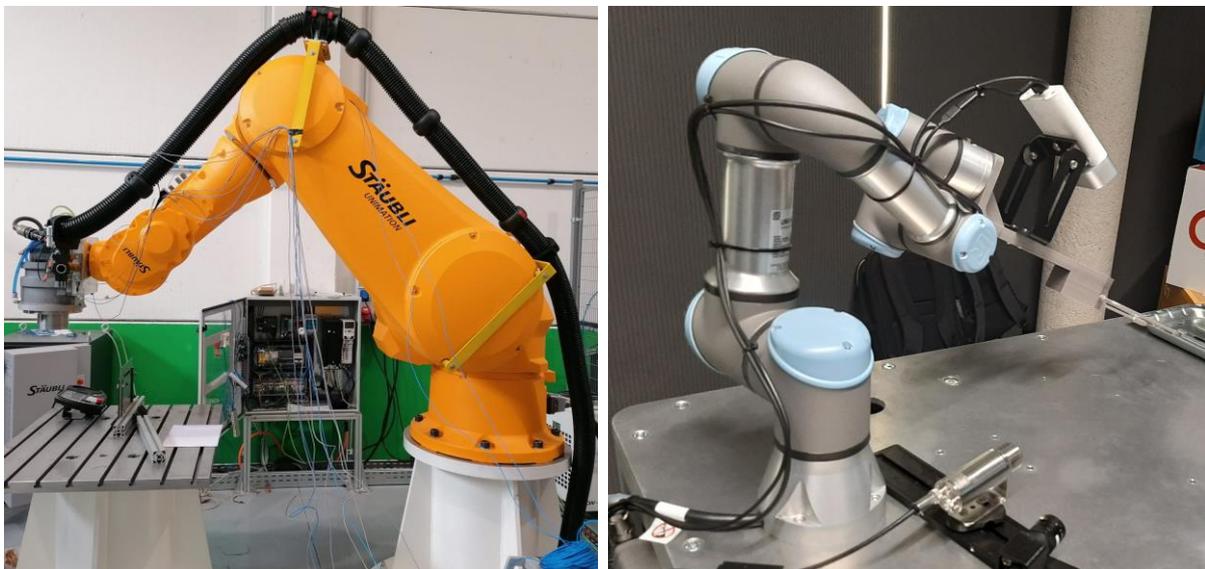
*Para realizar tanto la estimación como la validación de los parámetros de rigidez se realiza una batería de experimentos donde se aplican unas cargas y se miden los desplazamientos ante esas sollicitaciones. Con ello, se obtienen unos mapas de rigideces en las tres direcciones principales del elemento terminal en función del ángulo de redundancia y su posición.*

## 1. Introducción

Hoy en día se está viviendo una nueva revolución industrial, un cambio que implica la integración de nuevas tecnologías para el desarrollo de herramientas cada vez más sofisticadas. Esta era digital, también llamada industria inteligente o Industria 4.0 aúna muchas ramas diversas de la ingeniería tales como la informática, electrónica, telecomunicaciones, robótica, mecánica, análisis y almacenamiento de datos. Dentro de la robótica existen 2 grandes ramas: robótica industrial (centrada en tareas de gran envergadura) y robótica colaborativa (enfocada al soporte de tareas desempeñadas por personas).

La robótica industrial la componen brazos robóticos de grandes dimensiones, diseñados para el desarrollo de tareas de gran exigencia física donde ningún operario pueda intervenir. Este tipo de máquinas suelen operar en las llamadas células robóticas, espacios de trabajo protegidos para que nadie pueda entrar mientras el robot se encuentra en funcionamiento. Este tipo de robótica no cuenta con sensorica capaz de detectar colisiones, por lo que los dispositivos de seguridad externos son de vital importancia. Un ejemplo de robot industrial se muestra en la Figura 1 (a).

En cambio, en la robótica colaborativa se integran manipuladores de dimensiones reducidas. Son máquinas con menor alcance y peso que facilitan al operario desempeñar su tarea sin ninguna molestia, permitiendo la interacción robot-humano en un mismo espacio de trabajo de manera segura. Además, estas cinemáticas están altamente sensorizadas para que en el momento de colisión (consigo mismo, con objetos del entorno o con personas) sean capaces de detenerse y evitar cualquier accidente. Un ejemplo de robot colaborativo se muestra en la Figura 1 (b).



(a) Industrial.

(b) Colaborativa.

**Figura 1:** Tipos de robótica.

La necesidad de estudiar con detenimiento las propiedades físicas, mecánicas y dinámicas de estas máquinas es imprescindible, ya que dependiendo de su aplicación será necesario conocer las capacidades del brazo robótico. Siciliano et al. [1] definen una clasificación muy útil y extendida de la tipología de brazos manipuladores, donde se establece el tipo de robot en función de su espacio de trabajo y de su movilidad: manipuladores cartesianos, SCARA, antropomórficos, manipuladores paralelos e híbridos.

Las diferentes configuraciones que puede adoptar un manipulador tienen un peso importante tanto en la parte cinemática (generación de trayectorias y evaluación de colisiones) como en la parte dinámica (estudio de rigideces). Las técnicas de modelado de rigidez de brazos manipuladores se pueden agrupar en 3 bloques. Wu et al. [2] describen en detalle cada una de ellas en su revisión:

- Análisis por elementos finitos (*Finite Element Analysis, FEA*). Este método consiste en discretizar la estructura al completo mediante elementos finitos. Esta técnica es la más precisa al modelar en su verdadera dimensión y forma todos los eslabones y enlaces del brazo robótico [3-9]. Suele emplearse como método de validación de otros procedimientos de cálculo de rigideces.
- Análisis estructural matricial (*Matrix Structural Analysis, MSA*). Con el mismo principio que el FEA, este método modela los eslabones del brazo como vigas flexibles tridimensionales. Posteriormente se

ensamblan las matrices de rigideces de cada uno de los eslabones en una matriz global para el manipulador [10-14].

- Modelado de articulaciones virtuales (*Virtual Joint Method, VJM*). Esta metodología se basa en la extensión del modelo rígido tradicional añadiendo juntas virtuales (resortes localizados), que describen las deformaciones elásticas de los eslabones, juntas y actuadores [15-18].

El modelo de rigideces que se toma en este artículo se encuentra dentro de este último bloque. Debido a que el VJM modela las uniones de las articulaciones como resortes localizados y los eslabones como sólidos infinitamente rígidos, estos modelos tienen menor coste computacional. Además, en el caso de los robots comerciales, no suele ser sencillo acceder a sus sólidos tridimensionales y parámetros dinámicos como para plantear los dos primeros procedimientos. En concreto se emplea el modelo de rigideces que plantea Salisbury [19] donde se relaciona la rigidez articular con la rigidez cartesiana del brazo robótico.

Este tipo de modelos se pueden emplear en cualquier tipo de brazos robóticos: industriales, colaborativos, antropomórficos, paralelos, de cadena cerrada, etc. En Besset *et al.* [20] identifican los parámetros de rigidez articular mediante los sensores de par en un brazo robótico IWA LBR R820. En una publicación posterior, Busson *et al.* [21] emplean estos parámetros de rigidez articular en un algoritmo de optimización para encontrar los valores del ángulo de redundancia que maximicen las rigideces cartesianas. En Dumas *et al.* [22] se identifican las rigideces articulares de un KUKA KR240-2 aplicando diferentes cargas y midiendo los desplazamientos mediante un medidor laser, el método de identificación lo realizan minimizando la norma Euclídea del error de aproximación de la ecuación linealizada de rigideces.

