



Diseño y Validación de un Controlador Predictivo No lineal Basado en Modelo aplicado al Seguimiento de Trayectorias de Vehículos Autónomos

Marc Sánchez-Mateu/s1, Daniel S. Gamba/s2, J Pérez-Fernández/s3, JA Cabrera Carrillo/s4, JJ Castillo-Aguilar/s5

1 Departamento de ingeniería Mecánica, Universidad de Málaga, marcsanchez@uma.es

2,3,4,5 Departamento de ingeniería Mecánica, Universidad de Málaga, danielgamba@uma.es, javierperez@uma.es, jcabrera@uma.es, juancas@uma.es

El comportamiento del neumático es muy difícil de modelizar y presenta un comportamiento fuertemente no lineal en condiciones de conducción poco favorables, lo cual provoca una disminución en la capacidad de seguimiento de trayectorias de los vehículos autónomos. En el presente artículo se propone el diseño de un controlador predictivo basado en el modelo no lineal del neumático de Dugoff. En él, las fuerzas se caracterizan mediante funciones matemáticas no lineales que modelizan el comportamiento del mismo. Se lleva a cabo un proceso de linealización mediante la aplicación de las series de Taylor a las ecuaciones dinámicas del sistema, permitiendo representar el modelo no lineal del vehículo en su forma matricial de espacio de estados. Posteriormente, dichas matrices deben discretizarse y se construyen el resto de las matrices características que definen el problema de optimización con las correspondientes restricciones. Para validar el rendimiento del controlador, se propone una serie de escenarios de simulación y se compara con un controlador predictivo lineal. Se muestra que para condiciones donde el neumático no alcanza elevados ángulos de deslizamiento lateral, la efectividad de ambos controladores es muy elevada, siendo ligeramente más preciso el controlador no lineal. Por otro lado, cuando se eleva la velocidad del vehículo y se alcanzan ángulos de deslizamiento más elevados, el neumático abandona la zona de trabajo no lineal, provocando que la precisión del controlador lineal se ve reducida frente a la que se obtiene con el controlador basado en el modelo no lineal objeto de diseño.

1. Introducción

Debido al incremento de la congestión del tráfico que circulan y al aumento de incidentes causados por una conducción impropia, el interés por la implantación del vehículo autónomo en la sociedad actual se ha visto incrementada. Al inicio del 2008, Urmson C predijo que los sistemas inteligentes podrían aplicarse en el vehículo autónomo, describiendo las ventajas y los desafíos que enfrentarían las grandes ciudades en la senda de la conducción autónoma[1]. Es por ello por lo que Q. Li analiza las necesidades del vehículo autónomo y presenta la arquitectura del sistema de control y la capacidad de detectar carriles de forma automática[2]. Desde entonces, muchos investigadores han dedicado grandes esfuerzos en realizar avances en el desarrollo y el control del vehículo autónomo. Desde el punto de vista del Path Planning, Huang G propone el uso de un algoritmo RRT (Rapidly-exploring Random Tree) para la planificación de rutas en un entorno complejo con un gran número de obstáculos aleatorios[3]. C. C. Yuan presenta un nuevo algoritmo de fusión que combina el algoritmo de colonia de hormigas y un campo potencial mejorado, permitiendo que el vehículo autónomo evite obstáculos y conduzca de manera más segura[4].

Existen multitud de técnicas y algoritmos para realizar el control sobre el movimiento del vehículo, pero todos están enfocados en mejorar la precisión y la estabilidad del control. Más allá de estos controladores, el control predictivo basado en modelo destaca por su capacidad para manejar sistemas complejos y dinámicos, optimizando el control mientras respeta las restricciones operativas del vehículo[5], convirtiéndolo en el algoritmo de control más empleado a la hora de resolver los problemas de seguimiento de trayectorias en vehículos autónomos.

Primeramente, en 2007 Falcone. P defiende la implementación de un controlador predictivo para controlar un sistema de dirección activa en el eje delantero de un vehículo autónomo[6]. Este compara dos enfoques con diferentes costes computacionales: el uso de un modelo no lineal de elevada complejidad del vehículo sujeto a un proceso de linealización en cada iteración y un modelo de menor complejidad cuyos parámetros varían de forma lineal. Este último tiene en cuenta el estado del vehículo y las restricciones para garantizar la estabilidad a altas velocidades y en superficies con poca adherencia. En[7], Falcone P presenta un esquema de seguimiento de trayectoria basado en Control Predictivo por Modelo (MPC) para realizar maniobras de evasión de obstáculos mediante la optimización del ángulo de la dirección y controlando la aceleración y/o el frenado. Cheng S diseña un controlador de seguimiento de trayectoria basado en MPC robusto, capaz de hacer frente a incertidumbres en los parámetros. Además, este controlador hace uso de un algoritmo novedoso el cual puede resolverse mediante un conjunto de desigualdades matriciales lineales (LMI), derivadas del principio de estabilidad asintótica de Lyapunov. En[8] Cheng S programa un algoritmo de control predictivo adaptativo, el cual es capaz de ir calculando los parámetros característicos del controlador en función de estado del vehículo y de las condiciones del trazado.

En la mayoría de los artículos previamente citados, muchos autores optan por escoger el modelo lineal de bicicleta, el cual ayuda a reducir el coste computacional y muestra gran precisión siempre y cuando se trabaje en zona lineal del neumático. Pero, en maniobras bruscas o en superficies de baja adherencia, este controlador muestra ciertas limitaciones. Es por ello que en el presente artículo se diseña un algoritmo de control predictivo basado en el modelo no lineal de Dugoff, el cual mediante una formulación matemática más simple que otros modelos de neumático como el de Pacjecka, es capaz de capturar el comportamiento no proporcional del neumático.

2. Modelo Dinámico del vehículo

2.1. Modelo de bicicleta

En este apartado, se introduce el modelo de vehículo y de neumático empleado para el control basado en el espacio de estados. Dicho modelo debe ser capaz de describir la dinámica plana del automóvil, siendo necesario describir mediante ecuaciones los movimientos longitudinales, laterales y de rotación. Se selecciona el modelo de bicicleta con 3 grados de libertad para modelizar la dinámica plana de vehículos sin considerar la geometría de Ackerman. Este es una representación simple y efectiva que se utiliza ampliamente en los controles de estabilidad y trayectoria de vehículos autónomos[9]. Este artículo demuestra cómo aplicando dicho modelo simplificado, que incluye la rigidez de los neumáticos, puede lograrse un seguimiento preciso y suave de la trayectoria de referencia. El modelo es eficaz incluso en condiciones severas que involucran movimientos laterales, longitudinales y de giro del vehículo. Para poder aplicar este modelo, se deben considerar las siguientes simplificaciones:

1. Las ruedas del mismo eje se agrupan en una sola rueda ubicada en el centro del eje delantero o trasero.
2. El peso del cuerpo del vehículo se distribuye en cada rueda.
3. Efectos como los movimientos de la suspensión, fenómeno de deslizamiento y los efectos de la aerodinámica son despreciados.
4. Se ignora efectos tales como la relación de acoplamiento de la fuerza del neumático y el efecto del par de alineación.

