



# Ensayos de fractura en modos I y II de uniones bimateriales

Faustino Mujika Garitano<sup>1</sup>, Ainhoa Arrese Arratibel<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ingeniería Mecánica, Grupo MecMat, Universidad del País Vasco (UPV/EHU),  
faustino.mujika@ehu.eus, ainhoa.arrese@ehu.eus

---

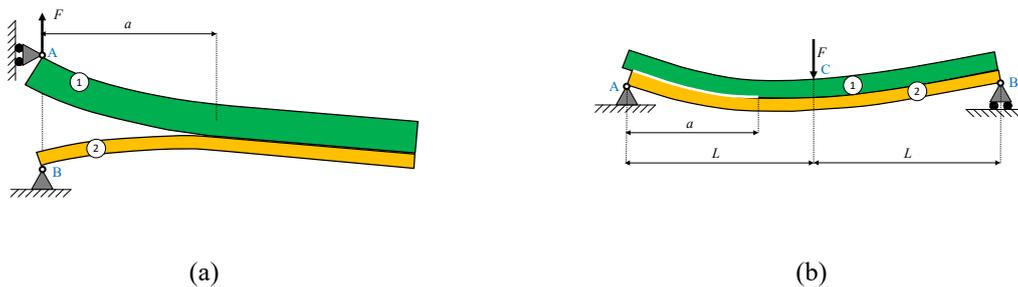
Los ensayos de *Viga en Doble Voladizo (Double Cantilever Beam, DCB)* y de *Flexión con Entalla Final (End Notched Flexure, ENF)* fueron diseñados para caracterizar la fractura interlaminar de materiales compuestos unidireccionales en modo I y modo II, respectivamente. En el caso de uniones adhesivas, pueden aplicarse en probetas simétricas. Cuando se produce asimetría geométrica y/o material en los adherentes, los ensayos se denominan *ADCB* y *AENF*. En tales casos, se genera una combinación de modos I+II.

En la presente contribución se tratan, por una parte, algunos aspectos relacionados con los criterios para establecer las condiciones en las que se producen modos puros de fractura, basados en una interpretación novedosa de la integral *J*. Se explican también los fundamentos de los modelos analíticos que permiten determinar los desplazamientos y las tasas de liberación de energía en los ensayos *ADCB* y *AENF*, respectivamente.

---

## 1. Introducción

La fractura interlaminar en composites se analiza habitualmente mediante las configuraciones de Viga en Doble Voladizo (*Double Cantilever Beam*, DCB) y de Flexión con Entalla Final (*End Notched Flexure*, ENF) en modos I y II, respectivamente. El parámetro de fractura que se determina es la Tasa de Liberación de Energía (*Energy Release Rate*, ERR). Las mismas configuraciones DCB y ENF se utilizan también para caracterizar uniones adhesivas, con brazos de grieta simétricos para que la fractura se produzca en modo puro. Sin embargo, en caso de que exista asimetría geométrica o material, se produce una combinación de modos I+II. Por lo tanto, si se caracteriza la fractura en configuraciones DCB o ENF, no se obtienen directamente las tasas de liberación de energía en modo I y modo II, respectivamente. La ERR obtenida corresponde a una combinación de modos I+II. Las configuraciones de ensayo DCB y ENF en el caso de probetas simétricas, originan ensayos DCB y ENF. En el caso de probetas asimétricas, las mismas configuraciones de ensayo originan ensayos asimétricos, denominados ADCB y AENF, como se muestra en la Figura 1. En el caso de la probeta ADCB, la combinación de modos origina que la parte no agrietada tenga una rotación de sólido rígido. En el caso de la probeta AENF, si el brazo inferior es más flexible, se produce cierta apertura entre los brazos de grieta, indicando modo I. En caso contrario, se produce contacto total en la zona agrietada.



