



Maquetas motorizadas de trenes epicicloidales: diseño y fabricación

E. E. Zayas Figueras, L. Jordi Nebot, J. Puig-Ortiz, M. Obermaier Fité, R. Sánchez Flores

Departamento de Ingeniería Mecánica, Universitat Politècnica de Catalunya, enrique.zayas@upc.edu, lluisa.jordi@upc.edu, joan.puig@upc.edu, marcobermaierfite@gmail.com, ruben.sanchez.flores@estudiantat.upc.edu

Uno de los temas fundamentales de la materia Teoría de Máquinas y Mecanismos (TMM) es el de engranajes y trenes de engranajes. Este trabajo se centra en el diseño y la fabricación de maquetas motorizadas de trenes de engranajes epicicloidales (o planetarios).

Se exponen dos maquetas que corresponden a dos de las principales aplicaciones de dichos mecanismos; una de ellas utiliza el tren epicicloidal como un sistema de transmisión de potencia (reductor o multiplicador) de un único grado de libertad (gdl) y la otra como un sistema de 2 gdl, cuya aplicación más común es el tren diferencial de un automóvil. Se utiliza el método de la fórmula (o de la ecuación de Willis) en cada caso, se hace el análisis cinemático y el de transmisión de pares entre ejes, éste último mediante el método de las potencias virtuales. Se expone el diseño y la fabricación de maquetas funcionales de bajo coste, utilizando la impresión 3D por filamento fundido para los principales componentes mecánicos. El funcionamiento se controla con un motor paso a paso, un driver L298N, una placa ArduinoUno y un panel de control con pantalla LCD y pulsadores que permiten variar tanto la velocidad como el sentido del giro del eje motor.

Las maquetas de trenes epicicloidales que se presentan surgen como parte de dos trabajos finales de grado de dos de los autores del trabajo y se utilizan como recursos didácticos de apoyo a la docencia en la asignatura TMM, impartida en el Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales y en el Grado en Tecnologías Industriales y Análisis Económico de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial de Barcelona.

1. Introducción

En la asignatura Teoría de Máquinas y Mecanismos (TMM), impartida en los grados en Ingeniería en Tecnologías Industriales y Tecnologías Industriales y Análisis Económico en la Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, es habitual el uso de maquetas didácticas portátiles como recursos de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje en los diversos temas que forman el programa de la asignatura [1].

La mayoría de maquetas disponibles en la asignatura son de accionamiento manual y, concretamente, en el tema dedicado al análisis de engranajes lo son todas. Este trabajo aparece a partir del planteamiento de disponer de maquetas portátiles motorizadas de trenes epicicloidales simples (TES).

Concretamente, se desea disponer de dos maquetas correspondientes a dos de las principales aplicaciones de los trenes epicicloidales; la primera corresponde a un TES utilizado como sistema de transmisión de potencia (reductor) de un grado de libertad (gdl) y la segunda corresponde a un sistema de 2 gdl, cuya aplicación más común es el tren diferencial simétrico de un automóvil.

Los requerimientos para la fabricación de las maquetas son que:

- Tengan un coste económico bajo (< 300 €),
- Se puedan fabricar sus elementos usando la impresora 3D de fabricación por filamento fundido (FFF) disponible en el departamento de ingeniería mecánica (DEM), y
- Su funcionamiento sea fácilmente controlado mediante elementos electrónicos y eléctricos estandarizados y de bajo coste, como: motores paso a paso, placas Arduino Uno, controladores sencillos (L298N), pantallas LCD y pulsadores.

Actualmente, el DEM dispone, entre otras, de maquetas de TES de accionamiento manual fabricadas por impresión 3D en material plástico (Figura 1 a, b y c), y de una maqueta de un tren diferencial fabricada en acero, cuyas características no facilitan su portabilidad y es usada en las sesiones de prácticas de laboratorio (Figura 1 d).

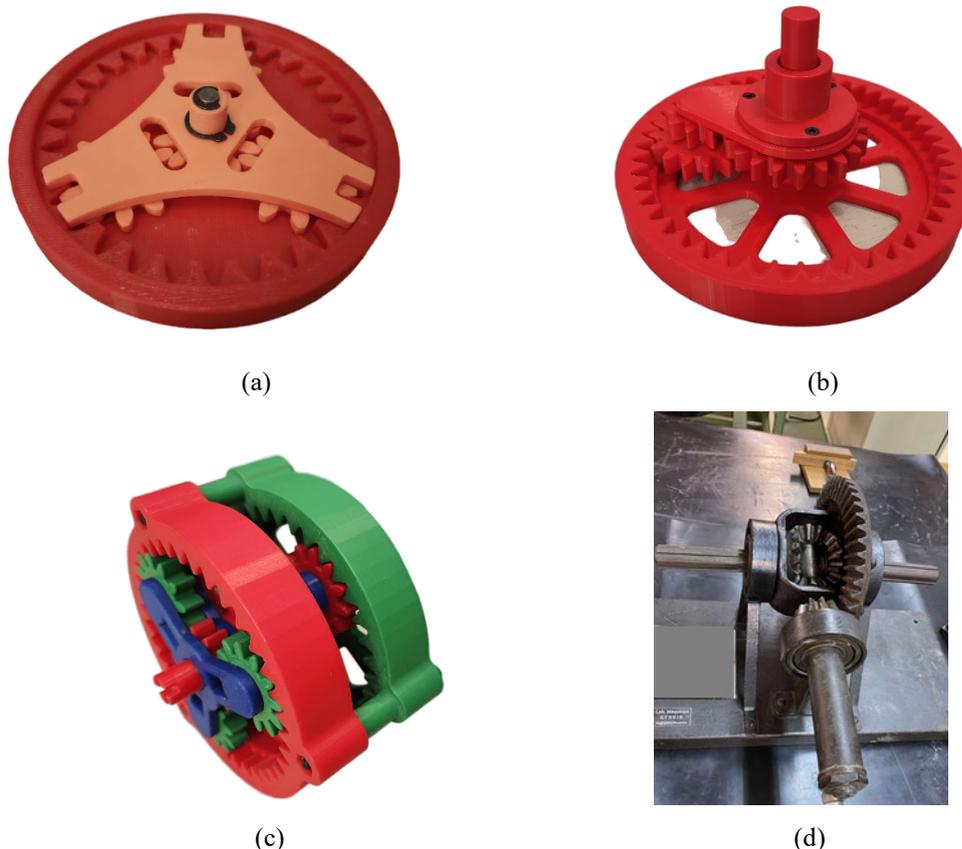


Figura 1: Maquetas de accionamiento manual: a) TES con 3 satélites, b) TES variante con 2 satélites solidarios, c) TES compuesto de 2 etapas y d) Diferencial de acero.

Durante la fase de síntesis de tipo, se ha elegido diseñar un TES correspondiente a unas las variantes constructivas propuestas por Levai [3, 4] compuesta por un planeta 1, una corona 2, un brazo porta satélites b y dos satélites solidarios s_1 y s_2 (Figura 2 a). Por otro lado, para la segunda maqueta se ha elegido diseñar el mecanismo diferencial de coche (Figura 2 b) habitualmente formado por ruedas cónicas de dentado recto y ruedas hipoidales; en este

caso, está formado por dos planetas 1 y 2 (en cuyos ejes se colocan las ruedas motrices del coche), una corona 3 solidaria al brazo porta satélites b, dos satélites s_1 y s_2 y un piñón motriz 4 (que recibe la potencia desde el motor). Esta segunda maqueta será similar estructuralmente a la de la figura 1 d, donde en lugar de ruedas hipoidales se usan ruedas cónicas. De aquí en adelante los mecanismos nuevos a diseñar y fabricar son llamados con las abreviaturas TESvb y TDif respectivamente.