En este trabajo se estudia la influencia del grado de libertad redundante en las rigideces cartesianas de un robot colaborativo IWA LBR 14 R820. En la Sección 2 se plantea la metodología empleada para la identificación de las rigideces articulares mediante el estimador Mínimos Cuadrados. En la Sección 3 se describen los ensayos experimentales realizados para determinar los desplazamientos que sufre el robot frente a cargas estáticas. En la Sección 4, mediante los resultados obtenidos, se estiman y validan las rigideces articulares. Además, se extiende el modelo estimado para analizar la evolución de las rigideces cartesianas del robot en un entorno de trabajo más discretizado para, de esta manera, observar en mejor detalle la influencia del grado de redundancia.

## 2. Metodología

En este apartado se plantea el procedimiento teórico que se ha llevado a cabo para la identificación de las rigideces articulares del IWA. Se desarrolla la cinemática directa para conocer los sistemas de referencia de cada uno de los sólidos que componen el brazo robótico, se detallan los parámetros de Denavit-Hartenberg, se describe el modelo de rigideces elegido y el proceso de identificación llevado a cabo.

### 2.1. Modelo cinemático del robot IWA:

A continuación, se describen los parámetros cinemáticos del robot a estudiar. En este caso, es un brazo robótico antropomórfico de 7 grados de libertad (KUKA IWA LBR 14 R820). La Figura 2 muestra el sistema de referencias de cada uno de los sólidos que componen el brazo robótico además de los parámetros de Denavit-Hartenberg, donde los valores de longitud son:  $d_{bs} = 0.36$  m,  $d_{se} = 0.42$  m,  $d_{ew} = 0.40$  m y  $d_{wt} = 0.15$  m.

Al contar con 7 grados de libertad articulares, más de los 6 necesarios para definir la posición y orientación del elemento terminal, existirá un grado de libertad redundante. Esto permite variar este grado de libertad articular sin variar la posición y orientación del elemento terminal. En el caso del IWA, este grado de libertad redundante se corresponde con la variable angular de la articulación 3 (definido por KUKA como R), que determina el ángulo que conforman el plano del brazo (hombro (s) - codo (e) – muñeca (w)) con respecto al plano vertical asociado al sistema de referencia 1. Este ángulo entre planos se denomina  $\psi$  y será la variable de estudio en la influencia a la rigidez cartesiana del elemento terminal. En la Figura 3 se detalla una representación esquemática de las variables cinemáticas que definen la posición del brazo robótico. Siguiendo el esquema y los parámetros de las Figuras 2 y 3, se ha resuelto la cinemática inversa en función del ángulo de redundancia  $\psi$  siguiendo el procedimiento establecido en [23].

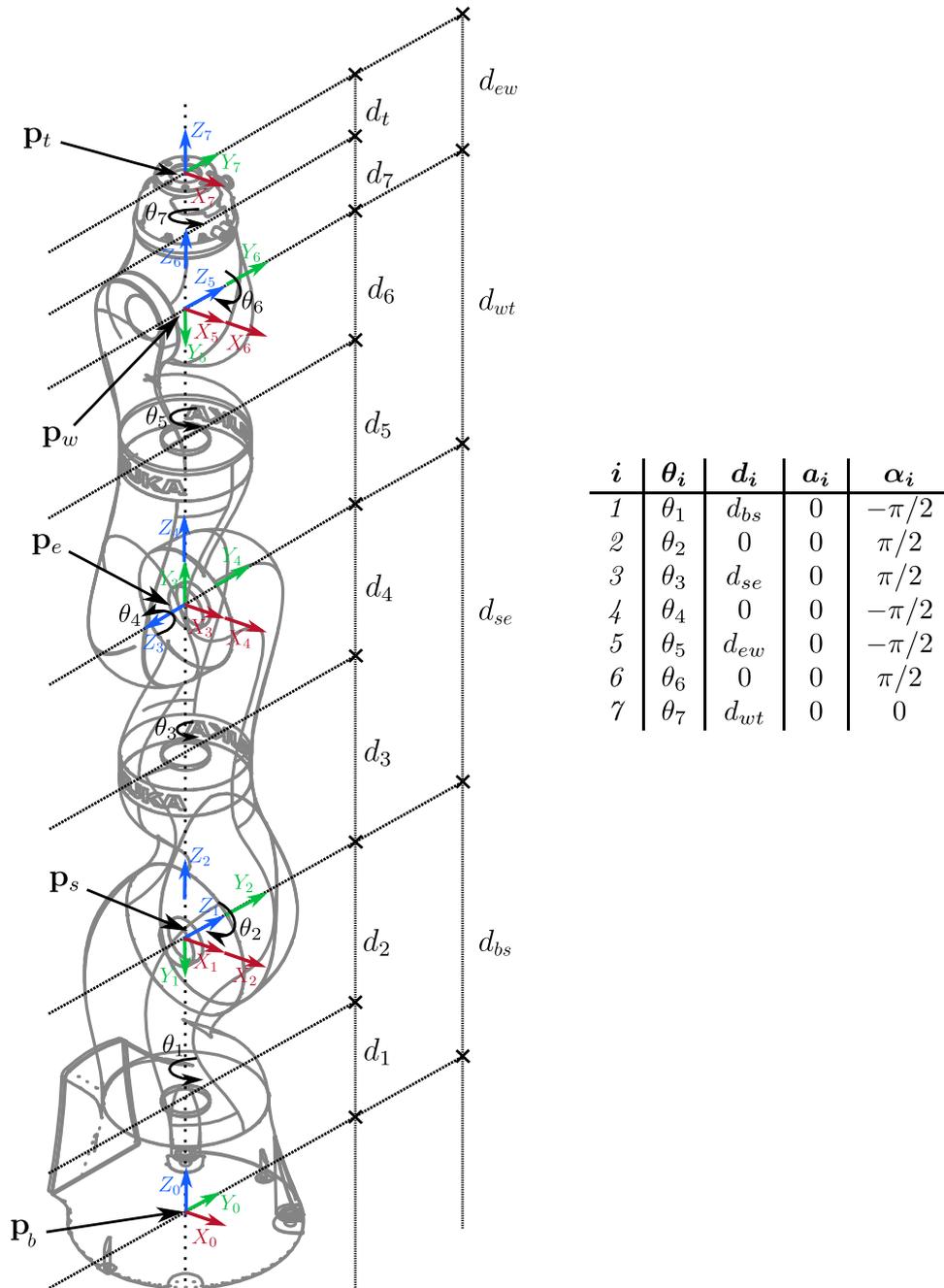


Figura 2: Sistema referencia IIWA.

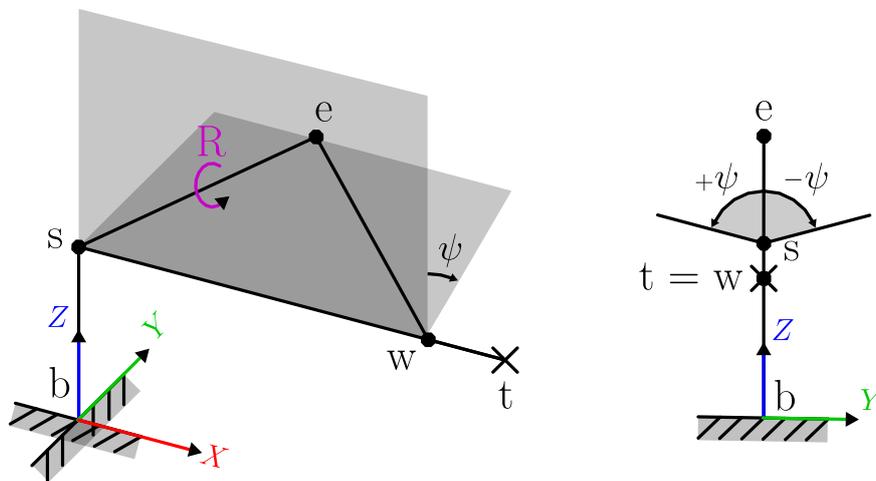


Figura 3: Coordenadas cinemáticas IIWA.