La representación del modelo en un sistema de coordenadas plano puede visualizarse en la Figura 1.

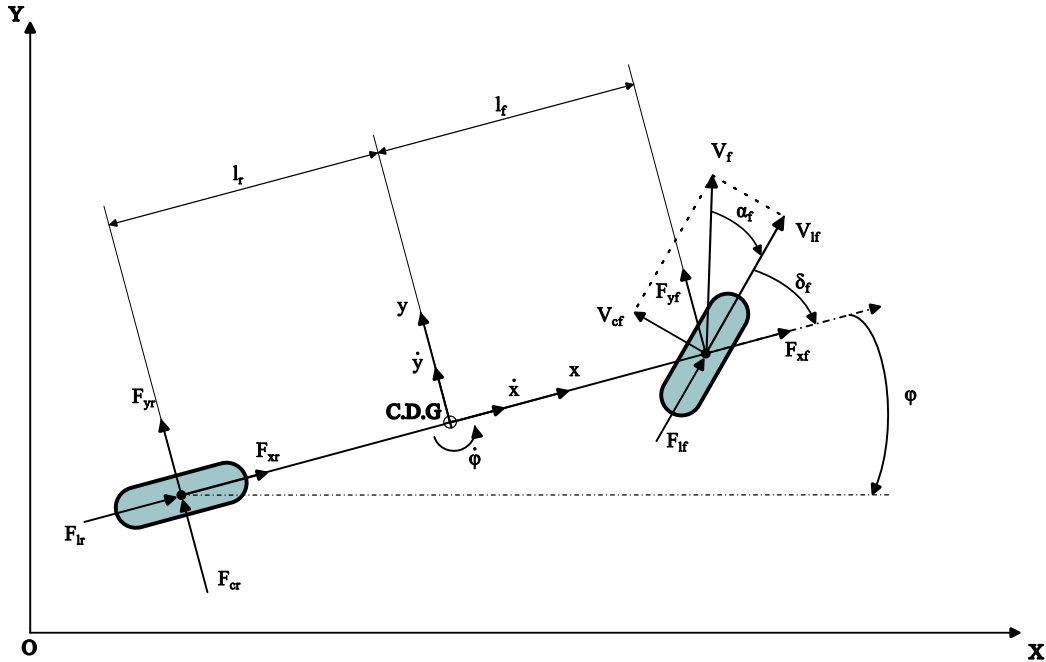


Figura 1: Modelo de bicicleta de 3 grados de libertad.

De acuerdo con la Segunda Ley de Newton-Euler, el balance de fuerzas y momentos resultante a lo largo de los ejes x , y , z locales cuya referencia se encuentra centrada en el Centro de Gravedad (C.D.G) del vehículo es el siguiente:

$$m\ddot{x} = 2F_{xf} + 2F_{xr} + m\dot{y}\dot{\phi} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = 2F_{yf} + 2F_{yr} - m\dot{x}\dot{\phi} \quad (2)$$

$$I_z\ddot{\phi} = 2F_{yf}l_f - 2F_{yr}l_r \quad (3)$$

donde m es la masa del vehículo, F_{xf} y F_{xr} son las fuerzas longitudinales de las ruedas delantera y trasera respecto del eje local x . F_{yf} y F_{yr} son las fuerzas laterales sobre los delantero y trasero, calculadas respecto del eje local y . $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son las velocidades longitudinales y laterales del vehículo respectivamente. La inercia del vehículo respecto del eje z viene representada por el parámetro I_z .

Las fuerzas de los neumáticos delantero y trasero obtenidas en las direcciones x e y se relacionan con las fuerzas longitudinales y laterales de los mismos. La relación es la siguiente [1]:

$$\begin{aligned}
 F_{xf} &= F_{lf} \cos(\delta_f) - F_{cf} \sin(\delta_f) \\
 F_{xr} &= F_{lr} \cos(\delta_r) - F_{cr} \sin(\delta_r) \\
 F_{yf} &= F_{lf} \sin(\delta_f) + F_{cf} \sin(\delta_f) \\
 F_{yr} &= F_{lr} \sin(\delta_r) + F_{cr} \sin(\delta_r)
 \end{aligned} \tag{4}$$

En la formula (4), F_{lf} y F_{lr} son las fuerzas longitudinales de las ruedas delantera y trasera, F_{cf} y F_{cr} son las fuerzas laterales de ambas ruedas (delantera y trasera). Los ángulos de dirección delantero y trasero se representan como δ_f y δ_r respectivamente. Se asume que el modelo de vehículo seleccionado solo tiene dirección en la rueda delantera, resultando en que $\delta_r = 0$. Además, si se desprecia el efecto de transferencia de carga y asumiendo que la velocidad del vehículo cambia lentamente, las cargas verticales del neumático delantero y trasero puede calcularse[10]:

$$F_{zf} = \frac{l_r mg}{2(l_f + l_r)} \tag{5}$$

$$F_{zr} = \frac{l_f mg}{2(l_f + l_r)} \tag{6}$$

Las fuerza longitudinal y lateral del neumático puede expresarse como una función compleja del ángulo de deriva del neumático α , ángulo de deslizamiento longitudinal del neumático s y la fuerza vertical F_z .

$$F_l = f_l(\alpha, s, F_z) \tag{7}$$

$$F_c = f_c(\alpha, s, F_z) \tag{8}$$

Además, los ángulos de deriva trasero y delantero pueden calcularse aplicando la siguiente ecuación:

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{\dot{y} - l_f \dot{\phi}}{\dot{x}} \tag{9}$$

$$\alpha_r = \frac{\dot{y} + l_r \dot{\phi}}{\dot{x}} \tag{10}$$

En la fórmula, α_f y α_r son los ángulos de deslizamiento de las ruedas delanteras y traseras respectivamente, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son las velocidades longitudinal y lateral del vehículo, $\dot{\phi}$ es la tasa de variación del ángulo de guiñada y δ_f el ángulo de dirección de la rueda delantera. Con el fin de minimizar el coste computacional para el modelo simplificado, se asume la hipótesis de pequeños ángulos de deslizamiento. Resultando en una simplificación en las funciones trigonométricas que aparecen en las ecuaciones que describen la dinámica del modelo de bicicleta de la Figura 1. Satisfaciendo la siguiente condición:

$$\cos \delta_r \approx 1, \sin \delta_f \approx \delta_f, \tan \delta_f \approx \delta_f \tag{11}$$

Las ecuaciones (1)-(8) derivan del sistema de coordenadas local centrado en el cuerpo del vehículo. Existe una relación entre el sistema de coordenadas fijo en el cuerpo y el sistema de coordenadas inercial X, Y [10]:

$$\dot{X} = \dot{x} \cos \delta_f - \dot{y} \sin \delta_f \tag{12}$$

$$\dot{Y} = \dot{x} \sin \delta_f + \dot{y} \cos \delta_f \tag{13}$$

Donde X es la posición longitudinal en el sistema de referencias inercial e Y es la posición lateral en el sistema de coordenadas inercial.

2.2. Modelo de neumático no lineal. Modelo de Dugoff

Para conseguir una reducción en el coste computacional de los cálculos, es muy habitual encontrar algoritmos de control donde se asume la hipótesis de pequeños ángulos de deslizamiento descrito en la ecuación (9). Cuando dicha hipótesis es cierta y los ángulos de deslizamiento longitudinal y lateral son pequeños, las fuerzas que actúan sobre el neumático pueden aproximarse linealmente como:

$$F_l = C_l s, F_c = C_c \alpha \tag{14}$$

En la ecuación (14), C_l es la rigidez longitudinal del neumático y C_c es la rigidez lateral del mismo. El uso de dicha ecuación tiene limitado el rango de aplicación, ya que solo es viable su uso para aceleraciones laterales a_y menores de 0.3-0.4g y condiciones de adherencia normales y no cerca de la pérdida de tracción. En caso de sobrepasar el límite de la aceleración lateral o si el vehículo circula en superficies de baja adherencia, las fuerzas laterales y longitudinales que se calculan en el modelo interno del controlador pueden inducir cierto error. Ya que empíricamente, se ha observado que, en caso de sobrepasar dichas limitaciones, el incremento de las fuerzas en el neumático es más lento con el ángulo de deriva longitudinal y lateral, perdiendo la linealidad. Por ello, las fuerzas calculadas bajo la hipótesis lineal de pequeños deslizamientos serían mayores que la fuerza bajo condiciones

reales. Introduciendo una discrepancia en el modelo interno del controlador y el vehículo real que se desea controlar. Para hacer el controlador más preciso y versátil, se implementa un modelo de vehículo basado en el modelo de neumático no lineal de Dugoff[11], reemplazando el coeficiente de rigidez constante de la ecuación (14) por un coeficiente corregido no lineal, el cual permite capturar el comportamiento real del neumático bajo condiciones que favorecen la pérdida de proporcionalidad entre el deslizamiento y la fuerza. La expresión que se usa para el cálculo de este nuevo coeficiente de rigidez no lineal es:

$$C_{\alpha_{ij}}^{non} = \frac{C_{\alpha_{ij}}}{1-s_{ij}} f(\sigma) \quad (15)$$

Siendo $f(\sigma)$ el parámetro de deflexión del neumático, el cual otorga al modelo interno la capacidad de reproducir el comportamiento del neumático con mayor rigor, involucrando los rangos de trabajo donde se pierde la linealidad debido a los factores descritos en el párrafo anterior. Este se calcula aplicando la siguiente formula:

$$\sigma = \frac{\mu F_{z_{ij}}(1-s_{ij})}{2\sqrt{(C_{s_{ij}}s_{ij})^2 + (C_{\alpha_{ij}}\tan \alpha_{ij})^2}} \quad (16)$$

$$f(\sigma) = \begin{cases} \sigma(2-\sigma), & \sigma < 1 \\ 1, & \sigma \geq 1 \end{cases} \quad (17)$$

Donde μ es el coeficiente de adherencia, $F_{z_{ij}}$ es la carga vertical sobre el neumático, $C_{s_{ij}}$ es el valor de referencia del coeficiente de rigidez longitudinal del neumático y $C_{\alpha_{ij}}$ es el valor de referencia de rigidez lateral. s_{ij} y α_{ij} son los ángulos de deslizamiento longitudinal y lateral del mismo. El índice i indica la dirección de la fuerza (x o y) y el índice j la rueda en la que se aplica la fuerza (delantera o trasera). En las ecuaciones, la rueda delantera se asocia con la letra f , que deriva del inglés “*front*”. Para la rueda trasera, se hace uso de la letra r , en inglés “*rear*”. Una vez calculados los parámetros de rigidez longitudinal y lateral, pueden obtenerse las fuerzas lateral y longitudinal de forma sencilla:

$$F_{x_{ij}} = C_{s_{ij}}^{non} s_{ij} \quad (18)$$

$$F_{y_{ij}} = C_{\alpha_{ij}}^{non} \alpha_{ij} \quad (19)$$

Puede verse en las ecuaciones (18) y (19) que la fuerza lateral es solo dependiente del ángulo de deslizamiento lateral y que la fuerza longitudinal del deslizamiento longitudinal. Por lo que sustituyendo dichas ecuaciones en las ecuaciones (1)-(3), se puede obtener el modelo de bicicleta no lineal basado en Dugoff:

$$\ddot{x} = \frac{2F_{x_f} \cos(\delta_f) - 2C_{\alpha_f}^{non} \left(\delta_f - \frac{\dot{y} + l_f \dot{\phi}}{\dot{x}} \right) \sin(\delta_f) + 2F_{x_r}}{m} + \dot{y} \dot{\phi} \quad (20)$$

$$\ddot{y} = \frac{2F_{x_f} \sin(\delta_f) + 2C_{\alpha_f}^{non} \left(\delta_f - \frac{\dot{y} + l_f \dot{\phi}}{\dot{x}} \right) \cos(\delta_f)}{m} - \frac{2C_{\alpha_r}^{non} \left(\frac{\dot{y} - l_r \dot{\phi}}{\dot{x}} \right)}{m} - \dot{x} \dot{\phi} \quad (21)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\left(2F_{x_f} \sin(\delta_f) + 2C_{\alpha_f}^{non} \left(\delta_f - \frac{\dot{y} + l_f \dot{\phi}}{\dot{x}} \right) \cos(\delta_f) \right) l_f}{I_z} - \frac{2C_{\alpha_r}^{non} \left(\frac{\dot{y} - l_r \dot{\phi}}{\dot{x}} \right) l_r}{I_z} \quad (22)$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \quad (23)$$