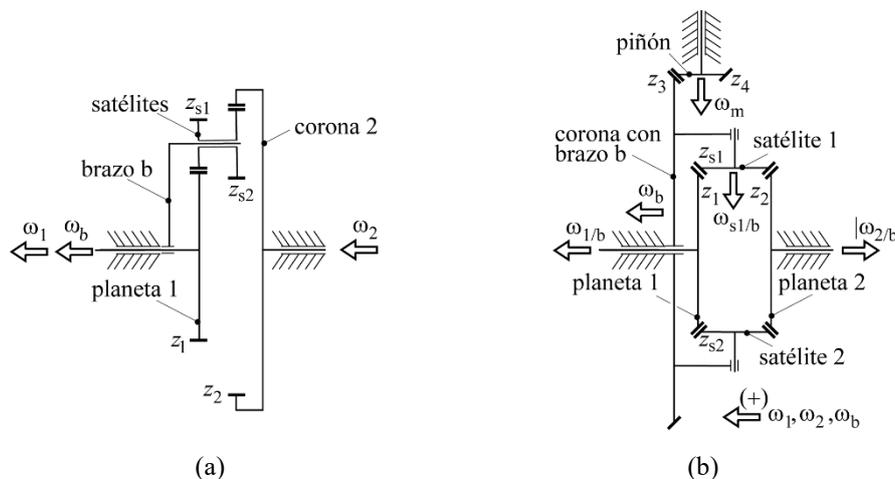


Figura 2: Esquemas de símbolos de los mecanismos a diseñar y fabricar: a) TESvb y b) TDif.

Las maquetas de los trenes epicicloidales TESvb y TDif, que se exponen este trabajo, son parte de los resultados alcanzados en dos trabajos finales de grado (TFG) de dos de los coautores [2, 5].

Para el diseño de las maquetas se utiliza la metodología propuesta por Riba [6], que se expone en el apartado 2. La síntesis de las principales dimensiones geométricas de los mecanismos se realizan siguiendo las metodologías de diseño de transmisiones de engranajes y de trenes epicicloidales consultadas [1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12,13]. A partir de las dimensiones que garantizan el funcionamiento de los mecanismos, se definen las dimensiones secundarias de sus elementos, que garantizan la resistencia mecánica, las soluciones constructivas y el ensamblaje. Se usa el paradigma de diseño para fabricación, considerando como principal proceso a utilizar el de impresión 3D (3DP) y el uso de elementos normalizados como; tornillos, tuercas, arandelas, motores paso a paso, placas Arduino, placas de prototipado y controladores. Se utiliza *Excel* para el cálculo de parámetros geométricos y de relaciones de transmisión. *SolidWorks* (SW) se usa para la modelización 3D de los sólidos, el ensamblaje virtual, la simulación del funcionamiento, mediante el módulo *Motion*, y la presentación de los modelos virtuales diseñados mediante el módulo *Visualize*. Para la fabricación con 3DP se usa del programa de laminado *Ultimaker Cura 5.2.2*, una impresora *Ultimaker 2+* y como material ácido poliláctico (PLA) de distintos colores. Para el diseño de las conexiones de los elementos eléctricos y electrónicos se usa el programa *Fritzing* [14].

En los siguientes apartados se expone el proceso de diseño de los mecanismos TESvb y TDif, su fabricación, su motorización y su control. También se exponen los resultados y las conclusiones del trabajo.

2. Metodología de diseño de los mecanismos: TESvb y TDif

La metodología de diseño propuesta por Riba [6] se basa en que el diseño se puede expresar en cuatro niveles de definición que determinan los resultados de cada una de las etapas sucesivas. Las etapas son: I) Definición del producto a partir de haber identificado una necesidad; el resultado de esta etapa es la definición de forma completa y precisa del producto a través de establecer un conjunto de requerimientos de diseño; II) Diseño conceptual; es una etapa más creativa e innovadora donde a partir de los requerimientos surgen distintas alternativas de principio de solución y, mediante criterios de evaluación, se elige la que se considera más adecuada; III) Diseño de materialización; elegido un principio de solución, se requiere materializar el producto creando un conjunto de piezas, componentes, uniones, etc.; el resultado se expresa en forma de planos de conjunto del producto que muestran cómo unir las partes para formar el conjunto montado, en el que las piezas y elementos corresponden a la versión final materializada; y IV) Diseño de detalle; a partir de la definición de los planos de conjunto, se obtienen como resultado los planos de las piezas y conjuntos específicos y la documentación de los componentes comercializados, es decir la documentación para la fabricación del producto y para la adquisición de dichos componentes. Vale la pena destacar que en el caso de piezas que se fabricarán por impresión 3D no se requieren los planos tradicionales; en su lugar se parte de un modelo 3D digital de la pieza (creado con *SW*) y se pasa directamente a la fabricación (mediante archivos con extensión gcode).

Por otro lado, a partir del estudio del estado del arte se estableció una metodología con los pasos generales sugeridos para el diseño de trenes epicicloidales simples (TES) (Figura 3).

Maquetas motorizadas de trenes epicicloidales: diseño y fabricación

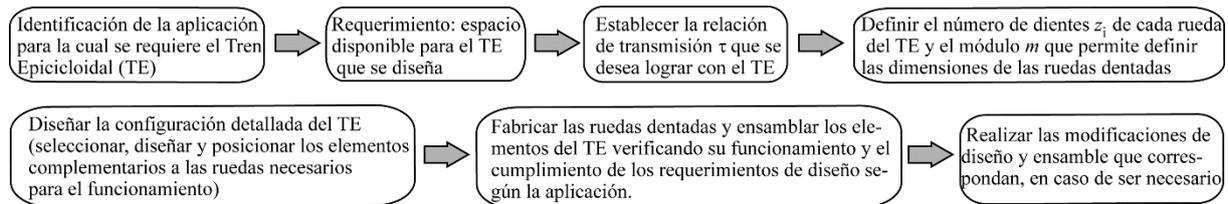


Figura 3: Pasos generales en el diseño de un tren epicicoidal.

Para sintetizar la información del proceso de diseño seguido, a continuación, se expone un resumen de los aspectos esenciales del diseño de los mecanismos TESvb y TDif.

2.1. Definición del producto: requerimientos de diseño

En ambas maquetas, primero se realiza la definición del producto estableciendo los siguientes requerimientos: 1) Las maquetas han de tener un tamaño máximo de bancada 320 x 210 mm y un peso máximo de 2,5 kg, que faciliten su portabilidad; 2) Los elementos fundamentales han de diseñarse con tamaños y geometrías que faciliten su impresión 3D en una impresora Ultimaker 2+ (cuyo volumen máximo de impresión es 223 mm x 220 mm x 205 mm); 3) Las piezas de los mecanismos han de imprimirse con material polimérico PLA de distintos colores de modo que faciliten su visualización e identificación al utilizarse en el aula; 4) El funcionamiento de las maquetas debe ser controlado con facilidad, permitiendo variar tanto la velocidad -cuyo valor sea conocido- como el sentido de giro del elemento motriz; 5) El coste económico no debe de superar los 300 €.

2.2. Diseño conceptual

Para el análisis y la selección de la variante de diseño considerada más adecuada, se parte de haber definido previamente los tipos de trenes epicicoidales a diseñar, TESvb y TDif. (Figura 2). Para la elección del diseño de cada elemento –ruedas, soportes, etc.- se establecen las siguientes categorías y factores de ponderación: a) costo (0,30), b) facilidad de fabricación (0,25), c) facilidad de montaje (0,10), d) funcionamiento y control (0,35). Se analizan variantes de diseño y se proponen los esquemas de diseño conceptuales de los mecanismos TESvb y TDif mostrados en la figura 4 y que sirven como referencia para el diseño 3D de ambos mecanismos, que serán accionados por un motor paso a paso.