## 2.2. Modelo de rigidez:

El comportamiento estático del brazo robótico se puede plantear como en la Ecuación (1). En ella, los valores de fuerzas y momentos se representan con el vector  $\mathbf{f}$  de dimensión [6x1] mientras que los valores de desplazamientos lineales y angulares en las tres direcciones principales se recogen en el vector  $\Delta\mathbf{d}$ , también de dimensión [6x1]. Por lo tanto, la matriz de rigidez cartesiana  $\mathbf{K}_x$  será de dimensión [6x6] cuya diagonal representa los valores de rigidez cartesiana en las tres direcciones y giros principales.

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_x \Delta\mathbf{d} \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{K}_x = \begin{bmatrix} k_{xx} & & & & & \\ & k_{yy} & & & & * \\ & & k_{zz} & & & \\ & & & k_{Rx} & & \\ & * & & & k_{Ry} & \\ & & & & & k_{Rz} \end{bmatrix}$$

Se emplea el símbolo \* para denotar que existen elementos fuera de la diagonal. Para la identificación de las rigideces articulares del brazo robótico ( $\mathbf{K}_\theta$ ) se emplea el modelo de rigideces planteado por Salisbury [19], reflejado en la Ecuación (2), en el que se relaciona dicha matriz con la matriz de rigidez cartesiana ( $\mathbf{K}_x$ ) de dimensión [6x7] y la matriz Jacobiana del brazo robótico, dependiente de la posición articular.

$$\mathbf{K}_x = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^{-T} \quad (2)$$

donde

$$\mathbf{K}_\theta = \begin{bmatrix} k_{\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{\theta_7} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo la Ecuación (2) en la Ecuación (1) se obtiene la Ecuación (3). Además, si se despeja de la ecuación resultante el término de los desplazamientos cartesianos se obtiene la Ecuación (4).

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{K}_\theta \mathbf{J}^{-T} \Delta\mathbf{d} \quad (3)$$

$$\Delta\mathbf{d} = \mathbf{J} \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (4)$$

Como la matriz de rigideces articulares es diagonal, la inversa de dicha matriz será una matriz diagonal cuyos elementos son los valores recíprocos de las rigideces articulares. A esta variable se la conoce como *compliance* mecánica y será el parámetro a estimar de cada una de las articulaciones. De este modo se realiza el siguiente cambio de variable ( $1/k_{\theta_i} = C_{\theta_i}$ ). Desarrollando la Ecuación (4) se puede observar que todas las ecuaciones son lineales en los parámetros, por lo que dicho sistema se puede expresar de manera lineal como en la Ecuación (5)

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{W} \boldsymbol{\phi} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{y}_m$  es el vector de medidas experimentales realizadas de dimensión [nx1],  $n$  es el número de experimentos realizados,  $\boldsymbol{\phi}$  es el vector de parámetros a identificar y  $\mathbf{W}$  es la matriz de observación de dimensión [nx7] que puede calcularse como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Eq_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial Eq_1}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial Eq_1}{\partial \phi_7} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Eq_n}{\partial \phi_1} & \frac{\partial Eq_n}{\partial \phi_2} & \dots & \frac{\partial Eq_n}{\partial \phi_7} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi} = [C_{\theta_1} \ C_{\theta_2} \ \dots \ C_{\theta_7}]^T$$

entendiéndose por  $Eq_i$  la Ecuación (4) para el experimento  $i$  escrita de manera implícita. Tomando como hipótesis que los valores de medida cuentan con un error aditivo, se identifica el vector de parámetros ( $\phi$ ) que minimice dicho error mediante el estimador por mínimos cuadrados, Ecuación (6).

$$\hat{\phi} = \text{argmín}_{\phi} \|y_m - W \phi\| = (W'W)^{-1}W' y_m \quad (6)$$

El vector estimado son los valores de las *compliance* mecánicas de cada una de las articulaciones  $C_{\theta_i}$ , inversa de las rigideces articulares  $k_{\theta_i}$ , y con ello se obtiene la matriz de rigidez articular estimada ( $\hat{K}_{\theta}$ ).

### 2.3. Esquema del procedimiento

La metodología empleada para determinar las propiedades articulares del robot y analizar la influencia del ángulo de redundancia en la rigidez cartesiana se detalla en la Figura 4. Se parte de un proceso experimental en el cual se miden los desplazamientos del elemento terminal ( $\Delta d$ ) cuando se aplican unas cargas sobre el mismo ( $f$ ). De esta manera se generan los datos necesarios para el proceso de identificación. De la batería de experimentos se reservan unos datos para la identificación de los parámetros y otros para la fase de validación. Al contar con la cinemática inversa del brazo robótico, el modelo de rigidez y los parámetros estimados, se pueden calcular los valores de rigidez cartesiana del elemento terminal para las tres direcciones principales en función de las variables cinemáticas del robot.

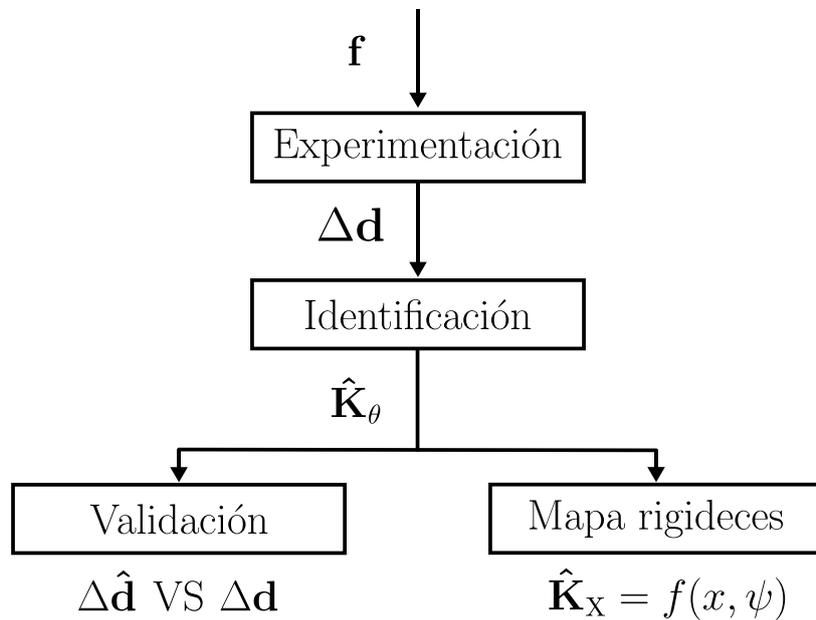


Figura 4: Esquema procedimiento artículo.

## 3. Experimentación

La parte experimental se diseña de modo que se obtengan los valores de desplazamiento del elemento terminal en las tres direcciones principales para poder realizar la identificación detallada en el Apartado 2.2. Para poder ver la influencia del grado de libertad redundante (R) en la rigidez cartesiana del brazo robótico ( $K_x$ ) se diseña una batería de experimentos variando dicha variable. Además, se varía la posición en el eje X del elemento terminal ( $x_{ET}$ ) entre tres valores y la carga externa  $f$  entre dos valores determinados. Para medir los desplazamientos se utilizan relojes comparadores, los cuales cuentan con una precisión de 0.01 mm, orientados en la dirección de aplicación de la carga.

En la Tabla 1 se muestran los valores de las diferentes posiciones del brazo robótico en la batería de experimentos. Las variables A, B y C representan los valores angulares en los ejes Z, Y y X respectivamente. Los valores de redundancia van desde  $-150^\circ$  hasta los  $+150^\circ$  en intervalos de  $30^\circ$ .