**Figura 1:** Ensayos de probetas ADCB (a) y AENF (b).

En el presente estudio, se analizan casos en que la progresión de la fractura se produce a lo largo de un plano. Cuando la punta de grieta avanza, se produce una zona de proceso de fallo (*fracture process zone*, FPZ) relacionada con la plasticidad en la punta de grieta, la existencia de micro-fracturas, el puenteo de fibras u otros factores. En consecuencia, se pueden definir dos puntas de grieta. Por una parte, la punta de grieta retrasada, que corresponde al inicio de la FPZ y que se puede denominar también punta de grieta visual, ya que es la que se determina visualmente, con métodos técnicamente más o menos sofisticados. Por otra parte, la punta de grieta adelantada, que corresponde al final de la FPZ y que no es discernible visualmente. En la mecánica de la fractura elástica lineal (*linear elastic fracture mechanics*, LEFM), se considera una punta de grieta definida a partir de la cual el comportamiento es elástico lineal, por lo que pueden plantearse las ecuaciones de la Teoría Matemática de la Elasticidad en el entorno de la punta de grieta. Cuando la FPZ es pequeña, como en el caso de composites de matriz termoestable reforzados con fibra larga, dicha hipótesis se puede considerar válida.

Las probetas utilizadas en las configuraciones DCB y ENF tienen sección rectangular, siendo la dimensión de la base sensiblemente mayor que la del espesor. En tales probetas, puede aplicarse la teoría de vigas laminadas (*Laminated Beam Theory*, LBT) para desarrollar una aproximación analítica de los ensayos [1]. Para aplicar dicha teoría, es necesario también definir una punta de grieta que proporcione una longitud de grieta. La teoría de vigas que incluye los efectos de cortante, suele plantearse habitualmente suponiendo un campo de desplazamientos, por lo que las condiciones de compatibilidad del problema elástico quedan automáticamente satisfechas. Sin embargo, dicha teoría, denominada también de Timoshenko, lleva a incongruencias al aplicar las leyes constitutivas y las ecuaciones de equilibrio. En efecto, el campo de deformaciones tangenciales transversales es uniforme en el espesor, por lo que, en el caso de un único material, las tensiones tangenciales son uniformes. Esta distribución no concuerda con la distribución parabólica obtenida mediante las ecuaciones diferenciales de equilibrio, obtenida al integrar las tensiones normales en el espesor. Además, proporciona valores no nulos en los extremos del espesor, cuando deberían ser nulos. A pesar de la incongruencia, se utilizan las tensiones tangenciales obtenidas de las ecuaciones de equilibrio y el efecto del cortante en los desplazamientos transversales se incluye mediante el factor de cortante, basado en la energía complementaria de deformación o coenergía de deformación de la viga. Es necesario subrayar que la energía de deformación es una función de estado de las deformaciones y que la coenergía es una función estado de las tensiones. Ambas son iguales en el caso elástico lineal, cuando no existen deformaciones iniciales, pero difieren cuando existen deformaciones iniciales, debidas a efectos higrótérmicos [2].

Otro posible planteamiento para la teoría de vigas, consiste en asumir un campo lineal de deformaciones normales, de acuerdo a la hipótesis de Navier-Bernoulli y determinar las tensiones tangenciales mediante las ecuaciones de equilibrio [1]. Posteriormente, se determina la coenergía y los desplazamientos generalizados pueden obtenerse a partir del teorema de Engesser-Castigliano. En este caso, no es necesario definir factores de corrección para el

efecto del cortante. Dividiendo el desplazamiento experimental del punto de aplicación de carga entre la fuerza aplicada, se obtiene la flexibilidad. Dicha flexibilidad depende de la geometría y de las propiedades elásticas de la probeta. Si el módulo de flexión y de cortadura transversal de los brazos de grieta son conocidos, la única incógnita es la longitud de grieta  $a$ . Esta longitud de grieta incorpora todos los efectos que afectan a la flexibilidad del sistema, entre ellos la FPZ, independientemente del tamaño de la misma. El valor obtenido, se define como longitud de grieta equivalente y se trata de un valor comprendido entre la grieta visual y la grieta adelantada. Este parámetro es fundamental en nuestros desarrollos, ya que es el que proporciona valores adecuados de la ERR, a diferencia de la grieta visual, que en casos de FPZ considerables, puede llevar a valores erróneos. La determinación de la longitud de grieta equivalente, por lo tanto, no es sólo un método para soslayar la siempre complicada y subjetiva tarea de determinar la punta de grieta. Es necesaria para determinar valores adecuados de la ERR.

En el presente trabajo, primero se establecen las condiciones geométricas que se deben satisfacer para obtener modo puro I y modo puro II en configuraciones DCB y ENF de probetas asimétricas, es decir en ensayos ADCB y AENF [3]. Posteriormente, utilizando la aproximación de la coenergía y la LBT, la ERR se puede determinar mediante la derivada de la coenergía respecto de  $a$  [4].