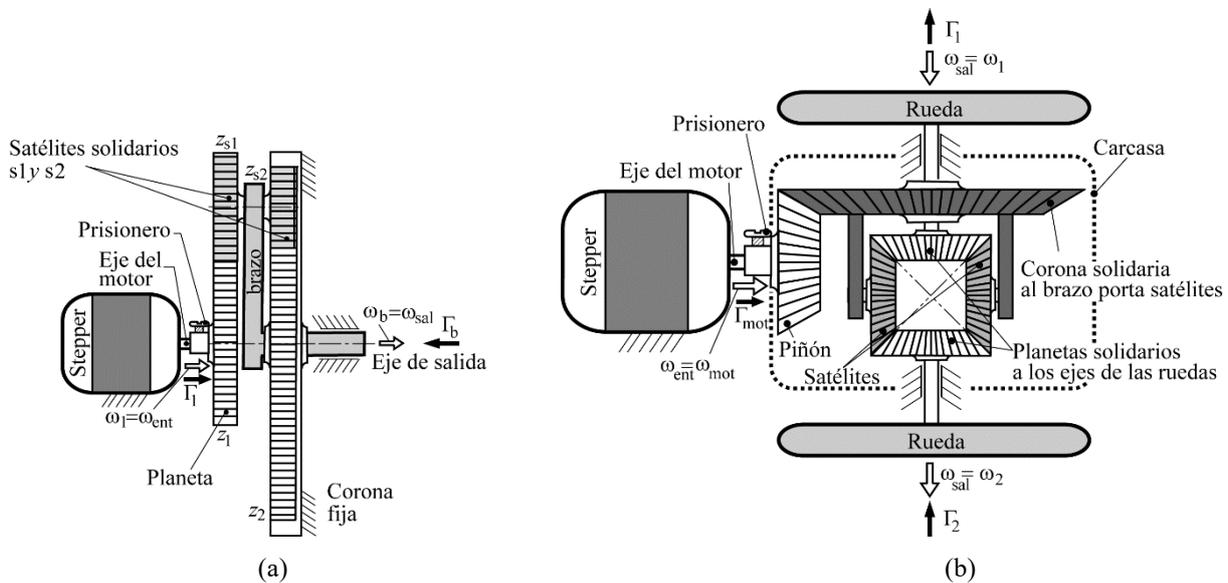


Figura 4: Diseños conceptuales: a) TESvb y b) TDif, como referencias para el diseño 3D.

2.3. Diseño de materialización y de detalle

El diseño de materialización y de detalle se realiza mediante SW. Se generan los modelos 3D de los sólidos, los ensamblajes y se simula el funcionamiento de los modelos virtuales, aprovechando las bondades de la librería *Toolbox*, el módulo *Motion* y el módulo *Visualize* para una representación más realista de los mecanismos. Se decide fabricar las piezas móviles con PLA de distinto color y las bancadas de madera; usar tornillos M3x25 mm y M4x25 mm y tuercas hexagonales M3 y M4 de acero inoxidable; utilizar motores paso a paso tipo Nema17 como actuadores; y usar placas Arduino Uno y controladores L298N. Estos aspectos han definido el diseño de detalle de cada elemento. Finalmente, se ha validado la corrección y viabilidad de los diseños mediante la construcción de las maquetas y la comprobación de su funcionamiento.

La aplicación práctica de los trenes epicicloidales TESvb y TDif que se diseñan es la de ser utilizados como maquetas didácticas motorizadas.

Diseño del mecanismo TESvb

Para el mecanismo TESvb, se requiere que la relación de transmisión sea de $\tau_2 = 0,30$, de forma que el eje del elemento de entrada (planeta 1) y el de salida (brazo porta satélites) giren en el mismo sentido, cuando se fija la corona 2 (Figura 4 a).

Para el diseño de las ruedas del TESvb, se ha decidido utilizar el módulo normalizado $m = 3$ mm. Se considera que este valor permite obtener ruedas dentadas de dimensiones no demasiado grandes y se asume que garantiza una buena durabilidad y resistencia de la transmisión dentada, aunque se fabrique con PLA, ya que funcionará poco tiempo (demostraciones en clase y en vacío) venciendo solo las resistencias pasivas.

El paso correspondiente a la determinación del número de dientes z_i de cada rueda del TESvb que permite obtener el valor deseado $\tau_2 = 0,30$ consiste en encontrar la relación de transmisión τ_b (referencia brazo en la figura 2 a y ecuación 1), asignando valores de número de dientes z_i para cada rueda y luego sustituir τ_b en la expresión de τ_2 (desde la referencia corona, ecuación 3). Así se tiene:

$$\tau_b = \frac{\omega_2|_{Rb}}{\omega_1|_{Rb}} = \frac{\omega_2 - \omega_b}{\omega_1 - \omega_b} = -\frac{z_1}{z_{s1}} \cdot \frac{z_{s2}}{z_2} \quad (1)$$

Reordenando los términos de la ecuación 1, se obtiene la ecuación de Willis (ecuación 2).

$$\tau_b \omega_1 + (1 - \tau_b) \omega_b - \omega_2 = 0 \quad (2)$$

La relación de transmisión τ_2 se obtiene haciendo $\omega_2 = 0$ en la expresión 2, así entonces:

$$\tau_2 = \frac{\omega_b|_{R2}}{\omega_1|_{R2}} = \frac{\tau_b}{\tau_b - 1} \quad (3)$$

La determinación del número de dientes z_i de las ruedas para obtener $\tau_2 = 0,30$ es un proceso iterativo. La tabla 1 muestra los valores de los números de dientes hallados. Se ha considerado utilizar como mínimo número de dientes $z_{\min} = 17$, para evitar socavado en el pie del diente [4, 7, 10]; además se ha considerado que los satélites sean de tamaños similares y no grandes, para minimizar la inercia a la rotación, al rotar sobre ejes móviles.

Tabla 1: Números de dientes z_i y relaciones τ_2 y τ_b obtenidos con las iteraciones en el TESvb.

τ_2	τ_2 iteración con τ_b	τ_b iteración con z_i	z_1	z_{s1}	z_{s2}	z_2
0,30	0,3056	-0,4386	25	19	22	66

Definido en número de dientes z_i de cada rueda del TESvb y utilizando el módulo $m = 3$ mm se han determinado las dimensiones geométricas (Tabla 2 y Figura 5 a) de los engranajes que definen el funcionamiento de la transmisión. Con los valores, un ángulo de presión $\alpha = 20^\circ$ y un ancho de cara de 10 mm posteriormente se diseñan los modelos 3D de cada rueda con la biblioteca *Toolbox* de SolidWorks.

Tabla 2: Dimensiones geométricas de los engranajes del mecanismo TESvb.

Parámetro (símbolo)[unidad]	Fórmula	z_1	z_{s1}	z_{s2}	z_2
Número de dientes (z_i)	-	25	19	22	66
Módulo (m)[mm]	-	3	3	3	3
Diámetro primitivo (d_p)[mm]	$m \cdot z_i$	75	57	66	198
Altura de la cabeza (h_c)[mm]	m	3	3	3	3
Altura del pie (h_p)[mm]	$1,167 \cdot m$	3,501	3,501	3,501	3,501
Altura del diente (h)[mm]	$h_c + h_p$	6,501	6,501	6,501	6,501
Diámetro interior (d_i)[mm]	$d_p - 2 \cdot h_p$	67,5	49,5	58,5	205,5
Diámetro exterior (d_e)[mm]	$d_p + 2 \cdot h_c$	81	63	72	192
Espesor del diente (S_1)[mm]	$(m \cdot \pi)/2$	4,712	4,712	4,712	4,712
Espacio entre dientes (S_2)[mm]	$(m \cdot \pi)/2$	4,712	4,712	4,712	4,712

Los engranajes del TESvb, para garantizar su correcto funcionamiento y montaje, han de cumplir otras condiciones geométricas que son la de coaxialidad y la de contigüidad [11]. La condición de coaxialidad (Figura 5 b) establece que la suma del diámetro primitivo del planeta (d_p) más dos veces el radio del satélite 1 (r_{s1}), más dos veces el radio del satélite 2 (r_{s2}) tiene que ser igual al diámetro primitivo de la corona (d_c) (ecuación 4). Esta condición permite que se pueda hacer el montaje del TES; el brazo porta satélites tiene un radio (longitud) r_m igual a la suma de los radios primitivos del planeta ($d_p/2$) y del satélite 1 (r_{s1}) (ecuación 5).