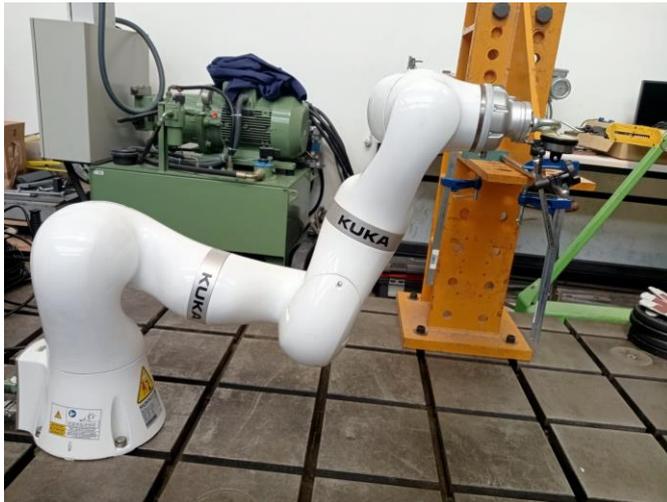
Tabla 1: Valores cinemáticos de los experimentos del IWA.

| X (m) | Y (m) | Z (m) | A (°) | B (°) | C (°) | R (°)         |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|
| 0.6   | 0     | 0.65  | 0     | 90    | 0     | [-150:30:150] |
| 0.7   | 0     | 0.65  | 0     | 90    | 0     | [-150:30:150] |
| 0.8   | 0     | 0.65  | 0     | 90    | 0     | [-150:30:150] |

La carga se aplica mediante un sistema de pesas y polea para poder ejercer el esfuerzo en los ejes principales del elemento terminal. Se utilizan pesas calibradas de 5 y 7 kg. Por lo tanto, de la Tabla 1 se puede calcular el número de experimentos para cada carga y dirección, 33 casos. Si a esto se le añade la variación de la carga y la aplicación en las tres direcciones, el número de experimentos asciende hasta los 198 ( $n = 198$ ).

Los materiales empleados en la fase experimental se pueden observar en la Figura 5. El brazo robótico (Figura 5 (a)) se encuentra atornillado a una bancada experimental en su base. La carga se aplica mediante el sistema de pesa y polea (Figura 5 (b)) conectado al elemento terminal mediante un dinamómetro (Figura 5 (c)). Al elemento terminal se le ha dotado de un cáncamo y sobre él es donde se realizan las medidas de desplazamientos mediante el reloj comparador de la Figura 5 (d). En la Figura 6 se muestran los experimentos aplicando la carga en las direcciones principales del elemento terminal.

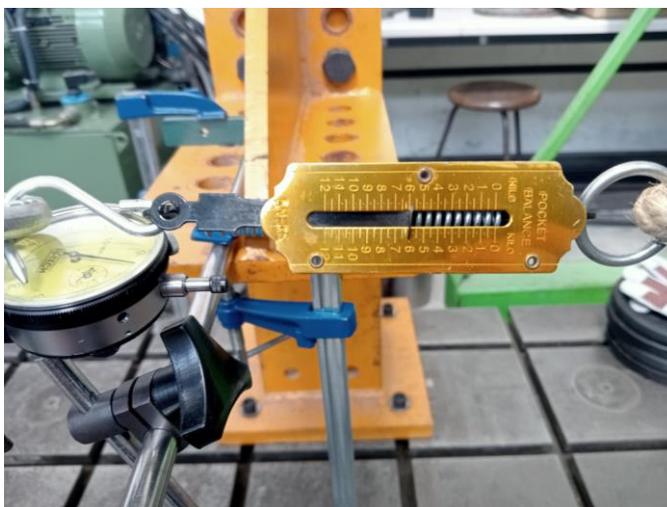
Busson *et. al* [20] realizan una comparativa de la rigidez articular de un IIWA con el sistema de frenos enclavado y sin frenos con control de posición. Los resultados reflejan un mismo comportamiento para ambos casos. Por este motivo, los experimentos se han realizado con el sistema de frenos activado.



(a) KUKA IIWA LBR 14 R820.



(b) Pesa + polea.

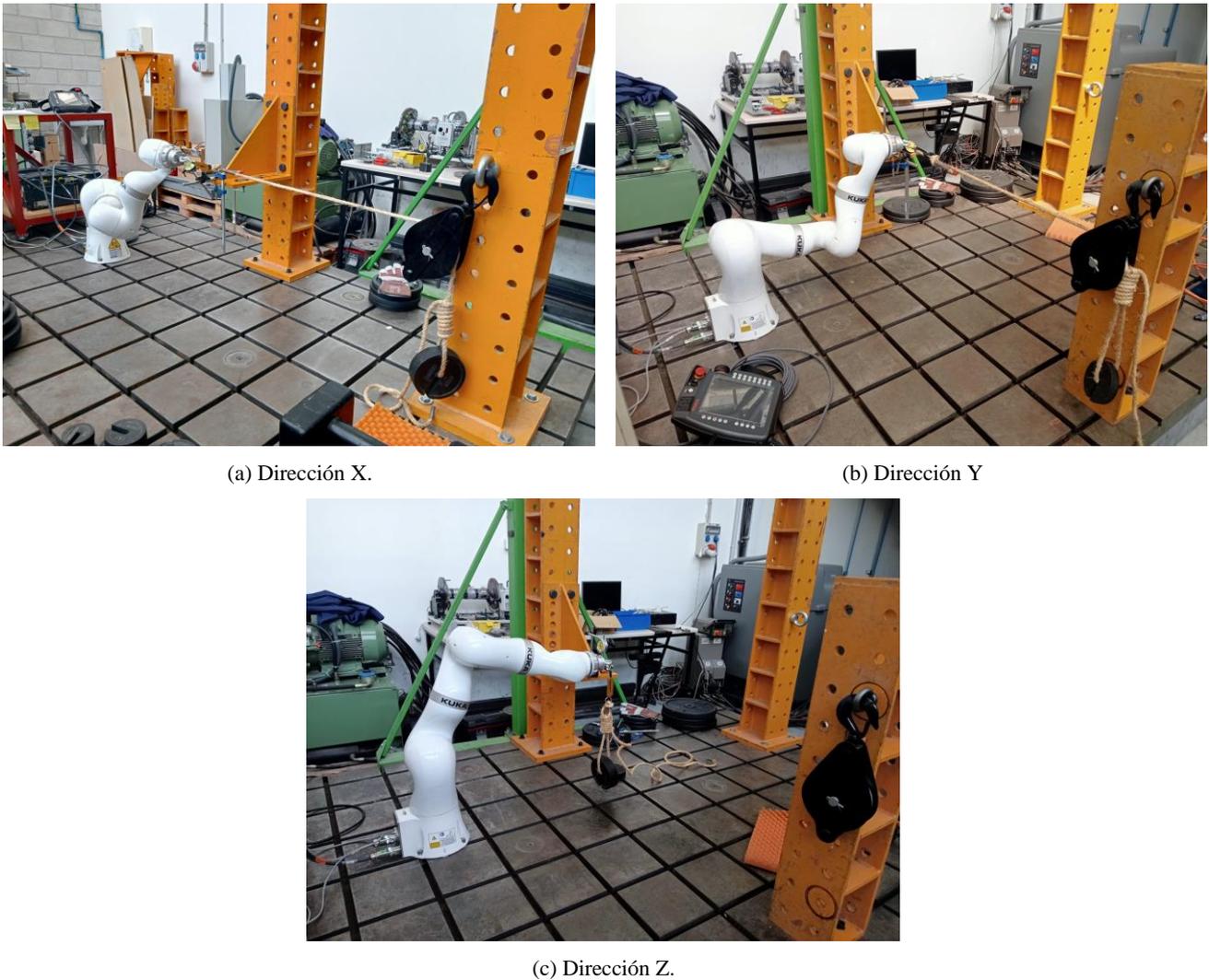


(c) Dinamómetro.



