



Análisis de planteamientos alternativos al método de rigidez

Nagore Insausti¹, Faustino Mujika¹

¹ Grupo MecMat, Departamento de Ingeniería Mecánica, Escuela de Ingeniería de Gipuzkoa, Universidad del País Vasco – Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU),

nagore.insausti@ehu.eus, faustino.mujika@ehu.eus

El método numérico que más se emplea para el análisis del comportamiento mecánico es el Método de los Elementos Finitos (Finite element method, FEM). En el FEM se diferencian dos formulaciones: el método de los desplazamientos o de rigidez (Stiffness method, SM) y el método de las fuerzas (Force method, FM), en función de si las incógnitas principales son los desplazamientos o las fuerzas de los nudos, respectivamente. El procedimiento de cálculo más utilizado es el basado en desplazamientos, debido a su facilidad de programación. El método SM está basado en la hipótesis de un campo de desplazamientos compatible. Entre los métodos alternativos cabe destacar los elementos finitos que incluyen los modos incompatibles (con grados de libertad adicionales en el campo de desplazamientos) y los métodos híbridos (basados en tensiones y desplazamientos). En este trabajo se pretende analizar y comparar el método de rigidez con los métodos alternativos que utilizan los modos incompatibles y los métodos híbridos.

1. Introducción

Las ecuaciones de equilibrio de un problema y sus correspondientes condiciones de contorno solo se pueden resolver analíticamente en determinados problemas. Si los materiales son anisótropos o las condiciones de contorno son complejas, puede ser muy difícil determinar la resolución analítica del problema y en algunos casos resulta imposible. En dichos casos, los métodos de análisis numérico son herramientas muy útiles, es decir, utilizando un método numérico y analizando un modelo matemático a través del ordenador se puede obtener una solución aproximada.

Entre los métodos numéricos, uno de los más extensamente utilizados es el método de los elementos finitos (Finite element method, FEM). En el método FEM el problema real se divide o discretiza en componentes cuyo comportamiento pueda conocerse. En los sistemas continuos, mediante el proceso de discretización, se obtiene un sistema discreto equivalente del real y se obtiene una solución aproximada.

Dentro del FEM, el método que más extendido está es el de los desplazamientos o de la rigidez (Stiffness method, SM). Este método se basa en el principio del trabajo virtual (Principle of virtual work, PVW) [1]. En el método SM se supone un campo de desplazamiento compatible en cada elemento y las condiciones de equilibrio se consideran en función de los desplazamientos en los nodos. La otra aproximación básica en el análisis estructural es el método de las fuerzas (Force method, FM) [2], que se deriva de la aplicación del principio del trabajo virtual complementario (Principle of Complementary Virtual Work, PCVW). El método FM parte de un campo de tensiones en equilibrio y se determinan las funciones de los parámetros de fuerzas internas que cumplen las ecuaciones de compatibilidad. El método FM casi ha desaparecido debido a que su programación es significativamente más difícil que la del SM.

El objetivo de este trabajo es analizar y comparar el método de rigidez con el método de modos incompatibles y los métodos formulados en tensiones y deformaciones. En primer lugar, se indican las formulaciones correspondientes a los tres métodos para, a continuación, presentar dos ejemplos en los que se comparan los resultados obtenidos con los citados métodos.

2. Formulación del método SM y otras alternativas

El método SM es el límite inferior de la solución real [3] y existen varios métodos alternativos que buscan corregir ciertas deficiencias en los elementos finitos clásicos, como la rigidez excesiva o la insuficiente representación de ciertos campos de desplazamientos o tensiones. Entre ellos caben destacar el método que incluye los modos incompatibles [4, 5] y el método rigidez-fuerza (Stiffness-force method, SFM) [6, 7]. A continuación, se presenta la formulación del método SM, para después indicar las modificaciones que se realizan en los métodos con modos incompatibles y SFM.

2.1. Método de la rigidez

Si un sistema continuo está discretizado en elementos finitos, según el principio PVW y suponiendo que el grado de libertad de desplazamientos del elemento es n_e , el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas en un elemento es igual al trabajo virtual realizado por las tensiones:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (1)$$

Donde $i = 1 \dots n_e$; V es el volumen del elemento, $\{\delta\varepsilon\}$ y $\{\delta a^i\}$ son los vectores de las deformaciones y los desplazamientos nodales virtuales independientes; $\{\sigma\}$ es el vector de tensiones y $\{P^i\}$ es el vector de las fuerzas nodales.