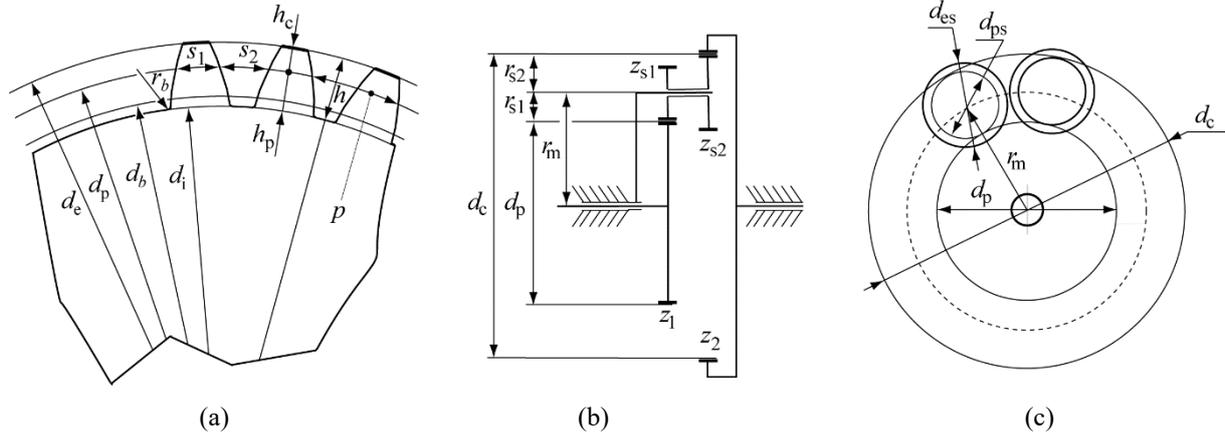


Figura 5: Parámetros geométricos: a) de ruedas las cilíndricas y de las condiciones b) de coaxialidad y c) de contigüidad.

$$d_p + 2 \cdot r_{s1} + 2 \cdot r_{s2} = d_c \quad (4)$$

$$r_m = \frac{d_p}{2} + r_{s1} \quad (5)$$

Sustituyendo en la ecuación 4 los valores de los diámetros primitivos de cada rueda (Tabla 2), se observa que se cumple la condición de coaxialidad (ecuación 4) y también se obtiene la longitud del brazo r_m (ecuación 7), así:

$$d_p + d_{s1} + d_{s2} = d_c \Rightarrow d_c = 75 \text{ mm} + 57 \text{ mm} + 66 \text{ mm} = 198 \text{ mm} \quad (6)$$

$$r_m = \frac{75 \text{ mm}}{2} + \frac{57 \text{ mm}}{2} = 66 \text{ mm} \quad (7)$$

Sustituyendo en la ecuación 6 el diámetro primitivo en función del número de dientes z_i y del módulo m de cada rueda (Tabla 2) se obtiene la relación entre el número de dientes de cada rueda:

$$z_p \cdot m + z_{s1} \cdot m + z_{s2} \cdot m = z_c \cdot m \Rightarrow z_c = z_p + z_{s1} + z_{s2} = 25 + 19 + 22 = 66 \quad (8)$$

Habitualmente se montan varios satélites equiángulamente espaciados en un tren epicicloidal con el fin de equilibrar esfuerzos y reducir la carga que soporta cada diente de los satélites. El número máximo de satélites que se pueden colocar entre el planeta y la corona depende del espacio disponible entre las circunferencias primitivas de ambas ruedas, de diámetros d_p y d_c respectivamente (Figura 5 c). Se debe garantizar una holgura entre los satélites que se introduzcan en el mecanismo de manera que sus dientes no choquen. Para ello, se debe cumplir que la longitud de la circunferencia media de radio r_m , dimensión que se corresponde con la distancia entre centros del planeta y los satélites, sea mayor que el producto del número de satélites n_{sat} por el diámetro de cabeza d_{es} de los satélites [11], es decir:

$$\pi \cdot 2 r_m > n_{sat} \cdot d_{es} \quad (9)$$

Para el tren epicicloidal TESvb que se diseña, con dos satélites solidarios (Figura 5 b) donde el segundo satélite s_2 es de mayor diámetro que el primero, el diámetro de cabeza a utilizar en la ecuación 9 es d_{ez2} e igual a 72 mm (Tabla 2); así el cálculo del número máximo de satélites n_{sat} que se podrán incluir en dicho tren es:

$$\frac{\pi \cdot 2 r_m}{d_{es}} > n_{sat} \rightarrow 5,75 > n_{sat} \quad (10)$$

Por lo tanto, en el diseño del tren se pueden utilizar como máximo 5 satélites. En este caso, se decide utilizar solo 3 satélites equiángulamente espaciados, porque el tren trabajará en vacío y se considera que los dientes de las ruedas tendrán buena resistencia y durabilidad. Como los satélites son dobles, serán 3 pares de satélites. Se destaca que los satélites dobles (z_{s1} y z_{s2}) no son iguales y tienen un pequeño desfase entre ellos (Figura 6 b) que permite el montaje funcional del conjunto. Además, el hecho de que los engranajes son impresos en plástico (PLA) utilizando una impresora Ultimaker 2+ (con una tolerancia aproximada de $\pm 0,2\text{mm}$) también facilita el montaje.

Una vez definidos los elementos básicos del TESvb y sus dimensiones fundamentales, se utiliza el programa SW para diseñar los modelos 3D del planeta, los satélites, la corona y los soportes que permiten fijarla a la bancada, el brazo porta satélites, las patas de la bancada, la placa para la pantalla LCD y los botones y los soportes de dicha pantalla. En la figura 6 se muestran solo los considerados fundamentales, que han sido renderizados con el módulo Visualize de SW.

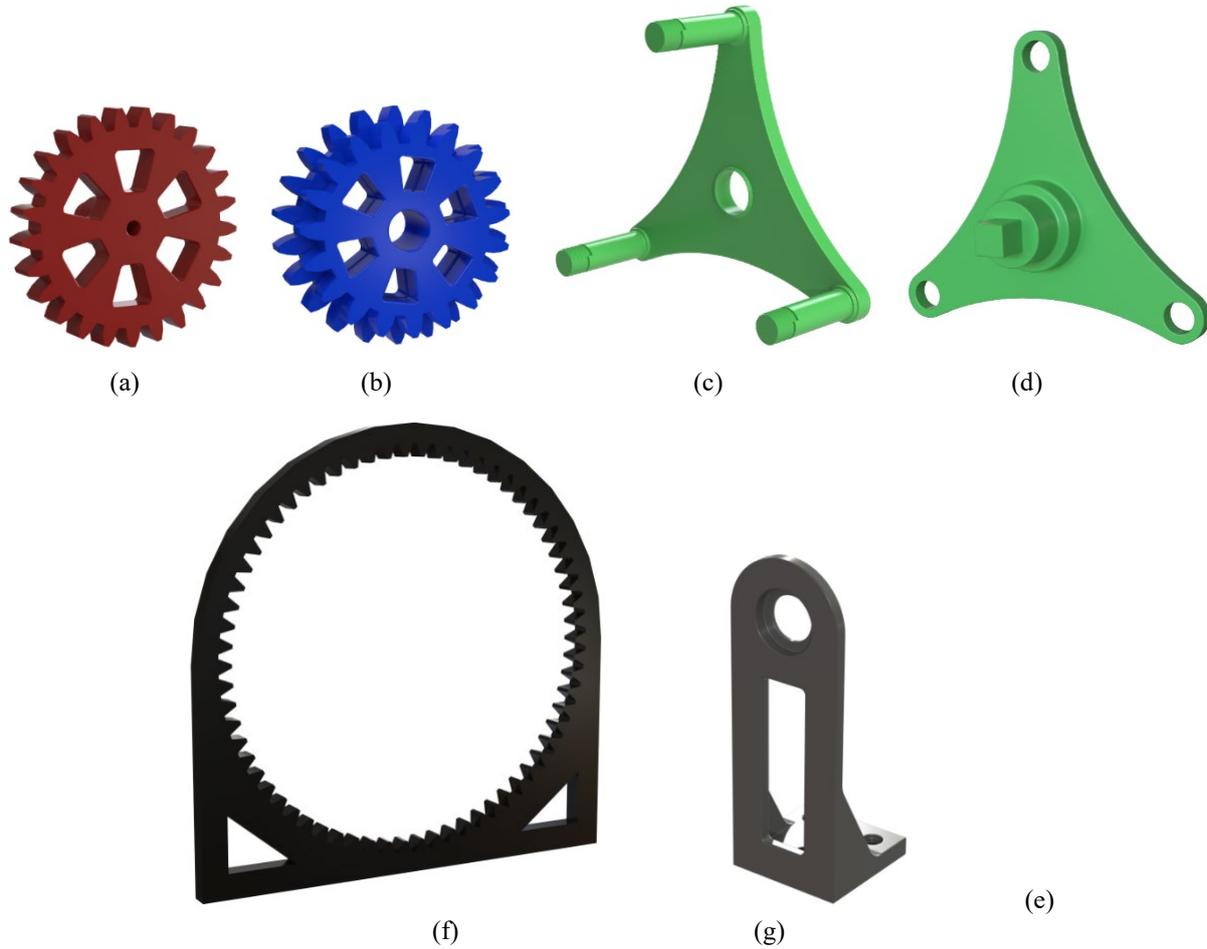


Figura 6: Modelos 3D renderizados con *Visualize* de SW: a) planeta, b) satélites solidarios, c) y d) elementos que forman el brazo porta satélites, e) corona, f) soporte de la pieza d, y g) soporte del motor. (Fuente: [5])