(d) Reloj comparador.

**Figura 5:** Materiales para experimentos.



(a) Dirección X.

(b) Dirección Y

(c) Dirección Z.

**Figura 6:** Direcciones principales de carga.

## 4. Resultados

Tras la realización de la batería de experimentos detallada en el Apartado 3, los valores de desplazamientos del elemento terminal ( $\Delta d$ ) y de fuerza aplicada ( $f$ ) se utilizan para la identificación de las rigideces articulares ( $\hat{k}_{\theta_i}$ ) mediante el planteamiento del Apartado 2.2. A modo de ejemplo, en la Tabla 2 se reflejan los resultados de desplazamientos medidos para los diferentes valores de R para el caso de tener la posición del elemento terminal a 0.6 m.

**Tabla 2:** Valores de desplazamientos experimentales ( $x_{FT} = 0.6$  m).

| R(deg)                |      | -150 | -120 | -90  | -60  | -30  | 0    | 30   | 60   | 90   | 120  | 150  |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\Delta X(\text{mm})$ | 5 kg | 0.44 | 0.32 | 0.17 | 0.14 | 0.14 | 0.13 | 0.15 | 0.16 | 0.20 | 0.41 | 0.48 |
|                       | 7 kg | 0.61 | 0.48 | 0.22 | 0.20 | 0.21 | 0.20 | 0.22 | 0.22 | 0.28 | 0.59 | 0.62 |
| $\Delta Y(\text{mm})$ | 5 kg | 1.17 | 1.20 | 1.45 | 1.53 | 1.54 | 1.41 | 1.46 | 1.48 | 1.31 | 1.29 | 1.19 |
|                       | 7 kg | 1.55 | 1.67 | 1.91 | 2.10 | 2.04 | 1.93 | 2.08 | 1.92 | 1.84 | 1.85 | 1.70 |
| $\Delta Z(\text{mm})$ | 5 kg | 0.90 | 1.01 | 1.18 | 1.27 | 1.35 | 1.29 | 1.32 | 1.31 | 1.18 | 1.01 | 0.85 |
|                       | 7 kg | 1.16 | 1.43 | 1.67 | 1.76 | 1.81 | 1.84 | 1.82 | 1.80 | 1.67 | 1.39 | 1.15 |

Con respecto a los desplazamientos en la dirección longitudinal del elemento terminal ( $\Delta X$ ), se observa que son menores cuando la tendencia del ángulo de redundancia tiende a 0. En otras palabras, cuanto más arriba se encuentre el codo menores desplazamientos se producen en esta dirección.

En los desplazamientos en la dirección transversal del elemento terminal ( $\Delta Y$ ) y ( $\Delta Z$ ) se observa un comportamiento contrario al de los desplazamientos longitudinales. Si la tendencia del ángulo de redundancia tiende a 0 los desplazamientos aumentan, es decir, cuanto más abajo se encuentre el codo menores serán los desplazamientos. También se observa que el aumento de la carga provoca desplazamientos superiores en las tres direcciones.

El ángulo de redundancia se define en el robot como el valor que adquiere la articulación 3, correspondiente al parámetro R. A través de la cinemática directa se puede calcular el ángulo ( $\psi$ ), tal como se ha descrito en la Sección 2. A partir de este punto del artículo, se hará referencia al ángulo  $\psi$  como ángulo de redundancia. De esta manera, la representación gráfica resulta más visual ya que esta variable define el ángulo que forma el brazo con respecto al plano vertical.

4.1. Estimación y validación de los parámetros identificados:

Para la identificación de las rigideces articulares se emplean los experimentos con la carga de 5 kg, mientras que los datos de los experimentos con carga de 7 kg se utilizan para la validación. Los valores estimados se detallan en la Tabla 3. Debido a la naturaleza de los experimentos, al no aplicar momentos torsores sobre el elemento terminal, la rigidez de la articulación 7 no aparecen en las ecuaciones dinámicas; por lo tanto, este parámetro no se puede estimar. Aún así, como el objetivo es observar la influencia de  $\psi$  en las rigideces cartesianas de las tres direcciones principales ( $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$  y  $k_{zz}$ ) el valor de  $k_{\theta_7}$  no interviene.

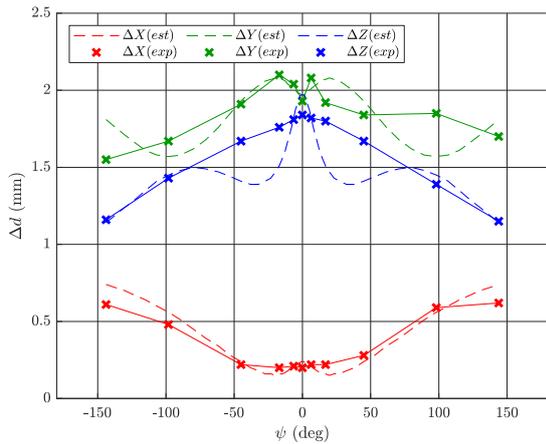
**Tabla 3:** Valores de rigidez articular estimados (Nm/rad)

| $k_{\theta_1}$     | $k_{\theta_2}$     | $k_{\theta_3}$     | $k_{\theta_4}$     | $k_{\theta_5}$     | $k_{\theta_6}$     | $k_{\theta_7}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------|
| $3.356 \cdot 10^4$ | $3.264 \cdot 10^4$ | $1.702 \cdot 10^4$ | $1.774 \cdot 10^4$ | $0.335 \cdot 10^4$ | $1.208 \cdot 10^4$ | —              |

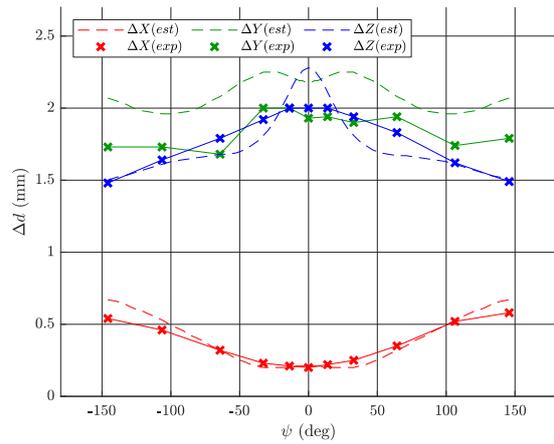
De esta manera, con los valores estimados de rigidez articular se pueden calcular los desplazamientos mediante la Ecuación (7) y poder compararlos con los experimentales. El error será el promedio de los cocientes de las diferencias absolutas de los valores medidos y los estimados entre los valores estimados según la Ecuación (8).

$$\widehat{\Delta d} = J \widehat{K_{\theta}}^{-1} J^T f \tag{7}$$

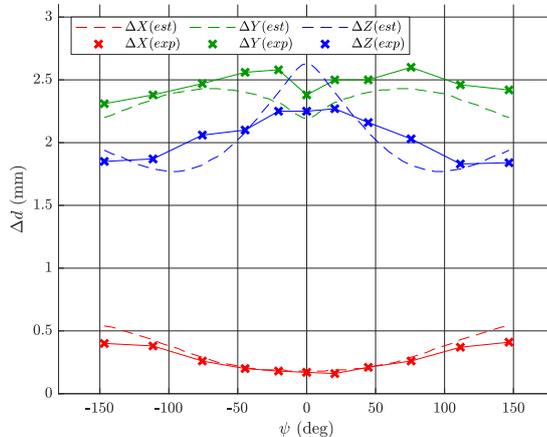
$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{|\Delta d_i - \widehat{\Delta d}_i|}{\widehat{\Delta d}_i}}{n} \tag{8}$$



(a) Posición elemento terminal (X = 0.6 m).