## 2. La coenergía de deformación y sus derivadas parciales en un avance infinitesimal de grieta

Se considera un sólido elástico con una grieta al que se aplican fuerzas concentradas generalizadas,  $F_j$ . El desplazamiento generalizado del punto de aplicación de cada  $F_j$  en su dirección, es  $\delta_j$ . En un avance infinitesimal de grieta, el trabajo realizado es:

$$dW = dU + Gwda \quad (1)$$

donde  $dW$  es el trabajo realizado por las fuerzas aplicadas;  $dU$  es el cambio en la energía de deformación;  $G$  es la energía necesaria para el avance de grieta por unidad de área y  $w$  es el ancho de la probeta. El trabajo diferencial de las fuerzas externas  $F_j$  en sus respectivos desplazamientos  $\delta_j$ , aplicando el convenio de índices repetidos, es  $dW = F_j d\delta_j$ . Sustituyendo este valor, la Ec.(1) queda:

$$dU = F_j d\delta_j - Gwda \quad (2)$$

Por otra parte, la energía complementaria de deformación o coenergía de deformación, se define como:

$$C = F_j \delta_j - U \quad (3)$$

Diferenciando (3) e introduciendo el resultado en (2) resulta:

$$dC = \delta_j dF_j + Gwda \quad (4)$$

Asumiendo que la coenergía es una función de estado, cuyas variables de estado las fuerzas generalizadas  $F_j$ , la longitud de grieta  $a$  y algunos parámetros desconocidos  $\lambda_k$ , la diferencial de la función es exacta por lo que:

$$dC = C_{,F_j} dF_j + C_{,a} da + C_{,\lambda_k} d\lambda_k \quad (5)$$

Identificando términos en las ecuaciones (4) y (5), se tiene:

$$C_{,F_j} = \delta_j \quad (6)$$

$$\frac{C_{,a}}{w} = G \quad (7)$$

$$C_{,\lambda_k} = 0 \quad (8)$$

La ecuación (6) es el teorema de Engesser-Castigliano. La ecuación (7) proporciona la ERR y (8) representa la condición estacionaria de la coenergía respecto a parámetros desconocidos que puedan intervenir en el modelo matemático. Por otra parte, la coenergía de deformación en una viga en flexión simple, sin tener en cuenta los efectos higrotérmicos, viene dada por:

$$C = \frac{1}{2} d \int_{L_x} M^2 dx + \frac{1}{2} s \int_{L_x} V^2 dx \quad (9)$$

donde  $M$  es el momento flector;  $V$  la fuerza cortante;  $d$  la flexibilidad a flexión, siendo:  $d = (EI)^{-1}$ ;  $E$  es el módulo de flexión;  $I$  es el momento de inercia;  $s$  es la flexibilidad a cortante;  $L_x$  es la longitud de la viga.

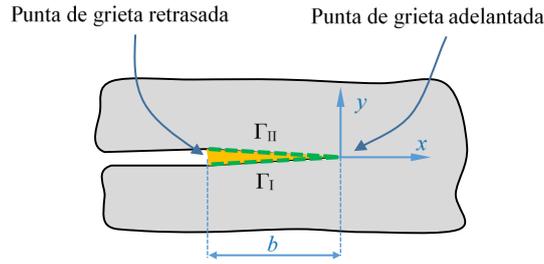
### 3. Integral $J$ y VCCT

En la presente sección, se demuestra que la integral  $J$  es equivalente a la técnica de cierre virtual de grieta (*Virtual Crack Closure Technique*, VCCT) en el caso de pequeñas FPZs. La Figura 2 muestra las puntas de grieta retrasada o visual y adelantada, en la zona de proceso de fallo. La integral  $J$  fue definida por Rice en 1968 y viene dada por:

$$J = \int_{\Gamma} U_0 dy - \bar{T} \cdot \bar{\delta}_{,x} ds \quad (10)$$

donde  $\Gamma$  es un contorno arbitrario alrededor de la punta de grieta;  $U_0$  es la densidad de energía de deformación;  $\bar{T}$  es el vector tensión, definido según la normal externa  $\hat{n}$  a lo largo de  $\Gamma$ ;  $\bar{\delta}$  es el vector de desplazamiento;  $ds$  es un elemento de arco a lo largo de  $\Gamma$ . La integral  $J$  se evalúa en sentido antihorario, comenzando en la cara inferior y continuando según  $\Gamma$  hasta la cara superior. Tomando una curva que coincide con el contorno de la FPZ, constituida por  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  según la Figura 2, resulta que  $dy = 0$  y la ecuación (10) queda:

$$J = - \int_{\Gamma} \bar{T} \cdot \bar{\delta}_{,x} ds \quad (11)$$



**Figura 2:** Zona de proceso de fallo.

Teniendo en cuenta las componentes de tensión y desplazamiento, la ecuación (11) puede escribirse como:

$$J = \int_0^{-b} \sigma_y \delta_{n,x} dx + \int_0^{-b} \tau_{xy} \delta_{t,x} dx \quad (12)$$

Siendo  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  las tensiones en las caras I y II;  $b$  la longitud de la FPZ;  $\delta_n$  y  $\delta_t$  los desplazamientos relativos tangencial y normal dados por:

$$\begin{aligned} \delta_n(x) &= v_{II}(x, 0^+) - v_I(x, 0^-) \\ \delta_t(x) &= u_{II}(x, 0^+) - u_I(x, 0^-) \end{aligned} \quad (13)$$

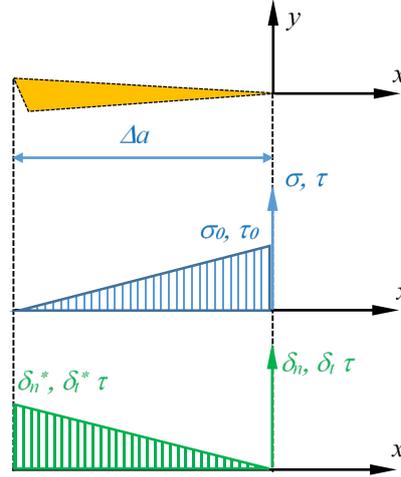
donde  $u$  y  $v$  son las componentes horizontal y vertical del vector desplazamiento, respectivamente. La ecuación (12) está evaluada a lo largo de la distancia  $b$  para un instante determinado del proceso de fallo. Realizando un cambio de variable y siendo  $\delta_n^*$  y  $\delta_t^*$  los valores de los desplazamientos relativos normal y tangencial en la punta de grieta visual, respectivamente, la integral  $J$  se puede escribir como:

$$J = \int_0^{\delta_n^*} \sigma d\delta_n + \int_0^{\delta_t^*} \tau d\delta_t \quad (14)$$

La integral de la ecuación (14) puede considerarse como una integral de evolución, evaluada en la punta de grieta visual, a lo largo del proceso de fallo, desde una separación nula hasta los valores finales de desplazamiento relativo, donde las tensiones son nulas.

Considerando ahora una zona cohesiva de longitud  $\Delta a$ , según la Figura 3, donde las tensiones y los desplazamientos relativos se suponen distribuidos linealmente:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \left( 1 + \frac{x}{\Delta a} \right) & \tau &= \tau_0 \left( 1 + \frac{x}{\Delta a} \right) \\ \delta_n &= -\frac{\delta_n^*}{\Delta a} x & \delta_t &= -\frac{\delta_t^*}{\Delta a} x \end{aligned} \quad (15)$$



**Figura 3:** FPZ con distribuciones lineales de tensiones y desplazamientos relativos.

Sustituyendo (15) en (14), siendo  $b = \Delta a$  :

$$J = \frac{1}{2} \sigma_0 \delta_n^* + \frac{1}{2} \tau_0 \delta_t^* \quad (16)$$

$$\sigma_0 = \left[ \frac{dF_n(x)}{w dx} \right]_{x=0} \quad \tau_0 = \left[ \frac{dF_t(x)}{w dx} \right]_{x=0}$$

donde  $F_n$  y  $F_t$  son las fuerzas normal y tangencial respectivamente. Considerando  $\Delta a \rightarrow 0$  :

$$\left( \frac{dF_n}{dx} \right)_{x=0} = F_n(0) - F_n(-\Delta a) = F_n(0) = F_n^* \quad (17)$$

$$\delta_n^* = \delta_n(-\Delta a) = \delta_n(-\Delta a) - \delta_n(0) = -\left( \frac{d\delta_n}{dx} \right)_{x=0}$$