Presentación del modelo virtual del TESvb

Se usan modelos virtuales del motor paso a paso, del ArduinoUno, del controlador L298N, de la placa de prototipado y pantalla LCD (repositorio GradCab [14]), y de elementos de la librería *Toolbox* de SW e iterativamente, se diseñan, ensamblan y se simula el funcionamiento del mecanismo en SW *Motion*, hasta validar el diseño. La Figura 7 muestra el modelo virtual renderizado con el módulo *Visualize* de SW [5].

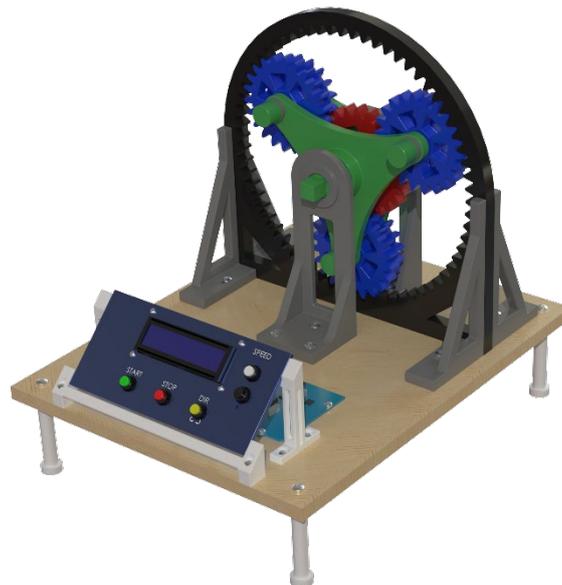


Figura 7: Modelo virtual de la maqueta del mecanismo TESvb renderizado en SW *Visualize*. (Fuente: [5])

Diseño del mecanismo TDif

El tren TDif, es un mecanismo espacial de 2 gdl, con una entrada y dos salidas (Figura 4 b). Está formado por engranajes cónicos rectos de módulo 3,5 mm; el eje de entrada es el del piñón motriz, que acciona la corona que contiene el brazo porta satélites, donde se montan dos satélites cónicos que engranan con los planetas cónicos solidarios a las ruedas, que son los elementos de salida. El criterio de elección del módulo ha sido el mismo que en el caso del TESvb.

En el esquema de símbolos (Figura 2 b), se observa el criterio de signos asumidos para las velocidades angulares. Si se fija la corona ($\omega_b = 0$), los engranajes rotarán en las direcciones indicadas por los vectores de velocidad y asumiendo positivo el sentido de la velocidad relativa $\omega_{s1/b}$, la relación de transmisión τ_b es:

$$\tau_b = \frac{\omega_2|_{Rb}}{\omega_1|_{Rb}} = \frac{\omega_2 - \omega_b}{\omega_1 - \omega_b} = + \frac{z_1}{z_{s1}} \cdot - \frac{z_{s1}}{z_2} = - \frac{z_1}{z_2} \quad (12)$$

Asumiendo que los satélites tienen igual número de dientes $z_{s1} = z_{s2}$ y que los planetas también tienen el mismo número de dientes $z_1 = z_2$, se tiene que $\tau_b = -1$, de modo que de la ecuación de Willis (2) se obtiene:

$$\omega_b = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \quad (13)$$

Así, la velocidad media de las ruedas es siempre igual a la velocidad del brazo porta satélites. En el diseño del TDif propuesto, se ha elegido hacer los satélites más pequeños que los planetas ($z_{s1}=12 < z_1=18$) para lograr un mecanismo menos voluminoso. Para el piñón motriz se ha elegido un número de dientes $z_4 = 20$ y para la corona $z_3 = 40$ garantizando reducir a la mitad la velocidad que proporciona el motor (ω_m) al brazo porta satélites.

$$\omega_b = \frac{z_4}{z_3} \omega_m = \frac{1}{2} \omega_m \quad (14)$$

Definidos el número de dientes de cada rueda del TDif y el módulo de las ruedas dentadas, con un ángulo de presión $\alpha = 20^\circ$, un ángulo de ejes $\Sigma = 90^\circ$ y un ancho de cara 15 mm, en la tabla 3 se muestran los parámetros geométricos de las mismas. Se asumen ruedas cónicas normales (sin correcciones), y por lo tanto fórmulas simplificadas [10].

Tabla 3: Dimensiones geométricas de los engranajes cónicos del mecanismo TDif .

Parámetro(símbolo)[unidad]	Fórmula	z_1	z_{s1}	z_{s2}	z_2	z_3	z_4
Número de dientes (z_i)	-	18	12	12	18	40	20
Módulo (m)[mm]	-	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
Diámetro primitivo (d_{pi})[mm]	$m \cdot z_i$	63	42	42	63	140	70
Relación de transmisión (τ) piñón-rueda	$Z_{conductor}/ Z_{conducida}$	0,66		0,66		0,5	
Ángulo de paso piñón (δ_1)[grados]	$\delta_1 = \arctan(\tau)$	-	33,425	33,425	-	-	26,565
Ángulo de paso rueda (δ_2)[grados]	$\delta_2 = \arctan(1/\tau)$	56,575	-	-	56,575	63,435	-
Diámetro interior piñón (d_{i1})[mm]	$d_{p1} - 2,5 m \cdot \cos(\delta_1)$	-	34,699	34,99	-	-	62,174
Diámetro interior rueda (d_{i2})[mm]	$d_{p2} - 2,5 m \cdot \cos(\delta_2)$	58,180	-	-	58,180	136,087	-
Diámetro exterior piñón (d_{e1})[mm]	$d_{p1} + 2 m \cdot \cos(\delta_1)$	-	47,824	47,824	-	-	76,261
Diámetro exterior rueda (d_{e2})[mm]	$d_{p2} + 2 m \cdot \cos(\delta_2)$	66,856	-	-	66,856	143,130	-

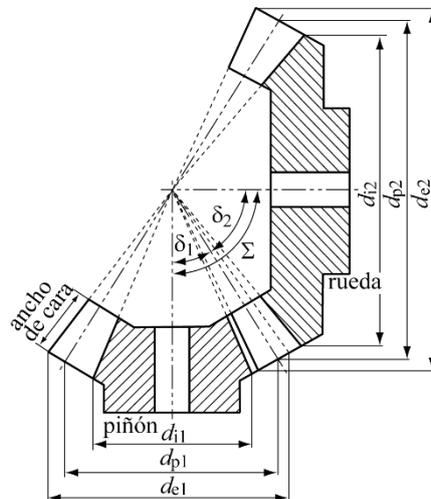


Figura 8: Parámetros geométricos fundamentales para el cálculo de transmisiones cónicas.

De la misma forma que en el caso anterior, definidos los elementos básicos del TDif y sus dimensiones fundamentales, se utiliza el programa SW y se diseñan los modelos 3D del piñón motriz, la corona con el brazo porta satélites, los satélites, los planetas y los soportes que permiten fijarlos a la bancada. Las patas de la bancada, la placa para la pantalla LCD, los botones y los soportes de la pantalla son idénticos a los del diseño del TESvb. Se diseñan también los ejes de los planetas y las ruedas que se montan en dichos ejes. En la figura 9 se muestran solo los elementos considerados fundamentales, renderizados con el módulo *Visualize* de SW [2].