En el análisis mediante el método SM, los desplazamientos dentro de un elemento se interpolan usando funciones de forma basadas en los nodos del elemento [1]:

$$\{u\} = [N] \{a^i\} \quad (2)$$

Donde $\{a^i\}$ es el vector de los desplazamientos nodales y $[N]$ es la matriz de funciones de interpolación de desplazamientos. Una vez obtenidos los desplazamientos nodales se conocen también las deformaciones en el elemento:

$$\{\varepsilon\} = [L][N] \{a^i\} = [B] \{a^i\} \quad (3)$$

donde $[L]$ es la matriz de operadores diferenciales y $[B]$ es la matriz de forma. Mediante la matriz de rigidez del material $[D]$ se relacionan las deformaciones y las tensiones:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (4)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (4) en la ecuación (1):

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{a^i\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (5)$$

Al ser $\{\delta a^i\}$ independientes, para que se cumpla (5), se obtiene la ecuación de gobierno del método SM:

$$[K^e] \{a^i\} = \{P^i\} \quad (6)$$

Siendo $[K^e]$ la matriz de rigidez del elemento:

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV \quad (7)$$

La matriz de rigidez del sistema se construye mediante el ensamblaje de las matrices de rigidez de los elementos.

2.2. Método con modos incompatibles

La aproximación mediante el método SM puede ser insuficiente en ciertos casos (como por ejemplo en el caso de grandes deformaciones), para solucionar ese problema, el método con modos incompatibles introduce funciones adicionales en la interpolación de desplazamientos, permitiendo mayor flexibilidad en la deformación del elemento sin modificar la continuidad global del modelo. De esta forma se reduce la rigidez artificial que pueda tener el método SM y se representan mejor los efectos de flexión y corte.

En este método los desplazamientos del elemento se calculan introduciendo unas funciones adicionales $[M]$ [1]:

$$\{u\} = [N]\{a^i\} + [M]\{q^j\} \quad (8)$$

Donde $[M]$ son las funciones incompatibles, es decir, no cumplen la compatibilidad con los elementos vecinos y $\{q^j\}$ son grados de libertad internos adicionales, que no afectan a los nodos del elemento. En la formulación de este método, la modificación es utilizar la ecuación (8) en lugar de la ecuación (2).

El método con modos incompatibles pasó a llamarse Enhanced Strain Method (ESM) [8,9] y en la actualidad se siguen publicando trabajos con nuevos elementos que utilizan los modos incompatibles [10-13].

2.3. Método SFM

El método SFM utiliza funciones de interpolación independientes para el campo de desplazamientos y el campo de tensiones [6,7]. En este método se cumplen las ecuaciones de equilibrio, como en el método SM y, además, se cumplen las condiciones de compatibilidad, como en el método FM, por lo tanto, puede decirse que está basado en tensiones y desplazamientos.

Las ecuaciones del SFM se obtienen de la aplicación de los principios del trabajo virtual, ecuación (1), y del trabajo virtual complementario:

$$\int_V \{\delta \sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (9)$$

En el método SFM la interpolación de las tensiones y los desplazamientos es independiente [6]. Las tensiones en cualquier punto del elemento se interpolan a partir de los parámetros de tensión $\{F^j\}$:

$$\{\sigma\} = [Y]\{F^j\} \quad (10)$$

siendo $[Y]$ la matriz de funciones de interpolación de tensiones. Por otro lado, el vector de tensiones se relaciona con el vector de deformaciones mediante la matriz de coeficientes de flexibilidad del material $[S]$:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) y (10) en el principio del trabajo virtual, ecuación (1), resulta:

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (12)$$

La matriz de equilibrio se define como:

$$[E] = \int_V [B]^T [Y] dV \quad (13)$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio se expresa como:

$$[E]\{F^j\} = \{P^i\} \quad (14)$$

Al sustituir las ecuaciones (10), (11) y (14) en el principio del trabajo virtual complementario, ecuación (9), resulta:

$$\{\delta F^j\}^T \left(\int_V [Y]^T [S][Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta F^j\}^T [E]^T \{a^i\} \quad (15)$$