(b) Posición elemento terminal (X = 0.7 m).



(c) Posición elemento terminal (X = 0.8 m).

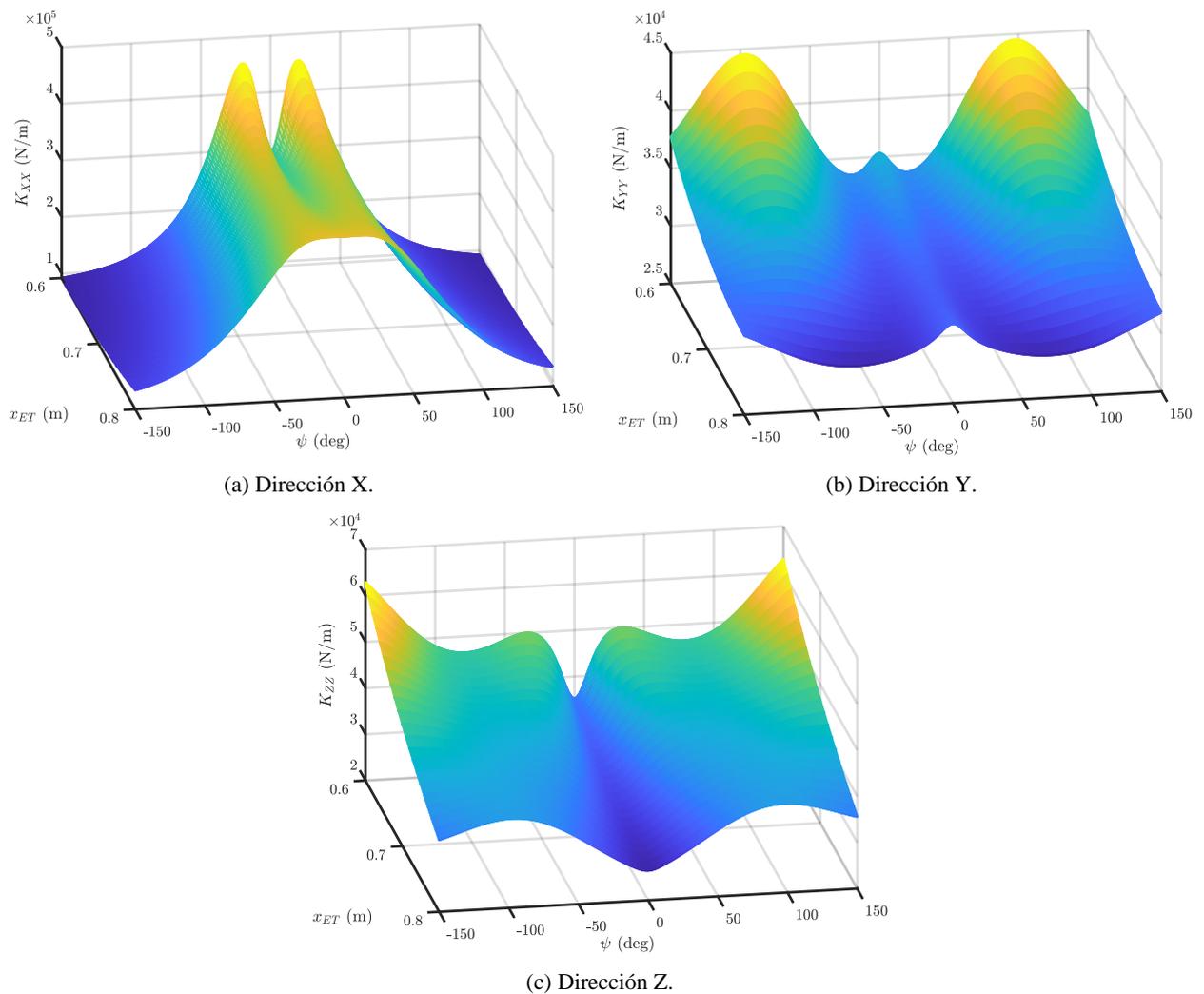
**Figura 7:** Comparativa desplazamientos estimados y experimentales para carga de 7 kg.

La Figura 7 muestra los desplazamientos experimentales y estimados para el caso de 7 kg de carga en función del ángulo de redundancia, la dirección de la carga aplicada y las tres diferentes posiciones del elemento terminal en el eje X. En las tres gráficas se puede apreciar como los valores de desplazamiento en la dirección X son menores que en las direcciones Y y Z. También se observa esa tendencia descendente ya comentada para el caso de la dirección X conforme el ángulo de redundancia tiende a 0. Dicha tendencia es contraria para las direcciones transversales Y y Z.

Por otro lado, en la dirección X se observan menores diferencias entre el caso experimental y el estimado. Sin embargo, el error ronda el 12% al tener una magnitud más pequeña. En la dirección Y se observan ciertas similitudes para los casos de 0.6 y 0.8 m de posición del elemento terminal, no siendo igual para el caso de 0.7 m donde se observa un *bias*. No obstante, las curvas estimadas replican de manera correcta esa tendencia ascendente conforme se reduce  $\psi$ , tendencia que también presenta el eje Z. En esta última dirección, las curvas estimadas se ajustan mejor para valores elevados de  $\psi$ , en valores cercanos a 0 la diferencia se hace mayor. Los errores que se dan en estas direcciones transversales oscilan en torno al 8 % y 6.5 % para la dirección Y y Z, respectivamente.

#### 4.2. Mapas de rigideces del elemento terminal

Al tener los valores de rigideces articulares identificados, mediante la cinemática inversa del IIWA se puede calcular los valores de posición articular, y con ello, la matriz Jacobiana para las múltiples posiciones del elemento terminal. De esta manera y haciendo uso de la Ecuación (2), se puede extender el análisis de las rigideces cartesianas para las tres direcciones principales ( $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_{zz}$ ), refinando la discretización del ángulo de redundancia ( $\psi$ ) y de la posición longitudinal del elemento terminal ( $x_{ET}$ ). Así, se obtienen los mapas de rigideces tridimensionales representados en la Figura 8.



**Figura 8:** Mapa rigidez cartesiana direcciones principales.

La representación de los mapas la componen los valores del ángulo de redundancia ( $\psi$ ), las posiciones en X del elemento terminal ( $x_{ET}$ ) y en ordenadas la rigidez cartesiana en las tres direcciones ( $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$  y  $k_{zz}$ ). Los colores

más cálidos representan valores elevados de rigideces mientras que los colores más azulados valores más pequeños.

En la Figura 8 (a) se muestra los valores de rigidez cartesiana en la dirección X. En comparación con las otras direcciones, los valores de rigidez son de un orden superior ( $10^5$  en X con respecto a  $10^4$  en Y y Z). Además, como se había deducido anteriormente, la rigidez en la dirección X es mayor cuanto más arriba se encuentre el codo ( $\psi \rightarrow 0$ ).

Por su parte, en las direcciones transversales (Y y Z) la rigidez es mayor cuanto más abajo se encuentre el codo. Con el codo posicionado en la parte superior ( $\psi = 0^\circ$ ) las rigideces parten de valores cercanos a  $3.5 \cdot 10^4$  N/m en ambas direcciones. Para la Figura 8 (b) en dirección Y, conforme aumentamos el ángulo de redundancia la rigidez tiende a reducirse, luego incrementa considerablemente hasta alcanzar su máximo ( $\psi \approx 100^\circ$ ) y luego experimenta una bajada. Para la dirección Z de la Figura 8 (c), cuanto más abajo se encuentre el codo ( $\psi \rightarrow \pm 180^\circ$ ) más aumenta el valor de la rigidez.