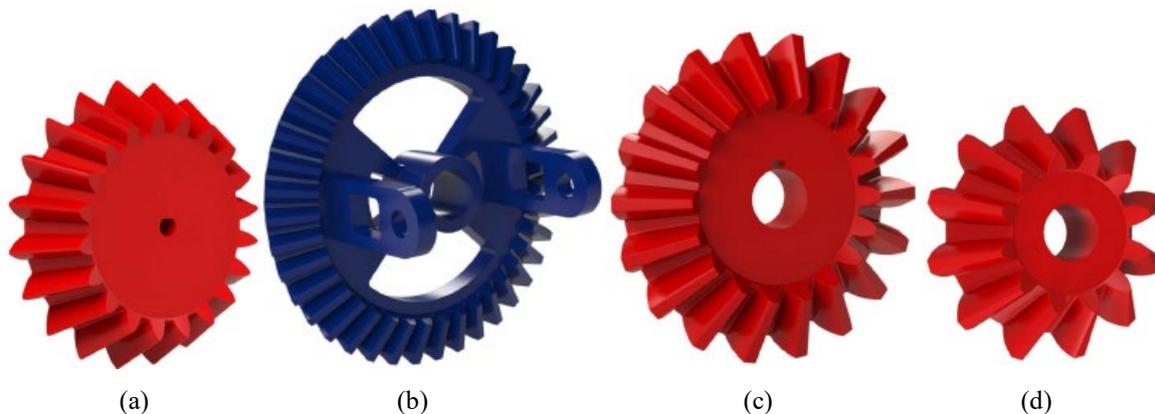


Figura 9: Modelos 3D renderizados con *Visualize* de SW: a) piñón, b) corona con brazo, c) planeta y d) satélite. (Fuente: [2])

Presentación del modelo virtual del TDif

Se usan los mismos modelos virtuales del repositorio gratuito GradCab [14] citados y elementos normalizados de la librería *Toolbox* de SW. Una vez ensamblados todos los elementos, se simula el funcionamiento del mecanismo en SW *Motion*, y se valida el diseño propuesto. La figura 10 muestra el modelo virtual del TDif renderizado con el módulo *Visualize* de SW [2].

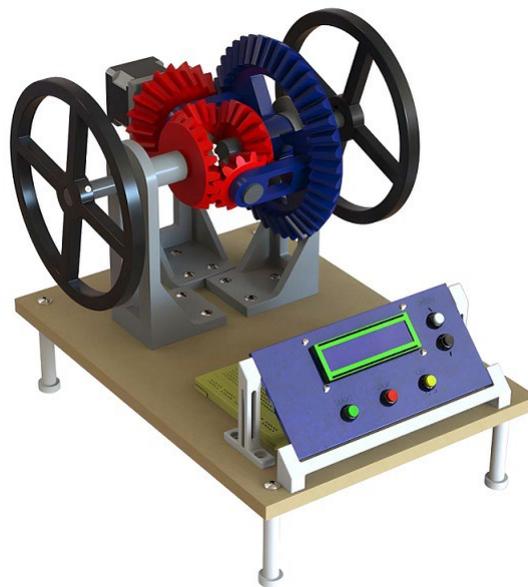


Figura 10: Modelo virtual de la maqueta del mecanismo TDif renderizado en SW *Visualize* (Fuente: [2]).

3. Transmisión de pares en los ejes de los mecanismos TESvb y TDif

3.1. Análisis de transmisión de pares en los ejes del mecanismo TESvb

El mecanismo TESvb (Figura 4 a) se utiliza como sistema de 1 gdl para transmitir potencia desde el eje de entrada (eje motor, donde se monta el planeta 1 con velocidad ω_1 y par motriz $\Gamma_1 = 0,59 \text{ Nm}$) al eje de salida (eje del brazo b porta satélites, con velocidad angular ω_b y con par resistivo Γ_b). El mecanismo tiene una relación de transmisión $\tau_2 = 0,30$ y, por tanto, una relación de velocidades $\omega_b = 0,3 \omega_1$. Para determinar el par de salida Γ_b en el brazo b se hace uso del método de las potencias virtuales aplicado a todo el sistema, asumiendo que las velocidades angulares son constantes (por tanto, no se consideran las potencias virtuales de las fuerzas de inercia

de D'Alembert) y realizando un movimiento virtual compatible con todos los enlaces. Tomando como grado de libertad virtual ω_1^* :

$$\sum_{sistema} P^* = 0 \Rightarrow \Gamma_1 \cdot \omega_1^* - \Gamma_b \cdot \omega_b^* = 0 \quad (15)$$

$$\Gamma_1 \cdot \omega_1^* - 0,3 \Gamma_b \cdot \omega_1^* = 0 \Rightarrow \Gamma_b = 3,33 \Gamma_1 = 3,33 (0,59 \text{ Nm}) = 1,96 \text{ Nm} \quad (16)$$

De la ecuación 16 se observa que el TESvb funciona como un reductor; la velocidad del brazo ω_b porta satélites se reduce a un 70 % de la velocidad ω_1 que proporciona el motor y se aumenta más de 3 veces el par Γ_1 que entrega en motor hasta un valor de par en el eje del brazo de 1,96 Nm.

3.2. Análisis de transmisión de pares en los ejes del mecanismo TDif

El mecanismo TDif (Figura 4 b) se utiliza como sistema de 2 gdl para bifurcar la potencia desde el eje de entrada (eje motor, donde se monta el piñón 4 con velocidad ω_{mot} y par motriz $\Gamma_{mot} = 0,59 \text{ Nm}$) hasta los ejes de salida de las ruedas: eje del planeta 1 con velocidad angular ω_1 y con par resistivo Γ_1 y, eje del planeta 2 con velocidad angular ω_2 y con par resistivo Γ_2 . Para determinar los pares de salida Γ_1 y Γ_2 se hace uso del método de las potencias virtuales tomando como sistema el tren diferencial considerando la carcasa (dibujada con línea de trazos) fija. De las ecuaciones 13 y 14, se observa que las velocidades angulares absolutas cumplen la siguiente ecuación cinemática de enlace $\omega_{mot} = (\omega_1 + \omega_2)$. Se asume que las velocidades angulares son constantes y que los elementos del sistema están equilibrados dinámicamente. En este caso se realizan dos movimientos virtuales independientes compatibles con todos los enlaces. Se toman como grados de libertad virtuales ω_1^* y ω_2^* .

Realizando el primer movimiento virtual, donde $\omega_1^* \neq 0$, $\omega_2^* = 0$ y $\omega_{mot}^* \neq 0$, se tiene:

$$\sum_{sistema} P^* = 0 \Rightarrow -\Gamma_1 \cdot \omega_1^* + \Gamma_{mot} \cdot \omega_{mot}^* = 0 \quad \text{con} \quad \omega_{mot}^* = (\omega_1^* + \omega_2^*) \Rightarrow \omega_{mot}^* = \omega_1^* \quad (17)$$

$$\Rightarrow -\Gamma_1 \cdot \omega_1^* + \Gamma_{mot} \cdot \omega_1^* = 0 \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_{mot} = 0,59 \text{ Nm} \quad (18)$$

Realizando el segundo movimiento virtual, donde $\omega_1^* = 0$, $\omega_2^* \neq 0$ y $\omega_{mot}^* \neq 0$, se tiene:

$$\sum_{sistema} P^* = 0 \Rightarrow -\Gamma_2 \cdot \omega_2^* + \Gamma_{mot} \cdot \omega_{mot}^* = 0 \quad \text{con} \quad \omega_{mot}^* = (\omega_1^* + \omega_2^*) \Rightarrow \omega_{mot}^* = \omega_2^* \quad (19)$$

$$\Rightarrow -\Gamma_2 \cdot \omega_2^* + \Gamma_{mot} \cdot \omega_2^* = 0 \Rightarrow \Gamma_2 = \Gamma_{mot} = 0,59 \text{ Nm} \quad (20)$$

Se comprueba así que el TDif es un diferencial simétrico, porque reparte por igual el par en dichos ejes de salida, permitiendo que varíen sus velocidades angulares cuando se recorre una trayectoria curva.