La ecuación (17) puede extenderse a las componentes tangenciales. Considerando el cierre de grieta, resulta  $dx = -da$ . Sustituyendo (17) en (16), la integral  $J$  para una FPZ pequeña queda:

$$J = \frac{1}{2w} F_n^* \left( \frac{d\delta_n}{da} \right)_{x=0} + \frac{1}{2w} F_t^* \left( \frac{d\delta_t}{da} \right)_{x=0} \quad (18)$$

La ecuación (18) corresponde al método VCCT. Los desplazamientos relativos normales y sus derivadas son:

$$\delta_n = v_1 - v_2 = (v_1 - v_2)_b + (v_1 - v_2)_s \quad (19)$$

$$\frac{d\delta_n}{da} = (\theta_1 - \theta_2)_b + \left( \frac{dv_1}{da} - \frac{dv_2}{da} \right)_s$$

donde  $v_1$  y  $v_2$  son los desplazamientos verticales en la cara superior e inferior, respectivamente. Los subíndices  $b$  y  $s$  se refieren a flexión y cortante, respectivamente. Agrupando términos para cada brazo de grieta, la ecuación (19) queda:

$$\frac{d\delta_n}{da} = \left( \theta_{1b} + \frac{dv_{1s}}{da} \right) - \left( \theta_{2b} + \frac{dv_{2s}}{da} \right) = \phi_1 - \phi_2 \quad (20)$$

Además, los desplazamientos relativos tangenciales y sus derivadas son:

$$\delta_t = u_1 - u_2 \quad (21)$$

$$\frac{d\delta_t}{da} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

En la ecuación (21),  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las deformaciones unitarias normales en la cara superior e inferior de la punta de grieta, respectivamente. Sustituyendo (20) y (21) en (18), resulta:

$$J = \frac{1}{2} F_n^* (\phi_1 - \phi_2) + \frac{1}{2} F_t^* (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (22)$$

Las contribuciones en modo puro I y modo puro II en la integral  $J$ ,  $J_I$  y  $J_{II}$  respectivamente, son:

$$\begin{aligned} J_I &= \frac{1}{2} F_n^* (\phi_1 - \phi_2)_{x=0} \\ J_{II} &= \frac{1}{2} F_t^* (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)_{x=0} \end{aligned} \quad (23)$$

#### 4. Condiciones de modo puro

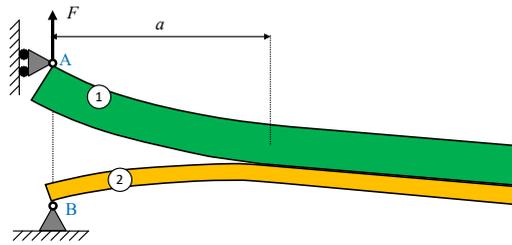
Teniendo en cuenta (23), las condiciones de modo puro pueden formularse de la siguiente forma:

*El modo puro I ocurre cuando  $F_t^* = 0$  en la punta de grieta y  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  cerca de la punta de grieta.* Si una condición se satisface, también la otra, es decir:  $F_t^* = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Por una parte, si no existe fuerza tangencial en la punta de grieta, no se generan deformaciones normales relativas en la cercanía de la punta de grieta. Por otra parte, si no existen deformaciones normales relativas en la cercanía de la punta de grieta, no es necesaria una fuerza tangencial en la punta de grieta que las impida.

*El modo puro II ocurre cuando  $F_n^* = 0$  y  $\phi_1 = \phi_2$ .* Como en el caso anterior, se cumple que  $F_n^* = 0 \Leftrightarrow \phi_1 = \phi_2$ . En este caso, si la fuerza normal en la punta de grieta es nula, ambos brazos tienen el mismo giro, que corresponde a una viga única. A la inversa, si los ángulos son iguales cerca de la punta de grieta, el comportamiento corresponde a una viga única y debe ser nula la fuerza normal entre los brazos de grieta.

#### 5. Ensayo ADCB

La Figura 4 muestra la configuración de carga y apoyos de un ensayo ADCB. Debido a la combinación de modos, se produce una rotación de la zona agrietada como sólido rígido.