$$\dot{X} = \dot{x} \cos \delta_f - \dot{y} \sin \delta_f \quad (24)$$

$$\dot{Y} = \dot{x} \sin \delta_f + \dot{y} \cos \delta_f \quad (25)$$

3. Diseño del Controlador Predictivo basado en Modelo

3.1. Algoritmo de Control propuesto

El principio fundamental del MPC consiste en resolver, en cada instante de tiempo, un problema de optimización que minimiza una función de coste, la cual combina los errores entre las salidas predichas y las referencias, así como los esfuerzos de control. Este cálculo se realiza bajo las restricciones físicas y operativas del sistema, como límites en los estados, salidas o entradas. Solo se aplica la primera acción de control de esta secuencia, y el proceso se repite en el siguiente paso, actualizando el modelo con las mediciones más recientes. La estructura del controlador puede verse en la Figura 4.

El primer elemento importante es el generador de referencias, el cual, en función de la posición y velocidad estimada del vehículo, obtendrá para cada instante de tiempo T_s , el conjunto de puntos que sirven como referencia durante todo el horizonte de predicción definido en el controlador. Otro elemento importante para destacar es el modelo de neumático de Dugoff, tomando los ángulos de deslizamiento α_f y α_r como entrada, calcula internamente los coeficientes de rigidez no lineal $C_{\alpha_{ij}}^{non}$ y $C_{s_{ij}}^{non}$. El controlador, tomando los nuevos coeficientes de rigidez, actualiza el modelo interno del vehículo y predice el comportamiento de este a lo largo del horizonte de predicción. Finalmente, una vez predicho el comportamiento, se compara con el conjunto de puntos de la referencia y se obtiene la acción de control óptima. Siendo esta última el ángulo de dirección del vehículo.

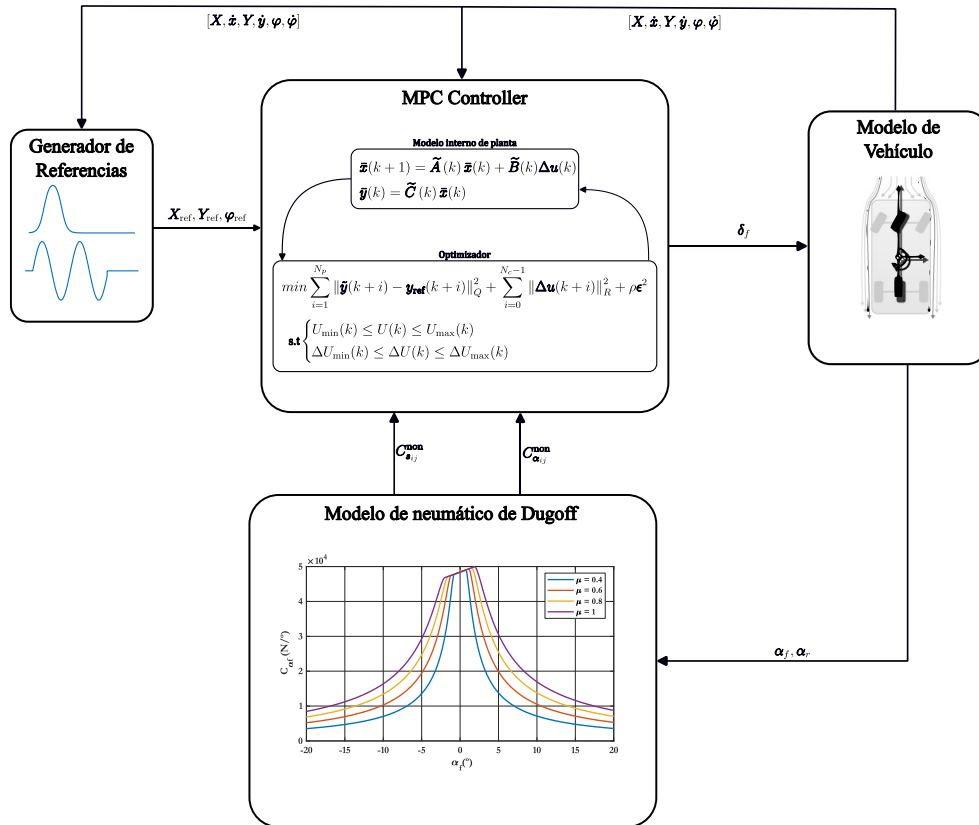


Figura 2: Bucle de control del MPC

3.2. Modelo empleado para la predicción

La discretización es un proceso esencial para el desarrollo de algoritmos de control de tipo predictivo, ya que estos emplean un modelo discreto del sistema dinámico interno para realizar la predicción sobre el comportamiento futuro de este. Siendo necesario representar en espacio de estados las ecuaciones (20)-(25). Para ello, seleccionamos como variables de estado la posición longitudinal x , la velocidad longitudinal $\dot{x}$, la posición lateral y , la velocidad lateral $\dot{y}$, el ángulo de rotación de vehículo (ángulo de guiñada) φ , la variación del ángulo $\dot{\varphi}$, la desviación lateral Y y la desviación longitudinal X . El conjunto de variables de estado se agrupa en forma matricial, definiendo lo que se conoce como vector de estados $\mathbf{x} = [X, \dot{x}, Y, \dot{y}, \varphi, \dot{\varphi}]^T$. En las ecuaciones (20)-(23) se observa

como el sistema también depende de la variable del ángulo de dirección δ_f . En sistemas de control aplicado al seguimiento de trayectorias, es muy habitual escoger como variable de control $\mathbf{u} = \delta_f$.

La forma general de representar la ecuación de estado es la siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (26)$$

La variable de estado y la variable de control del vehículo de referencia satisface, para cualquier instante de tiempo, la ecuación de arriba. Donde el subíndice r representa la variable de referencia:

$$\dot{\mathbf{x}}_r = f(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) \quad (27)$$

El paso previo a la discretización es la linealización del sistema definido en la ecuación (26). Para ello, se realiza una expansión en series de Taylor alrededor de cualquier punto de referencia de la trayectoria, ignorando los términos de alto orden [10]:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_r, \mathbf{u}_r) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) + \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_r}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_r) \quad (28)$$

Si se restan las ecuaciones (28) y (27) se obtiene:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\tilde{\mathbf{u}} \quad (29)$$

Donde las matrices $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ se conocen como matrices Jacobianas, y representa las derivadas parciales de una función respecto de sus variables independientes.