4. Fabricación de las maquetas: impresión 3D, corte con láser y mecanizado de madera

Uno de los requerimientos de diseño es que los elementos fundamentales de las maquetas han de diseñarse con tamaños y geometrías que faciliten su impresión 3D en una impresora Ultimaker 2+. Esta impresora permite imprimir piezas en material PLA de distintos colores, con una calidad aceptable de acabado superficial y una precisión dimensional de $\pm 200 \mu\text{m}$. Esto permite fabricar maquetas con un coste bajo y posibilita disponer de ellas de manera rápida. Los elementos de los trenes diferenciales diseñados se han fabricado por impresión 3D (3DP), excepto la corona del mecanismo TESvb, debido a sus dimensiones se ha obtenido en metacrilato negro de 10 mm de espesor con corte por láser [15], y las bancadas, fabricadas con madera contrachapada de 10 mm de grosor. Se ha utilizado el programa de laminado *Ultimaker Cura 5.2.2* y los parámetros de impresión siguientes: boquilla de 0,4 mm, relleno 18 %, velocidad de impresión 60 mm/s y altura de capa 0,15 mm. Las etapas del proceso 3DP son: 1) modelado matemático del objeto en 3D (SW); 2) conversión del modelo 3D a formato .STL –*standard triangle language*; 3) manipulación del STL y generación del archivo G-Code; 4) configuración de la impresora 3D; 5) impresión del modelo 3D; 6) retirada de la pieza impresa y 7) postprocesado de la pieza –eliminación de soportes, faldas, mejora del acabado superficial, etc. En la figura 11 se muestra dicho proceso aplicado a la corona cónica solidaria al brazo porta satélites del mecanismo TDif.

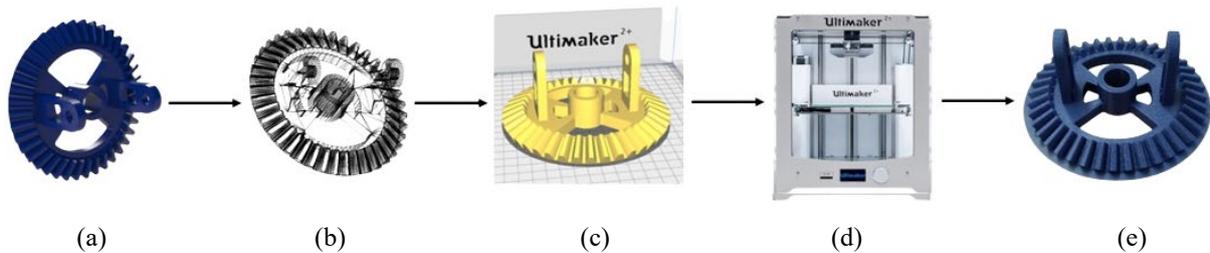


Figura 11: Ejemplo del proceso de impresión 3D de la corona solidaria al brazo porta satélites del TDif.: a) modelo CAD, b) archivo .stl, c) programa de laminado, d) impresión de la pieza y e) pieza impresa.

5. Motorización y control del funcionamiento de las maquetas TESvb y TDif

El control del funcionamiento de las maquetas TESvb y TDif se realiza mediante los siguientes elementos: un motor paso a paso NEMA17 modelo 17HS19-2004-S1 (par de retención de 0,59 Nm, masa de 0,39 kg y coste de 20 €), una tarjeta controladora del motor modelo L298N (masa de 0,03 kg y coste de 3,5 €), una placa ArduinoUno (masa de 0,025 kg y coste de 20 €), una placa de prototipaje de 400 pines (masa 0,02 kg y coste de 2,5 €) y una fuente de alimentación reutilizada de 12 V y 2 A. También se incorpora una pantalla LCD 1602 con módulo I2C integrado (masa de 0,035 kg y coste de 6,5 €) y unos botones redondos de colores (pulsadores) y cables tipo Dupont, de coste y peso despreciables. En la figura 12 se muestran algunos de estos elementos y en la figura 13 el esquema de conexión de los mismos realizado con el programa *Fritzing* [14].

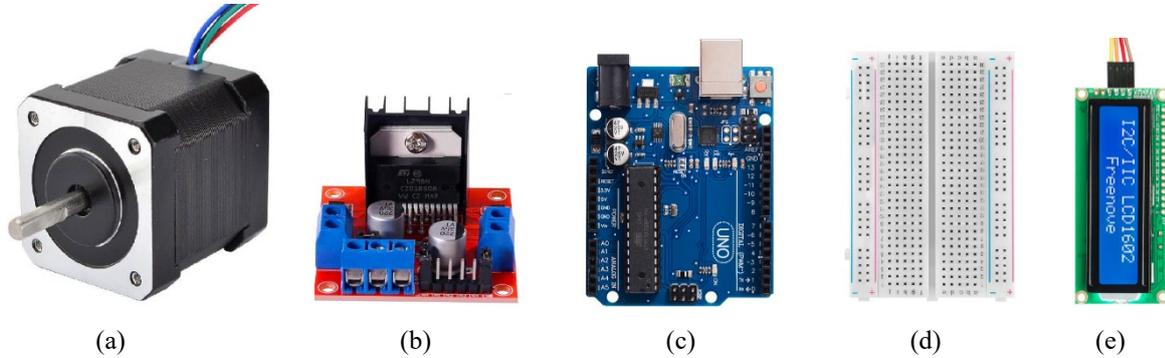


Figura 12: Fotos de: a) motor paso a paso, b) controlador L298N, c) ArduinoUNO, d) placa de prototipado de 400 pines y e) pantalla LCD 1602 con módulo I2P.

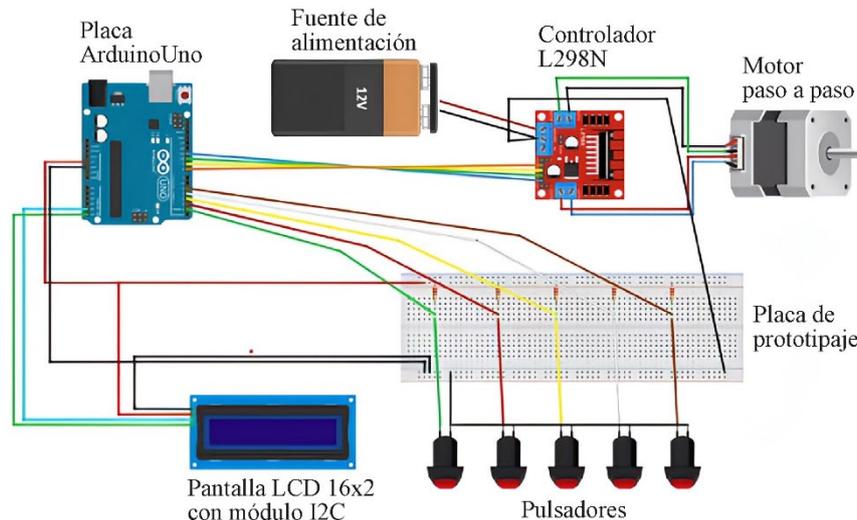


Figura 13: Esquema de conexión de los elementos realizado con *Fritzing*. Modificado a partir de [2].

6. Resultados

Los resultados del trabajo son la materialización y el control del funcionamiento de dos maquetas de trenes epicicloidales. El primero de ellos es el denominado TESvb, tren epicicloidal simple en su variante constructiva con planeta, corona, brazo porta satélites y satélites solidarios y utilizado como sistema de 1gdl. El segundo es el mecanismo diferencial simétrico denominado TDif, utilizado como sistema de 2 gdl. En la figura 14 se muestran las fotografías de dichas maquetas materializadas, correspondientes a los diseños virtuales mostrados en las figuras 7 y 10 respectivamente.