Sin embargo, con la representación de estos mapas se pueden observar que la tendencia no es lineal, sino que tiene puntos de máxima rigidez en valores determinados de  $\psi$  y  $x_{ET}$ . En la Tabla 4 se muestran los valores de ángulo de redundancia ( $\psi$ ) y posición del elemento terminal ( $x_{ET}$ ) que ofrecen valores máximos y mínimos de rigidez cartesiana en las tres direcciones.

**Tabla 4:** Valores máximos y mínimos de rigidez articular.

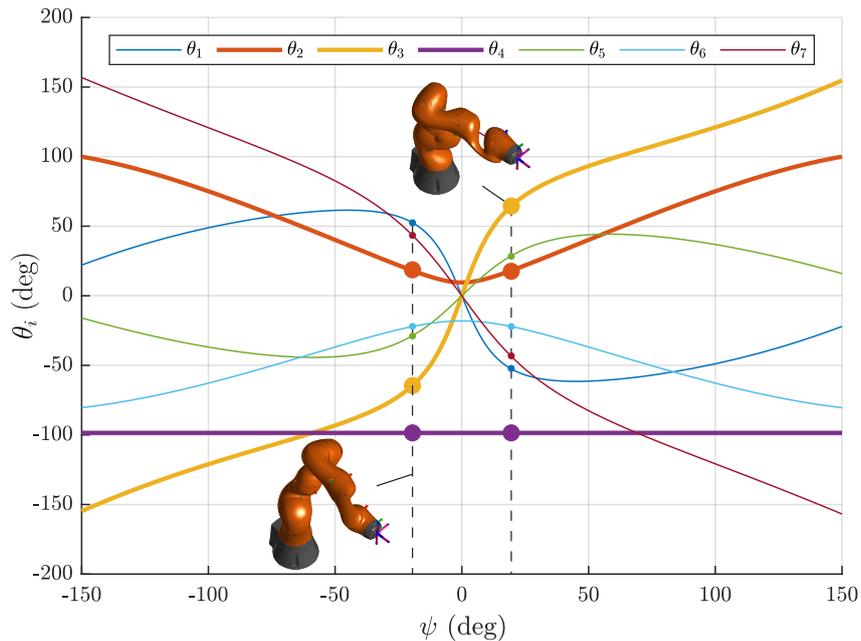
|              | $k_{XX}^{MAX}$ | $k_{XX}^{MIN}$ | $k_{YY}^{MAX}$ | $k_{YY}^{MIN}$ | $k_{ZZ}^{MAX}$ | $k_{ZZ}^{MIN}$ |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $k$ (kN/m)   | 453.36         | 92.11          | 44.50          | 28.70          | 62.90          | 26.44          |
| $\psi$ (°)   | $\pm 20$       | $\pm 150$      | $\pm 97$       | $\pm 70$       | $\pm 150$      | 0              |
| $x_{ET}$ (m) | 0.6            | 0.6            | 0.6            | 0.8            | 0.6            | 0.8            |

En los mapas de rigidez se observa un comportamiento más suavizado de las rigideces cuanto más alejado esté el elemento terminal de la base, es decir, el gradiente es menor cuanto mayor sea el valor  $x_{ET}$ . Esto implica que el ángulo de redundancia tiene menos influencia en las rigideces cartesianas cuanto mayor sea la distancia en X del elemento terminal. Tomando el caso que presente mayor gradiente se puede observar las variaciones articulares ante la variación del ángulo de redundancia.

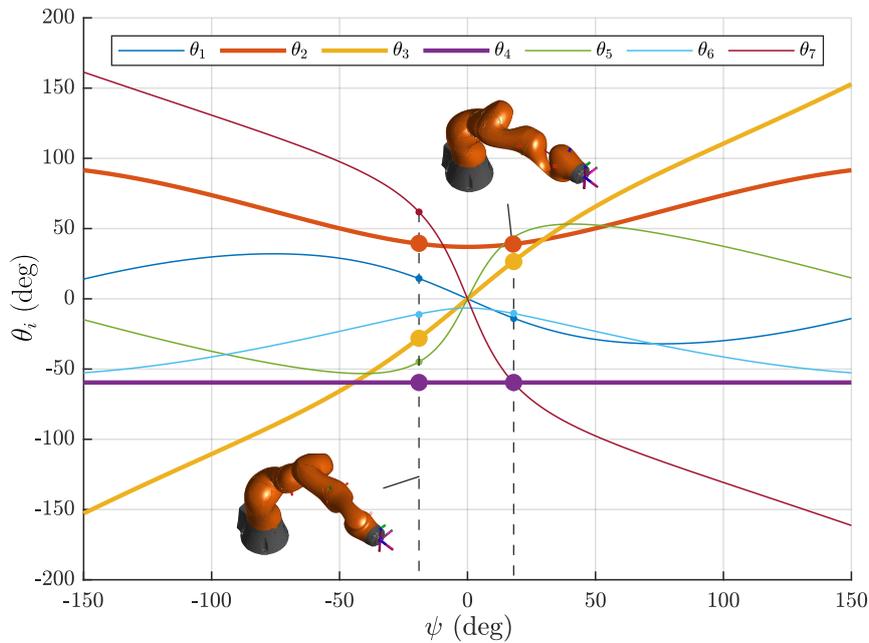
#### 4.3. Influencia de la redundancia en las coordenadas articulares

A través de la Ecuación (2) se pueden obtener las expresiones simbólicas que rigen el comportamiento de la rigidez cartesiana ( $k_{ii}$ ) en función de las rigideces articulares ( $k_{\theta_i}$ ). Si analizamos en detalle la ecuación que rige el valor de rigidez cartesiana en la dirección X ( $k_{XX}$ ) en el punto  $x_{ET} = 0.6$  m, donde el gradiente de rigidez es mayor, observamos que son únicamente función de las rigideces correspondientes a las articulaciones #2, #3 y #4  $k_{xx} = f(k_{\theta_2}, k_{\theta_3}, k_{\theta_4})$ . Se analizan a continuación los valores de las coordenadas articulares del robot para comprender la naturaleza de los citados gradientes en los valores de rigidez.

Para el caso de  $x_{ET} = 0.6$  m y  $x_{ET} = 0.8$  m, si se representa la variación de las coordenadas articulares en función del ángulo de redundancia ( $\psi$ ) se obtiene la Figura 9, destacando aquellas que tienen influencia sobre  $k_{XX}$ .



(a) Posición elemento terminal ( $x_{ET} = 0.6$  m).


 (b) Posición elemento terminal ( $x_{ET} = 0.8$  m).

**Figura 9:** Influencia ángulo redundancia en coordenadas articulares.

En ambas figuras se observa que la influencia del ángulo de redundancia sobre  $\theta_4$  es nula, en cambio  $\theta_2$  y  $\theta_3$  experimentan cambios notorios conforme varía  $\psi$ , mayoritariamente  $\theta_3$ . Estas variaciones son más significativas en la Figura 9 (a) que en el caso de la Figura 9 (b). Por lo tanto, cuando el brazo está más recogido pequeñas variaciones del ángulo de redundancia producen grandes cambios en las coordenadas articulares. Son precisamente estos cambios los que producen grandes variaciones en la rigidez del robot.