La fórmula (29) representa una ecuación de espacio de estados continua en el tiempo. Para su implementación en el algoritmo de control, esta debe discretizarse, ya que el MPC requiere de un modelo en espacio de estados discreto para poder realizar la predicción. Existen multitud de métodos de discretización de ecuación, cada uno con sus ventajas y desventajas en cuanto a los requisitos computacionales, precisión del seguimiento de la trayectoria, etc [10]. En el presente artículo, se propone el método de discretización de Euler, que nos permite representar las matrices del sistema continuas $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ en su forma discreta:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(k) &= \mathbf{I} + T_s \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{B}(k) &= T_s \mathbf{B}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

Siendo T_s el tiempo de muestreo e $\mathbf{I}$ la matriz identidad cuya dimensión debe ser coincidir con la de la matriz $\mathbf{A}(t)$. Siendo en este caso una matriz 6×6 . Una vez realizada la discretización, el nuevo modelo en espacio de estados que se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\tilde{\mathbf{u}}(k) \quad (31)$$

Ya que la variable de control es el ángulo de dirección de la rueda delantera δ_f , para poder asegurar un funcionamiento normal del vehículo y prevenir cambios repentinos en dicho ángulo, es crucial limitar el incremento del ángulo de dirección. Con este propósito, la ecuación (31) se transforma a su representación en forma de incrementos de la acción de control [10]. Esta reformulación permite que el sistema controle directamente los cambios en el ángulo, lo que es esencial para mantener una conducción suave y predecible, especialmente en escenarios donde el comportamiento dinámico del vehículo puede verse afectado por variaciones rápidas:

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}(k)\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k) \quad (32)$$

En la formula: $\bar{\mathbf{x}}(k) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}(k) \\ \tilde{\mathbf{u}}(k-1) \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{6 \times 6} & \mathbf{B}_{6 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{6 \times 1} \\ \mathbf{I}_{1 \times 1} \end{pmatrix}$, $\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k) - \tilde{\mathbf{u}}(k-1)$.

El MPC calculará la acción de control óptima que minimice el error existente entre la posición actual del vehículo y la trayectoria. En otras palabras, el objetivo es reducir la distancia entre el vehículo y la trayectoria conforme avanza la simulación [10]. Según los fundamentos de la representación de sistemas en espacio de estados, las salidas pueden obtenerse mediante la siguiente operación matricial:

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \tilde{\mathbf{C}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) \quad (33)$$

Siendo: $\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$.

Por lo que combinando las ecuaciones (31) y (32), se obtiene el modelo completo en espacio de estados discreto:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}(k)\Delta\tilde{\mathbf{u}}(k) \\ \bar{\mathbf{y}}(k) = \tilde{\mathbf{C}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) \end{cases} \quad (34)$$

3.3. Cálculo de la salida en el Dominio Temporal de la Predicción

Se asume que el horizonte de predicción N_p es mayor que el horizonte de control N_c . Basándose en la ecuación (37), se estima que se aplicaran N_c incrementos de control durante el horizonte de control del sistema. Cuando el tiempo k se encuentra en el horizonte de control, al pasar del horizonte de control al horizonte de predicción, la cantidad de control aplicada al sistema permanece constante y el incremento de la acción de control es 0. Tras realizar la derivación, se puede obtener la expresión de salida predicha del sistema[10]:

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \bar{\mathbf{A}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k) + \bar{\mathbf{B}}(k)\Delta\tilde{\mathbf{U}}(k) \quad (35)$$

Siendo en la formula:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+N_p|k) \end{pmatrix} & \Delta\tilde{\mathbf{U}}(k) &= \begin{pmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{u}}(k|k) \\ \vdots \\ \Delta\tilde{\mathbf{u}}(k+N_c-1|k) \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{A}}(k) &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_p} \end{pmatrix} & \bar{\mathbf{B}}(k) &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_c-1}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_p-1}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{N_p-N_c}\tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.4. Definición de la función de coste objetivo

Tal y como se comenta en el punto 3.1, el MPC necesita de una función de coste a optimizar para calcular el valor óptimo de la acción de control. De esta manera, para garantizar que el vehículo autónomo sea capaz de seguir una trayectoria de referencia con precisión y de forma estable, es necesario optimizar el error existente entre la referencia y la posición del vehículo estimada y la acción de control. Llevándose a cabo la optimización del error a lo largo del horizonte de predicción N_p y la de la acción de control a lo largo del horizonte de control N_c . Además, es necesario restringir el incremento en la acción de control en cada periodo de muestreo, evitando variaciones bruscas y oscilaciones. Por consiguiente, refiriéndose al método de restricciones suaves utilizado en la literatura [10], la forma seleccionada de la función objetivo es la siguiente:

$$J = \sum_{i=1}^{N_p} |\tilde{\mathbf{y}}(k+i|k) - \mathbf{y}_{\text{ref}}(k+i|k)|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N_c-1} |\Delta\mathbf{u}(k+i|k)|_R^2 + \rho\epsilon^2 \quad (36)$$

En la fórmula, ρ es el coeficiente de ponderación del factor de relajación de las restricciones ϵ . Q y R son las matrices de pesos de la salida y de la variable de control respectivamente. El primer término de la ecuación representa la acumulación del error existente entre la salida del sistema y la referencia de dicha salida. Es decir, captura la desviación entre ambas variables reflejando la capacidad de seguimiento de la trayectoria objetivo. El segundo término hace referencia a la acumulación de desviaciones de la variable de control. Reflejando el requisito de cambio uniforme en dicha variable. El tercer término garantiza que exista una solución óptima factible al realizar cambios en tiempo real. $\tilde{\mathbf{y}}(k+i|k)$ es el valor predicho de la salida para el tiempo discreto k en el tiempo futuro $k+i$. $\mathbf{y}_{\text{ref}}(k+i|k)$ es el valor de referencia de la salida para el tiempo discreto k en el tiempo futuro $k+i$. $\Delta\mathbf{u}(k+i|k)$ es la secuencia del futuro de la variable de control. Realizando las operaciones necesarias para transformar el problema de optimización genérico definido por la función de coste J de la ecuación (36) en su representación matricial[12], se obtiene la formulación típica de un problema de optimización cuadrática QP:

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}(k)^T \mathbf{H}(k)\boldsymbol{\Psi}(k) + \mathbf{f}(k)^T \boldsymbol{\Psi}(k) + \mathbf{P}(k) \quad (37)$$