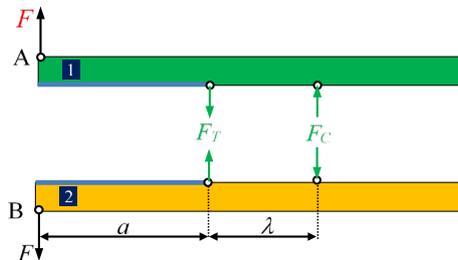


**Figura 4:** Configuración de carga y apoyos en un ensayo ADCB.

Analizando las condiciones de modo puro I, igualando las deformaciones de los brazos de grieta en la punta, se obtiene la siguiente relación entre espesores:

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \quad (24)$$

si se cumple (24), se comprueba que la rotación como sólido rígido es nula. En el caso de modo puro I, se considera un modelo matemático basado en la sustitución del estado de tensiones en la zona no agrietada, por una fuerza de tracción en la punta de grieta y otra fuerza de compresión situada a una distancia  $\lambda$ , en principio desconocida, como se muestra en la Figura 5.



**Figura 5:** Modelo utilizado para analizar el ensayo ADCB en modo puro I.

Tras determinar las expresiones de los momentos flectores y fuerzas cortantes, se determina la coenergía, según la ecuación (9). Por otra parte, la distancia  $\lambda$ , el desplazamiento de A y la ERR se determinan según las ecuaciones (6)-(8), siendo:

$$C_{,\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 3 \frac{s_1 + s_2}{d_1 + d_2} \quad (25)$$

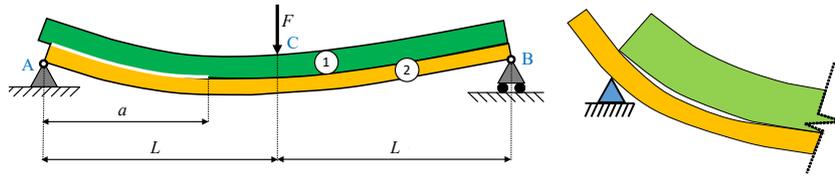
$$C_{,F} = \delta_A \Rightarrow f_A = \frac{1}{3}(d_1 + d_2) \left( 1 + \frac{\lambda}{a} \right) a^3 + (s_1 + s_2) \left( 1 + \frac{a}{\lambda} \right) \quad (26)$$

$$\frac{C_{,F}}{w} = G_I \Rightarrow G_I = \frac{F^2}{2w} \left[ \frac{1}{3}(d_1 + d_2)(3a^2 + 2a\lambda) + (s_1 + s_2) \left( 1 + 2\frac{a}{\lambda} \right) \right] \quad (27)$$

Se ha comprobado que los resultados obtenidos de las ecuaciones (25)-(27) concuerdan con modelos numéricos desarrollados en Abaqus con elementos cuadriláteros incompatibles, que funcionan muy bien cuando se incluyen los efectos del cortante transversal [4]. La necesidad de la inclusión de dichos efectos es palmaria en el caso de la ecuación (25), ya que en otro caso la distancia  $\lambda$  sería nula.

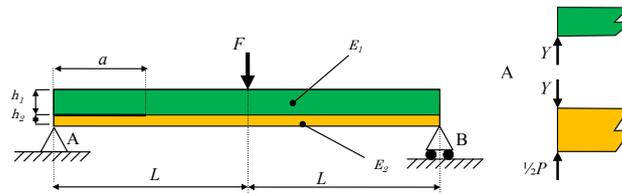
## 6. Ensayo AENF

La Figura 6 muestra la configuración de carga y apoyos de un ensayo AENF. Debido a la combinación de modos, si el brazo inferior es más flexible, se produce despegue entre los brazos de grieta, indicando modo I. En el caso opuesto, cuando el brazo superior es el más flexible, se produce contacto total en la zona agrietada.



**Figura 6:** Configuración de carga y apoyos en el ensayo AENF.

Para desarrollar el modelo matemático, se supone que el contacto entre brazos ocurre encima del soporte A, como se muestra en la Figura 7, siendo  $Y$  la fuerza de interacción entre ambos brazos.



**Figura 7:** Modelo de interacción entre brazos utilizado para analizar el ensayo AENF en modo puro II.

En el caso de modo puro II, se impone la condición de que la fuerza normal en la punta de grieta debe ser nula. Tampoco puede haber tensiones normales en la zona no agrietada, por lo que la fuerza  $Y$  debe ser igual a la fuerza cortante del brazo superior, obtenida mediante la LBT. Imponiendo dicha condición, se obtiene la misma relación entre espesores que en el caso de modo puro I.