Sobre las gráficas se superponen figuras del brazo robótico para dos valores de  $\psi = \pm 20^\circ$ . Si se toma uno de los valores ( $\psi = 20^\circ$ ) para ambos casos, se observa que para conseguir el mismo ángulo de redundancia ( $\psi$ ) los valores articulares  $\theta_2$  y  $\theta_3$  son diferentes. Para el caso de  $x_{ET} = 0.6$  m los valores son de  $\theta_2 = 18.44^\circ$  y  $\theta_3 = 65.35^\circ$  mientras que para el caso de  $x_{ET} = 0.8$  m son de  $\theta_2 = 39.44^\circ$  y  $\theta_3 = 28.05^\circ$ .

Los valores de las coordenadas articulares determinan la matriz Jacobiana de la Ecuación (2) y consecuentemente los valores de las rigideces cartesianas. Esta variación en las articulaciones es la que define el gradiente de las rigideces cartesianas en los mapas de la Figura 8, y como se ha podido observar, cuanto menor sea la distancia  $x_{ET}$  más influencia tendrá el ángulo de redundancia sobre los valores articulares del brazo robótico y mayor serán las variaciones en las rigideces.

## 5. Conclusiones

En el presente artículo se ha planteado un método de identificación basado en mínimos cuadrados para estimar las rigideces articulares de un brazo robótico colaborativo de 7 grados de libertad (IIWA LBR 14 R820). Mediante el modelo de rigideces planteado se han determinado las rigideces cartesianas del elemento terminal. Con ello, se ha realizado un análisis de la influencia del ángulo de redundancia y posición del elemento terminal sobre las rigideces cartesianas en las tres direcciones principales.

De esta manera, se ha realizado una batería de experimentos los cuales consisten en la aplicación de una carga en las tres direcciones principales midiendo consigo los desplazamientos producidos. Debido a la naturaleza de los experimentos, al no aplicar momento torsor y siendo todas las cargas aplicadas en el eje de giro del último eslabón, no ha sido posible estimar la rigidez de la última articulación.

Para la identificación se han utilizado datos aplicando una carga de 5 kg, mientras que para la validación de la estimación se usan los datos procedentes de los experimentos con 7 kg. Para la validación se comparan los desplazamientos medidos con los obtenidos mediante los parámetros estimados. En la dirección longitudinal de la brida (X) se obtienen errores más elevados, mientras que en las direcciones transversales (Y y Z) son ligeramente menores.

Gracias a los mapas de rigideces se ha observado que la rigidez cartesiana longitudinal es de un orden superior que la transversal. La tendencia de la rigidez en la dirección longitudinal es a aumentar conforme el codo se encuentre más arriba. En cambio, para la rigidez transversal en Z los máximos valores se dan cuanto más abajo se encuentre el codo, mientras que para la rigidez en Y se dan en zonas cercanas a los  $90^\circ$ .

También se ha visto que  $x_{ET}$  determina significativamente la influencia que tiene el ángulo de redundancia sobre la rigidez cartesiana en X. Cuanto más cercano se encuentre el elemento terminal a la base ( $x_{ET}$  disminuye) las rigideces cartesianas en X son más sensibles a las variaciones del ángulo de redundancia. Se ha mostrado que esto es debido a la variación de las coordenadas articulares cuando se varía el ángulo de redundancia.

## 6. Referencias

- [1] B.Siciliano, L.Sciavicco, L.Villani, G.Oriolo, Robotics, Londres: Springer London, 2009.
- [2] K.Wu, J.Li, H.Zhao, Y.Zhong, "Review of Industrial Robot Stiffness Identification and Modelling", *Applied Sciences*, vol. 12, nº 17, 2022.
- [3] El-Khasawneh, S.Bashar, "Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulators", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 39, nº 2, pp. 321-342, 1999.
- [4] T.Huang, M.P.Mei, X.Y.Zhao, L.H.Zhou, D.W.Zhang, Z.P.Zeng, D.J.Whitehouse, "Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine", de *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seoul, 2001.
- [5] A.Pashkevich, D.Chablat, P.Wenger, "Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, nº 5, pp. 966-982, 2009.
- [6] A.Kimchik, A.Pashkevich, D.Chablat, «CAD-based approach for identification of elasto-static parameters of robotic manipulators.» *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 75, pp. 19-30, 2013.
- [7] M.Kefer, J.Zhang, H.Xie, "A versatile, non-linear and elasto-static stiffness model of articulated industrial robots", de *2014 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, Taipei, 2014.
- [8] A.M.Bertetto, "A Comparison of Stiffness Analysis Methods for Robotic Systems", *International Journal of Mechanics and Control*, vol. 17, nº 2, pp. 35-50, 2016.
- [9] W.Cao, H.Ding, "A method for stiffness modeling of 3R2T overconstrained parallel robotic mechanisms based on screw theory and strain energy", *Precision Engineering*, vol. 51, pp. 10-29, 2018.
- [10] D.Deblaise, X.Hernot, P.Maurine, "A systematic analytical method for PKM stiffness matrix calculation", de *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, Orlando, FL, EEUU, 2006.
- [11] J.Aginaga, I.Zabalza, O.Altuzarra, J.Nájera, "Improving static stiffness of the 6 - R\_US parallel manipulator using inverse singularities", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 28, nº 4, pp. 458-471, 2012.
- [12] T.Detert, B.Corves, E.C.Lovasz, M.Hüsing, I.Maniu, C.Gruescu, "Extended Procedure for Stiffness Modeling Based on the Matrix Structure Analysis", de *New Advances in Mechanisms, Mechanical Transmissions and Robotics*, Cham, 2017.
- [13] A.Klimchik, A.Pashkevich, D.Chablat, "Fundamentals of manipulator stiffness modeling using matrix structural analysis", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 133, pp. 365-394, 2019.
- [14] Z.Chebili, S.Alem, S.Djeffal, "Comparative Analysis of Stiffness in Redundant Co-axial Spherical Parallel Manipulator Using Matrix Structural Analysis and VJM Method", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, vol. 47, nº 4, pp. 2225-2241, 2023.

- [15] Ji Li, Imin Kao , "*Grasp stiffness matrix-fundamental properties in analysis of grasping and manipulation*", de *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human Robot Interaction and Cooperative Robots*, Pittsburgh, EEUU, 1995.
- [16] A.Pashkevich, A.Klimchik, D.Chablat, "*Enhanced stiffness modeling of manipulators with passive joints*", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 46, n° 5, pp. 662-679, 2011.
- [17] A.Klimchik, B.Furet, S.Caro, A.Pashkevich, "*Identification of the manipulator stiffness model parameters in industrial environment*", *Mechanism and Machine Theory*, vol. 90, pp. 1-22, 2015.
- [18] K.Yang, W.Yang, G.Cheng, B.Lu, "*A new methodology for joint stiffness identification of heavy duty industrial robots with the counterbalancing system*", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 53, pp. 58-71, 2018.
- [19] J. Salisbury, "*Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates*", de *19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, Albuquerque, EEUU, 1980.
- [20] P.Besset, A.Olabi, O.Gibaru, "*Advanced calibration applied to a collaborative robot*", de *IEEE International Power Electronics and Motion Control Conference (PEMC)*, Varna, Bulgaria, 2016.
- [21] D.Busson, R.Bearee, A.Olabi, "*Task-oriented rigidity optimization for 7 DOF redundant manipulators*", *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, n° 1, pp. 14588-14593, 2017.
- [22] C.Dumas, S.Caro, S.Garnier, B.Furet, "*Joint stiffness identification of six-revolute industrial serial robots*", *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 27, n° 4, pp. 881-888, 2011.
- [23] M.Shimizu, H.Kakuya, W.K.Yoon, K.Kitagaki, K.Kosuge, "*Analytical inverse kinematic computation for 7-dof redundant manipulators with joint limits and its application to redundancy resolution*", de *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 24, n° 5, pp. 1131-1142, 2008.