Donde la matriz $\mathbf{H}(k)$ es la matriz Hessiana, $\mathbf{f}(k)$ es el vector del gradiente lineal, $\boldsymbol{\Psi}(k)$ es el vector de variables de decisión y $\mathbf{P}(k)$ es el vector de términos independientes. El cálculo de estas matrices puede verse a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(k) &= \begin{pmatrix} 2(\bar{\mathbf{B}}(k)^T Q \bar{\mathbf{B}}(k) + R) & 0 \\ 0 & 2\rho \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Psi}(k) = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{U} \\ \epsilon \end{pmatrix}, \mathbf{f}(k) = (2\mathbf{E}(k)^T Q \bar{\mathbf{B}}(k) \quad 0), \\ \mathbf{P}(k) &= \mathbf{E}(k)^T Q \mathbf{E}(k), \mathbf{E}(k) = \bar{\mathbf{A}}(k)\bar{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{y}_{\text{ref}}(k|k) \end{aligned}$$

3.5. Restricciones del problema de optimización

En algoritmos de control de tipo predictivo es necesario imponer ciertas restricciones que deben cumplirse durante la resolución del problema de optimización definido por la ecuación (37). Generalmente, se definen restricciones en la propia variable de control y en su incremento y en las salidas. En escenarios reales de conducción, el ángulo de dirección tiene un rango limitado de giro por lo que se debe tener en cuenta dicha limitación a la hora de diseñar el controlador. Al mismo tiempo, para tener en cuenta la estabilidad del vehículo al realizar el seguimiento de la trayectoria, también se debe limitar el incremento de la variable de control [12].

Dicho lo cual, las restricciones impuestas al valor máximo y mínimo de la acción de control:

$$\mathbf{U}_{\min}(k) \leq \mathbf{U}(k) \leq \mathbf{U}_{\max}(k) \quad (38)$$

Donde $\mathbf{U}_{\min}(k)$ es el valor mínimo de la variable de control y $\mathbf{U}_{\max}(k)$ es el valor máximo. Imponiendo también restricciones al incremento de la variable de control:

$$\Delta \mathbf{U}_{\min}(k) \leq \Delta \mathbf{U}(k) \leq \Delta \mathbf{U}_{\max}(k) \quad (39)$$

Donde $\Delta \mathbf{U}_{\min}(k)$ es el valor mínimo del incremento de control y $\Delta \mathbf{U}_{\max}(k)$ es el valor máximo del incremento. E imponiendo restricciones a las salidas:

4. Simulación

Para validar el rendimiento del controlador MPC no lineal propuesto, se realizan diversos escenarios de simulación en el entorno de Matlab/Simulink. Estos escenarios incluyen maniobras típicas como el doble cambio de carril o el camino sinusoidal. Además, las pruebas se llevan a cabo tanto a velocidad constante como a velocidad variable, lo que permite analizar el efecto de la aceleración longitudinal en el control. Por último, se plantea un escenario que considera un trazado complejo, compuesto por segmentos rectos y curvos, ejecutado a velocidad constante.

4.1. Parámetros de la simulación

Los parámetros mecánicos del vehículo empleado para realizar las diferentes simulaciones se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del vehículo.

Parámetros	Valor(uds.)
Masa del vehículo	$m = 1723 \text{ kg}$
Inercia rotacional del vehículo	$I_z = 4175 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Distancia entre ejes	$L = 2.8 \text{ m}$
Distancia desde el centro de gravedad al eje delantero	$l_f = 1.232 \text{ m}$
Distancia desde el centro de gravedad al eje trasero	$l_r = 1.468 \text{ m}$
Coefficiente de rigidez lateral del neumático delantero	$C_{\alpha_f} = 48400 \text{ N/rad}$
Coefficiente de rigidez lateral del neumático trasero	$C_{\alpha_r} = 44800 \text{ N/rad}$
Coefficiente de rigidez longitudinal neumático delantero	$C_{l_f} = 90800 \text{ N/rad}$
Coefficiente de rigidez longitudinal neumático trasero	$C_{l_r} = 76000 \text{ N/rad}$

En línea con [8], [12], las restricciones que se imponen a la variable de control y a la variación de esta son:

$$\begin{aligned} -30^\circ &\leq \delta_f \leq 30^\circ \\ -5^\circ &\leq \Delta \delta_f \leq 5^\circ \end{aligned} \quad (40)$$

4.2. Simulación a velocidad constante baja y coeficiente de adherencia elevado

Se propone estudiar la precisión del controlador ante un escenario de velocidad del vehículo es constante y la maniobra de referencia es el Doble Cambio de Carril. Esta maniobra se usa ampliamente en ensayos donde se mide la estabilidad y la maniobrabilidad del vehículo [12].

El controlador propuesto se basa en el modelo no lineal de neumático de Dugoff, el cual, partiendo de un coeficiente rigidez de referencia, C_{α_f} , C_{l_f} para el neumático delantero y C_{α_r} , C_{l_r} para el neumático trasero, obtiene un nuevo coeficiente de rigidez $C_{\alpha_{ij}}^{non}$ no lineal que tiene en cuenta rangos de trabajo del neumático donde se pierde la proporcionalidad entre la fuerza y el ángulo de deslizamiento. Para reflejar el rendimiento de este primer controlador no lineal NMPC, se compara con un controlador MPC convencional. El cual no considera la región no lineal del neumático y está diseñado bajo la simplificación de coeficiente de rigidez lateral y longitudinal constante. En la Tabla 3 se recogen los parámetros del controlador para este escenario de simulación:

Tabla 2: Parámetros del controlador y características de la simulación.