La matriz de flexibilidad se define como:

$$[G] = \int_V [Y]^T [S][Y] dV \quad (16)$$

La ecuación (15) se puede expresar como:

$$[G]\{F^j\} = [E]^T \{a^i\} \quad (17)$$

De la ecuación (17) se obtienen los parámetros de tensiones del elemento $\{F^j\}$:

$$\{F^j\} = [G]^{-1} [E]^T \{a^i\} \quad (18)$$

Multiplicando esta expresión en ambos lados por la matriz de equilibrio $[E]$, el primer término de la ecuación (18), según (14) corresponde al vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos, $\{P^i\}$:

$$\{P^i\} = ([E][G]^{-1}[E]^T)\{a^i\} \quad (19)$$

La ecuación (19) se puede escribir:

$$[K^e]\{a^i\} = \{P^i\} \quad (20)$$

En el método SFM la matriz de rigidez del elemento es:

$$[K^e] = [E][G]^{-1}[E]^T \quad (21)$$

La matriz de rigidez de la estructura se obtiene del ensamblaje de las matrices elementales, tal y como se hace en el método SM.

Este método es equivalente al método híbrido [14] tal y como indicaron Adarraga et al. [6].

3. Comparación de los métodos SM, SFM y ESM

En esta sección se describen los problemas analizados utilizando los métodos SM, SFM y ESM. Se han seleccionado problemas sencillos y se han realizado los análisis en dos dimensiones.

3.1. Análisis de una viga en voladizo de material ortótropo.

En primer lugar, se ha analizado una viga en voladizo que se muestra en la Figura 1.

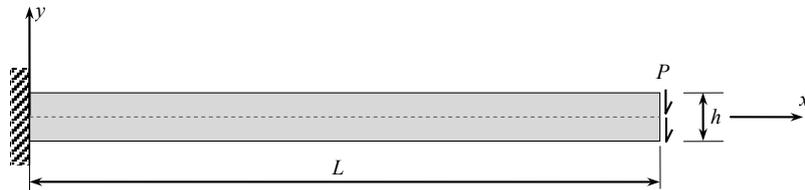


Figura 1: Viga en voladizo.

El material utilizado en el análisis es el laminado composite unidireccional carbono/epoxi AS4-3501-6 de la empresa Hexcel Composites y sus propiedades elásticas se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1: Propiedades mecánicas del composite AS4-3501-6.

E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
147,0	10,3	7,0	0,27

Se ha realizado el análisis numérico mediante los métodos SM, ESM y SFM utilizando modelos con número creciente de elementos y los resultados obtenidos se han comparado con una aproximación analítica. Esta última está basada en la teoría de vigas de Timoshenko y se ha considerado el efecto del cortante. El desplazamiento de los puntos de la línea media de la viga se calcula según:

$$v = -\frac{6Px^2}{E_1 t h^3} \left(L - \frac{x}{3} \right) - \frac{3}{5} \frac{Px}{G_{12} ht} \quad (22)$$

Y las tensiones normales mediante la siguiente expresión:

$$\sigma_x = \frac{6P}{th^2} (-L + x) \quad (23)$$

Se ha considerado una viga de longitud $L = 100$ mm, altura $h = 4$ mm, espesor $t = 2$ mm y carga $P = 10$ N. Por lo tanto, sustituyendo dichos valores en las ecuaciones (22) y (23) se obtienen los valores del desplazamiento y tensión máximos:

$$v_{\max} = 2,137 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = 187,5 \text{ MPa}$$

En la Figura 2 se muestra la variación en los valores de los desplazamientos y las tensiones máximas con el número de elementos utilizados en la discretización. En los mallados se han utilizado diferente número de elementos en la dirección longitudinal y transversal, concretamente: 4x1, 8x2, 16x4 y 32x8. Los cálculos con los métodos SM y SFM se han realizado en Matlab y los cálculos con los elementos incompatibles (CPS4I) en Abaqus. Los resultados obtenidos se han comparado, asimismo, con los valores determinados con la aproximación analítica.