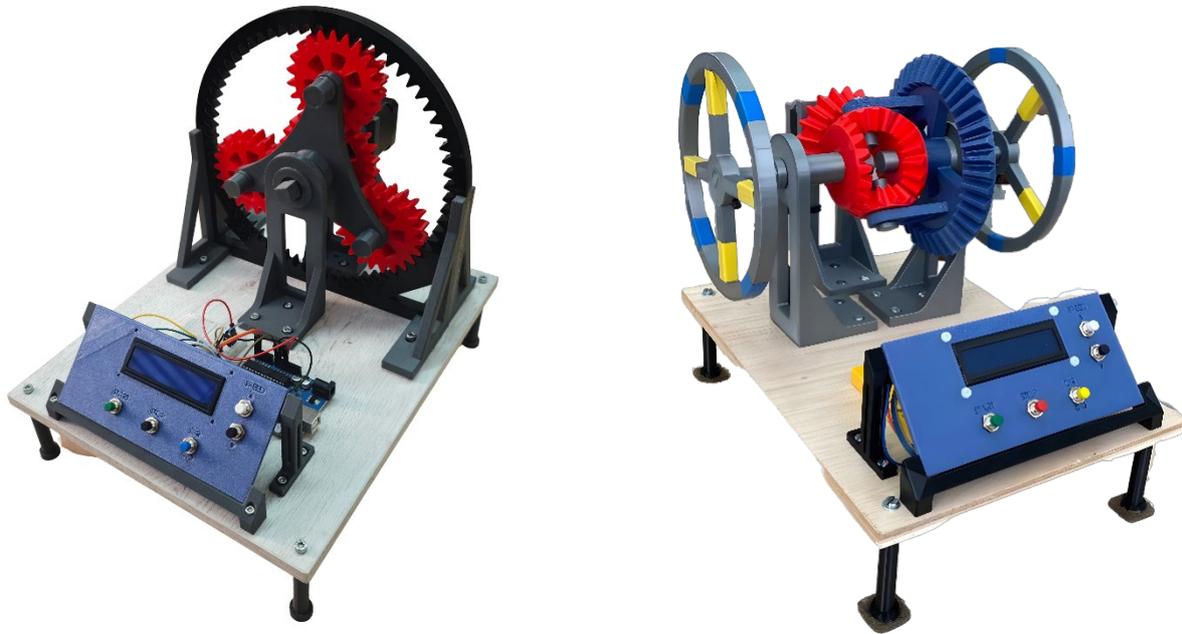


Figura 14: Fotos de las maquetas de los mecanismos TESvb (izquierda) y TDif (derecha).

7. Conclusiones

Se ha alcanzado el objetivo principal del trabajo, ya que se han diseñado, fabricado y motorizado las maquetas de dos trenes epicicloidales y se ha logrado que su funcionamiento sea controlado de manera fácil e intuitiva a través de pulsadores y pantallas LCD. La primera maqueta, mecanismo TESvb, corresponde un tren epicicloidal simple de 1 gdl, cuya variante constructiva está formada por un planeta, una corona, un brazo porta satélites y dos satélites solidarios, con ruedas cilíndricas de dentado recto. La segunda maqueta, mecanismo TDif, corresponde a un diferencial simétrico de 2 gdl con ruedas cónicas de dentado recto. Ambas maquetas constituyen nuevos recursos didácticos para el proceso de enseñanza-aprendizajes de la asignatura Teoría de Máquinas y Mecanismos de la ETSEIB.

Se ha utilizado la metodología de diseño propuesta por Riba [6], estableciendo los requerimientos de diseño como punto de partida y se ha aplicado el paradigma de diseño para la fabricación y el ensamblaje, partiendo de usar como principal proceso de fabricación para las piezas la impresión 3D por filamento fundido. Para la modelización 3D de los sólidos, su ensamblaje, la simulación del funcionamiento y la presentación virtual de los mecanismos se ha utilizado *SolidWorks* con sus módulos *Motion* y *Visualize* y su biblioteca *ToolBox*. Para los elementos eléctricos y electrónicos se han utilizado modelos virtuales disponibles en la biblioteca gratuita *GrabCad*. El esquema de conexiones de los elementos electrónicos se ha realizado con el programa *Fritzing*. El código del programa de control del funcionamiento de ambos mecanismos se ha desarrollado en *Arduino*. A partir del análisis del estado del arte, se ha propuesto una metodología (o pasos generales) sencilla para el diseño de trenes epicicloidales, aplicada a los mecanismos propuestos. Se ha determinado el número dientes de cada rueda, y usando módulos de 3 mm para las ruedas del TESvb y de 3,5 mm para las del TDif, se han determinado los parámetros geométricos funcionales de cada uno de ellos, utilizados como base de su diseño 3D. En el caso del TESvb, se han verificado las condiciones de coaxialidad y de contigüidad, eligiéndose 3 pares de satélites equiángulamente espaciados.

Se ha realizado el análisis de los pares a transmitir en los ejes de dichos mecanismos, aplicando el método de las potencias virtuales, obteniéndose, en el caso del TESvb, un par en el eje de salida de 1,96 Nm, más de tres veces superior al par del motor que lo acciona. En el caso del TDif simétrico, dado el número de dientes escogido, se tienen pares iguales en los ejes de las ruedas, de valor 0,59 Nm.

El coste de las maquetas no ha superado los 300 €, sus masas no superan los 3 kg, y sus dimensiones son prácticamente las de un A4, cumpliendo así con los requerimientos de diseño que facilitan su accesibilidad y fácil portabilidad.

8. Referencias

- [1] Cardona Foix, Salvador; Clos Costa, Daniel. “Teoría de màquines”. Edicions UPC. Universitat Politècnica de Catalunya, (2008).

-
- [2] Obermaier Fité, M. “Diseño, fabricación y control del funcionamiento de maquetas de mecanismos diversos como recursos didácticos para las asignaturas Teoría de Máquinas y Mecanismos y Proyecto II”. Trabajo de Fin de Grado. Universitat Politècnica de Catalunya, (2023).
- [3] Levai, Z. Structure and analysis of planetary gear trains. *Journal of mechanisms*, 3(3), 131-148, (1968).
- [4] Norton, R. *Diseño de maquinaria: síntesis y análisis de mecanismos y máquinas*. McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V. México (2020).
- [5] Sánchez Flores, R. “Diseño, fabricación y control de trenes de engranajes epicicloidales como recursos didácticos”. Trabajo de Fin de Grado. Universitat Politècnica de Catalunya, (2025).
- [6] Riba Romeva, C. “Disseny de màquines V. Metodologia”. Edicions UPC, Barcelona (2002).
- [7] Baránov.G.G: “Curso de la Teoría de los Mecanismos y las Máquinas”. Edición en español. Editorial Mir, Moscú (1979).
- [8] Mata, A. S., Torras, A. B., Carrillo, J. A. C., Juanco, F. E., Fernández, A. J. G., Martínez, F. N., & Fernández, A. O. “Fundamentals of machine theory and mechanisms (Vol. 40)”. Cham: Springer. (2016).
- [9] Domínguez Abascal, J. “Teoría de máquinas y mecanismos”. Editorial Universidad de Sevilla. (2020).
- [10] Riba Romeva, C. “Mecanismes i màquines II. Transmissions d'engranatges (Vol. 19)”. Edicions UPC, Barcelona (2010).
- [11] Mejías Blázquez, J. “Diseño de una caja de cambios automática epicicloidal de 6 marchas”. Trabajo de Fin de Grado. Universidad Politécnica de Madrid, (2017).
- [12] Diez-Ibarbia A., Sanchez-Espiga J., Fernandez-del-Rincon A., Calvo-Irisarri J., Iglesias M., Viadero F., “Probabilistic analysis of the mesh load factor in wind-turbine planetary transmissions: Tooth thickness errors”, *Mechanisms and Machine Theory* **185**, 105341 (2023).
- [13] Burton, P. “Kinematics and Dynamics of Planar Machinery”. Prentice Hall, New Jersey (1979).
- [14] Fritzing. <https://fritzing.org/>. (2023)
- [15] Servei Estació. <https://serveiestacio.com/es/nuestra-tienda/>. (septiembre, 2024).
- [16] GRABCAD COMMUNITY. <https://grabcad.com/library>