Parámetros del controlador	Valor(uds.)	Parámetros del ensayo	Valor(uds.)
Periodo de muestreo	$T_s = 0.01 \text{ s}$	Velocidad del vehículo	$v = 36 \text{ km/h}$
Horizonte de predicción	$N_p = 10$	Coefficiente de adherencia	$\mu = 0.9$
Horizonte de control	$N_c = 3$		
Coefficiente de ponderación posición longitudinal	$q_x = 5$		
Coefficiente de ponderación posición lateral	$q_y = 5$		
Coefficiente de ponderación ángulo guiñada	$q_\phi = 16$		
Coefficiente de ponderación de la variable de control	$r = 1$		

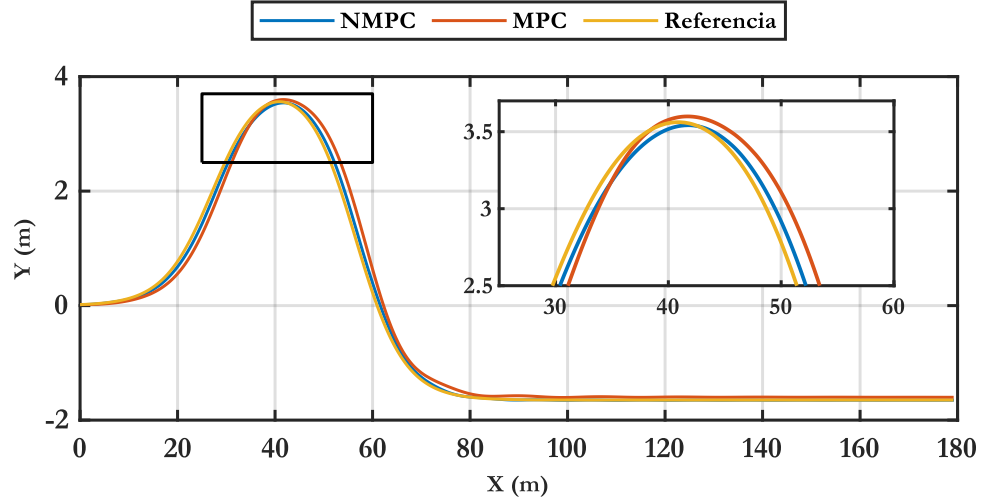


Figura 3: Comparación seguimiento referencia lateral.

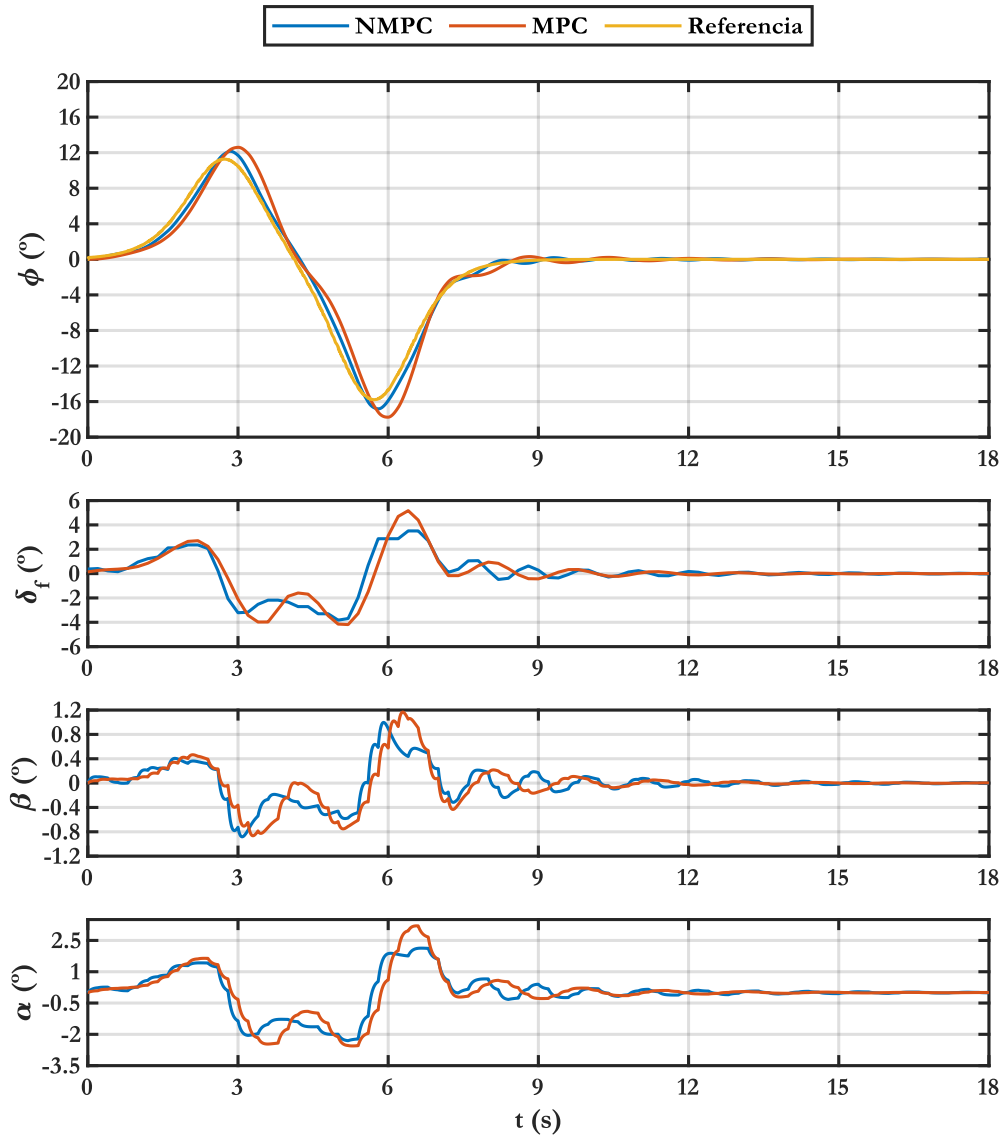


Figura 4: (a) Comparación del ángulo de guiñada del vehículo; (b) Comparación del ángulo de dirección delantero; (c) Comparación del ángulo de deslizamiento; (d) Comparación del ángulo de deslizamiento del neumático.

En la Figura 3 puede observarse la efectividad que tienen ambos controladores para seguir la referencia de posición lateral. Bajo unas condiciones de adherencia elevada $\mu = 0.9$ y velocidad baja $v = 36 \text{ km/h}$, ambos controladores muestran una gran exactitud a la hora de seguir la trayectoria. Pero, al fijarse en el detalle de la zona remarcada, puede verse como el controlador NMPC muestra mayor precisión consiguiendo que la trayectoria que describe el vehículo controlado esté más próxima a la de la referencia. Esta diferencia de precisión entre ambos controladores se acentúa en las zonas donde la curvatura es mayor, alcanzando ángulos de deslizamiento más elevados y acercándose a la zona de trabajo no lineal del neumático. Aunque en dichas condiciones de trabajo se puede suponer que las fuerzas sobre los neumáticos son constantes, el controlador NMPC puede describir con mayor rigor las fuerzas sobre los neumáticos que el controlador lineal MPC. Mostrando por consiguiente mayor precisión.