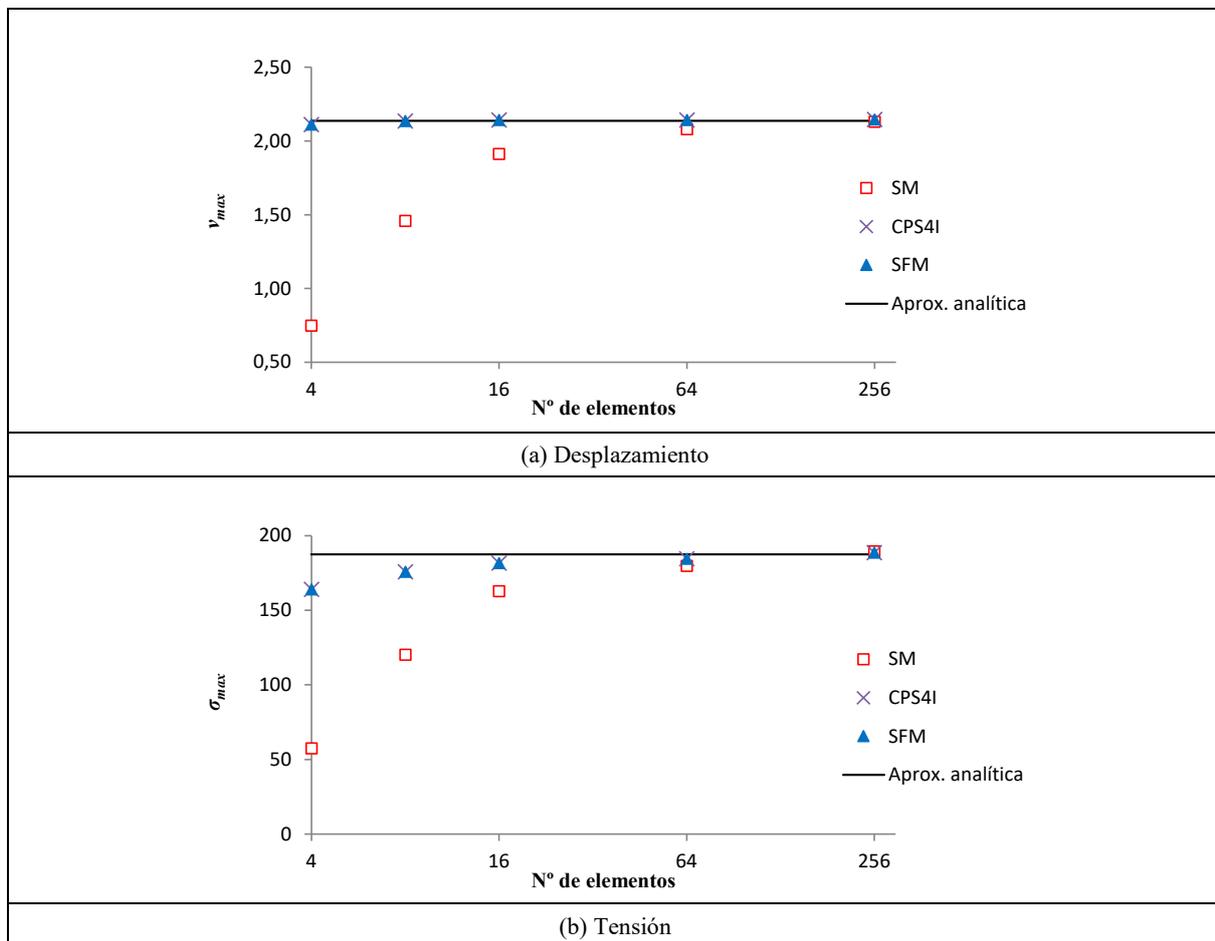


Figura 2: Valores máximos en función del grado de discretización.

3.2. Análisis de una viga de sección variable.

La viga de sección variable bajo una carga unitaria uniformemente distribuida en el extremo libre fue propuesta por Cook *et al.* [15]. En este problema los elementos finitos no son rectangulares como en el ejemplo anterior, sino que están distorsionados. En la Figura 3 se muestra la geometría y las dos discretizaciones utilizadas en el análisis

por elementos finitos. Se ha considerado el estado de tensión plana y material isotrópico: módulo elástico $E = 1$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$ y espesor de la viga de 1 mm.

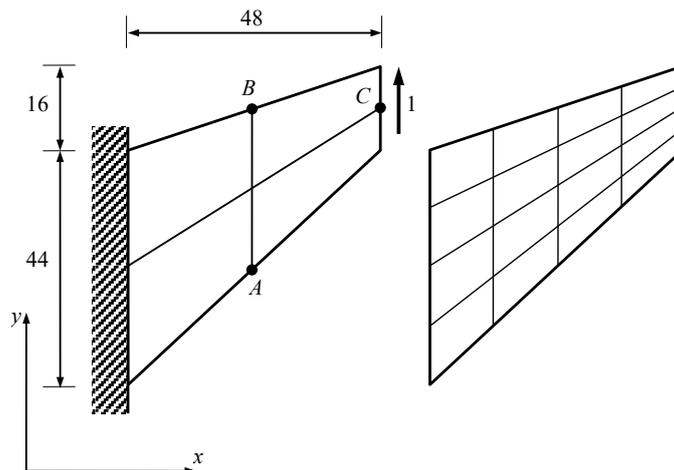


Figura 3: Viga de sección variable.