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \quad (28)$$

El hecho de que las condiciones para modo puro I y II sean las mismas es muy favorable, ya que se pueden realizar ensayos en modo puro I y II con probetas bimetálicas de una misma placa. Cuando se satisface (28), se comprueba que no existe separación entre los brazos de grieta en un ensayo AENF. En el caso de modo puro II, se considera un modelo matemático basado en el hecho de que el comportamiento de la probeta en la zona no agrietada corresponde a una viga única, dado que se satisface la hipótesis de Navier-Bernoulli. Determinando las ecuaciones de momentos flectores y fuerzas cortantes, se determina la coenergía, según la ecuación (9). Por otra parte, la fuerza  $Y$ , el desplazamiento de C, y la ERR se determinan según las ecuaciones (6)-(8), siendo:

$$C_{,Y} = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{2}F \frac{a^2 d_2 + 3s_2}{a^2 (d_1 + d_2) + 3(s_1 + s_2)} \quad (29)$$

$$C_{,F} = \delta_C \Rightarrow f_C = \left[ \frac{d_1 (d_2 a^3 + 3s_2 a)}{d_1 + d_2} + d(L^3 - a^3) + 3s(L - a) + L^3 d + 3sL \right] \quad (30)$$

$$\frac{C_{,F}}{w} = G_{II} \Rightarrow G_{II} = \frac{F^2}{8w} \left[ \frac{d_1 (a^2 d_2 + s_2)}{d_1 + d_2} - a^2 d - s \right] \quad (31)$$

Se ha comprobado que los resultados obtenidos de las ecuaciones (29)-(31) concuerdan con modelos numéricos desarrollados en Abaqus con elementos cuadriláteros incompatibles, para distintas configuraciones bimateriales [4].

## 7. Conclusiones

El presente estudio está relacionado con el análisis de ensayos de uniones bimateriales en configuraciones de ensayo DCB y AENF. Debido a la asimetría de la probeta, se generan combinaciones de modos I+II y los ensayos correspondientes se denominan ADCB y AENF.

Se han analizado dichos ensayos utilizando la coenergía de deformación y la LBT, determinando en un primer paso las condiciones geométricas para las cuales se obtienen modo puro I y modo puro II en ensayos ADCB y AENF, respectivamente. La relación de espesores es la misma en ambos casos, por lo que se pueden realizar ensayos en modos puros I y II en probetas obtenidas de la misma placa. En una segunda fase, se han determinado las expresiones de la flexibilidad de la probeta y de la ERR para los ensayos ADCB y AENF en modos puros I y II, respectivamente.

En casos en los que la FPZ es considerable, no es posible definir una longitud de grieta, debido a la indefinición de la punta de grieta. La utilización de la grieta equivalente, que tiene en cuenta todos los factores que afectan a la flexibilidad de la probeta, incluyendo la FPZ, permite obtener resultados adecuados de las tasas de liberación de energía en modos I y II en ensayos ADCB y AENF.

La aproximación analítica que se presenta en este estudio ha sido contrastada con modelos de MEF, obteniendo excelentes resultados.

## 8. Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Universidad del País Vasco (UPV/EHU), a través de la convocatoria de grupos de investigación en la convocatoria GIU21/015.

## 9. Referencias

- [1] Mujika F., Olave M., Cantera M.A., Garitaonandia U., Isasa M., Arrese A., "On the equivalent flexural and shear moduli of laminated beams: Definition and determination by bending tests", *Composites Part A* 175, 107802 (2023)
- [2] Mujika F., "A novel approach for the three-point flexure test of multidirectional laminates", *Journal of Composite Materials*, 46(3), 259-274 (2012)
- [3] Mujika F., Tsokanas P., Arrese A., Valvo P.S., da Silva L.F.M., "Mode decoupling in interlaminar fracture toughness tests on bimaterial specimens", *Engineering Fracture Mechanics* 290, 109454 (2023)
- [4] Mujika F., Tsokanas P., Arrese A., da Silva L.F.M., "Energy release rate in bimaterial specimens tested in pure modes I and II", *Engineering Fracture Mechanics* 301, 110012 (2024)