En la Figura 4a, se representa el ángulo de guiñada de referencia que debe seguir el vehículo para poder seguir la trayectoria con la mayor precisión y estabilidad. Se observa que el ángulo que describe el vehículo controlado por el NMPC está más próximo al ángulo objetivo en prácticamente todo el trazado. Resaltando esta discrepancia en las zonas donde la curvatura es mayor y se alcanzan mayores ángulos de deslizamiento. En la Figura 4b-d se describen el ángulo de la dirección, el de deslizamiento del vehículo y el de deslizamiento del neumático delantero del controlador NMPC y del controlador MPC son parecidos, ya que la magnitud y forma que describen es parecida. Aunque justamente las pequeñas fluctuaciones existentes entre ambos controladores se dan en el rango de 6-8 segundos, donde se ejecuta la última curva de la maniobra. Una vez superada dicha zona, se observa como las oscilaciones se van atenuando con el tiempo, siendo mayores las del MPC, lo que también demuestra una peor capacidad de corregir el error en el régimen permanente. En definitiva, el rendimiento de ambos controladores es muy parecido ya que ambos son capaces de seguir la trayectoria con precisión y fluidez, aunque queda demostrado que en zonas donde se alcanzan mayores aceleraciones laterales y mayores ángulos de deslizamiento, el controlador NMPC se ajusta mejor, debido a su capacidad de modelizar con mayor precisión el comportamiento del neumático. En definitiva, en condiciones donde la superficie de adherencia pueda ser baja y los ángulos de deslizamiento sean elevados, el rendimiento del controlador lineal se ve disminuido ya que el modelo interno que emplea no es capaz de capturar ese régimen de trabajo no lineal al que se sometería el neumático.

5. Conclusiones

En este artículo se diseña un algoritmo de control predictivo basado en el modelo no lineal del neumático. Este permite reducir el error de cálculo de las fuerzas de los neumáticos del vehículo ante condiciones adversas, tales como zonas con muy baja adherencia, elevadas velocidades, etc. Evitando el deterioro en la capacidad de seguimiento de maniobras bajo dichas condiciones. En el controlador no lineal propuesto, las fuerzas se caracterizan mediante funciones no lineales basadas en el modelo de Dugoff, en vez hacer uso de la aproximación del comportamiento lineal del neumático, el cual, según se comenta previamente, presenta ciertas limitaciones en su aplicación. Durante el proceso de diseño del controlador, se hace uso de la expansión en series de Taylor ampliamente usada en el proceso de linealización de sistemas complejos. Esto es determinante para la construcción de las matrices características que permiten la resolución del problema de optimización. Posteriormente, se lleva a cabo un proceso de discretización del sistema mediante el método de Euler. Para poder validar el potencial del controlador propuesto, se llevan a cabo una serie de simulaciones bajo distintas condiciones y se compara con el controlador lineal clásico MPC. El primer escenario, consiste en realizar la maniobra de cambio de carril a una velocidad baja y un coeficiente de adherencia alto. Ambos controladores muestran una gran precisión a la hora de realizar el seguimiento de la trayectoria, siendo el controlador no lineal ligeramente superior. Como trabajo futuro, se propone ampliar la cantidad de ensayos a realizar, variando las condiciones de trabajo. Esto incluye escenarios que simulen conducción en superficies con bajo coeficiente de adherencia, velocidad variable, etc. Además de probar otras maniobras típicas de ensayos como el camino senoidal o de serpiente o ante un camino aleatorio que incluya trazados con diferentes curvaturas.

6. Referencias

- [1] “Ref_1_Self-Driving_Cars_and_the_Urban_Challenge”.
- [2] Q. Li, N. Zheng, and H. Cheng, “Springrobot: A prototype autonomous vehicle and its algorithms for lane detection,” in *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, Dec. 2004, pp. 300–308. doi: 10.1109/TITS.2004.838220.
- [3] G. Huang and Q. Ma, “Research on Path Planning Algorithm of Autonomous Vehicles Based on Improved RRT Algorithm,” *International Journal of Intelligent Transportation Systems Research*, vol. 20, no. 1, pp. 170–180, Apr. 2022, doi: 10.1007/s13177-021-00281-2.
- [4] C. C. Yuan et al., “Research on path planning based on new fusion algorithm for autonomous vehicle,” May 01, 2020, SAGE Publications Inc. doi: 10.1177/1729881420911235.
- [5] S. Yu, M. Hirche, Y. Huang, H. Chen, and F. Allgöwer, “Model predictive control for autonomous ground vehicles: a review,” Dec. 01, 2021, Springer. doi: 10.1007/s43684-021-00005-z.

- [6] P. Falcone, F. Borrelli, J. Asgari, H. E. Tseng, and D. Hrovat, "Predictive active steering control for autonomous vehicle systems," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 15, no. 3, pp. 566–580, May 2007, doi: 10.1109/TCST.2007.894653.
- [7] P. Falcone, H. Eric Tseng, F. Borrelli, J. Asgari, and D. Hrovat, "MPC-based yaw and lateral stabilisation via active front steering and braking," in *Vehicle System Dynamics*, 2008, pp. 611–628. doi: 10.1080/00423110802018297.
- [8] S. Cheng, L. Li, X. Chen, J. Wu, and H. Da Wang, "Model-Predictive-Control-Based Path Tracking Controller of Autonomous Vehicle Considering Parametric Uncertainties and Velocity-Varying," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 68, no. 9, pp. 8698–8707, Sep. 2021, doi: 10.1109/TIE.2020.3009585.
- [9] S. Frendi, R. Mellah, L. Seddiki, and H. Akdag, "Tracking controller design of a sideslip angle and yaw rate for electrical vehicle bicycle model," in *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier B.V., 2016, pp. 169–174. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.108.
- [10] F. Lin, M. Sun, J. Wu, and C. Qian, "Path tracking control of autonomous vehicle based on nonlinear tire model," *Actuators*, vol. 10, no. 9, Sep. 2021, doi: 10.3390/act10090242.
- [11] L. Chen, M. Bian, Y. Luo, and K. Li, "Maximum tire road friction estimation based on modified Dugoff tire model," in *Proceedings - 2013 International Conference on Mechanical and Automation Engineering*, MAEE 2013, 2013, pp. 56–61. doi: 10.1109/MAEE.2013.24.
- [12] Y. Gao, X. Wang, J. Huang, and L. Yuan, "Adaptive Model Predictive Control for Intelligent Vehicle Trajectory Tracking Considering Road Curvature," *International Journal of Automotive Technology*, vol. 25, no. 5, pp. 1051–1064, Oct. 2024, doi: 10.1007/s12239-024-00086-8.