Los cálculos se han realizado utilizando Abaqus, se han utilizado los elementos CPS4 (método SM) y CPS4I (modos incompatibles) y se ha introducido la formulación del método SFM mediante una subrutina de usuario UEL. Los resultados obtenidos son la tensión principal máxima en el punto A, la tensión principal mínima en el punto B y el desplazamiento en el punto C. En la Tabla 2 se han comparado los resultados numéricos obtenidos con los métodos SM, ESM (elemento CPS4I) y SFM correspondientes a los mallados de la Figura 3 con los obtenidos utilizando una malla de 64x64 elementos con modos incompatibles.

Tabla 2: Desplazamiento y tensiones de la viga de sección variable.

	v_c (mm)		σ_{Amax} (MPa)		σ_{Bmin} (MPa)	
	2x2	4x4	2x2	4x4	2x2	4x4
SM	11,85	18,30	0,1219	0,1874	-0,0965	-0,1526
CPS4I	21,05	23,02	0,1730	0,2217	-0,1658	-0,1849
SFM	21,13	23,02	0,1854	0,2241	-0,1550	-0,1856
64x64	23,96	23,96	0,2368	0,2368	-0,2035	-0,2035

4. Conclusiones

Las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos en el presente trabajo son los siguientes:

Por un lado, se puede concluir que cuando la discretización se realiza con pocos elementos, los resultados obtenidos utilizando los elementos que incluyen los modos incompatibles y el método híbrido son significativamente mejores que los determinados mediante el método de rigidez.

Por otro lado, al comparar los resultados obtenidos utilizando los modos incompatibles y el método híbrido, si los elementos son rectangulares se obtienen los mismos resultados. Sin embargo, cuando se utilizan elementos cuadriláteros generales, se obtienen resultados similares, pero no iguales.

5. Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) la financiación del Grupo de Investigación MECMAT GIU21/015 en la convocatoria de 2021.

6. Referencias

- [1] Oñate, E., *Structural analysis with the finite element method*, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona (2009).
- [2] Robinson, J., *Integrated theory of finite element methods*, John Wiley & Sons, London (1973)
- [3] Fraeijs de Veubeke, B., Displacement and equilibrium models in the finite element method, *Stress Analysis*, 9, 145-197 (1965)
- [4] Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J., "Incompatible Displacement Models", *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, 43-57, London (1973)

-
- [5] Taylor, R.L., Beresford, P.J., Wilson, E.L., A non-conforming element for stress analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**, 1211-9 (1976)
- [6] Adarraga, I., Cantera, M.A., Romera, J.M., Insausti, N., Mujika, F., The dual integrated force method applied to unidirectional composites, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **98**, 663-77 (2014)
- [7] Insausti, N., “Implementación del método rigidez-fuerza en ensayos mecánicos de composites”, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, San Sebastián (2019)
- [8] Simo, J.C., Rifai, M.S., A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **29**, 1595-638 (1990)
- [9] Simo, J.C., Armero, F., Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **33**, 1413-49 (1992)
- [10] Ko, Y., Lee, P.S., Bathe, K.J., A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element, *Computers & Structures* **192**, 34-49 (2017)
- [11] Choi, H.G., Lee, P.S., Towards improving the 2D-MITC4 element for analysis of plane stress and strain problems, *Computers & Structures* **275**, 106933 (2023)
- [12] Wu, N.C., Huang, Y.Q., Chen, H.B., An unsymmetric 8-node hexahedral solid-shell element based on ANS and incompatible concepts for thin shell analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **417**, 112396 (2023)
- [13] Grbcic, S., Ibrahimbegovic, A., Jelenic, G., Incompatible-mode geometrically non-linear finite element for micropolar elasticity, *International Journal of Solids and Structures* **289**, 112647 (2024)
- [14] Pian, T. H. H., Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions, *AIAA Journal*, **2**, 1333-6 (1964)
- [15] Cook, R.D., *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley & Sons, New York (1981)