



Análisis del factor de distribución longitudinal de la carga propuesto en la ISO 6336 y su aplicación a engranajes cilíndricos helicoidales

Víctor Roda-Casanova¹, Teodora G. Funaru², Santosh S. Patil³

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica y Construcción, Universitat Jaume I, vroda@uji.es

² Departamento de Ingeniería Mecánica y Construcción, Universitat Jaume I, al386317@uji.es

³ Department of Mechanical Engineering, Manipal University Jaipur, santosh.patil@jaipur.manipal.edu

La norma ISO 6336 proporciona métodos analíticos ampliamente aceptados para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga en una transmisión de engranajes helicoidales. Sin embargo, estos métodos se basan en simplificaciones que pueden no reflejar con precisión las condiciones reales de funcionamiento, lo que puede llevar a resultados poco conservativos.

En este estudio se realiza un análisis crítico de los métodos propuestos en la norma ISO 6336 para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga, comparando sus estimaciones con los resultados obtenidos mediante un modelo de elementos finitos avanzado de la transmisión, que incorpora el sistema completo de engranajes-ejes-apoyos.

Los resultados de esta comparación muestran que, en la mayoría de los casos, el método propuesto en la norma ISO 6336 tiende a sobrestimar el factor de distribución longitudinal de la carga. Sin embargo, en algunas configuraciones, las predicciones de la norma ISO 6336 resultan muy cercanas a los resultados obtenidos el análisis numérico, dando lugar a diseños de la transmisión con márgenes de seguridad muy estrechos.

Además, este estudio pone de manifiesto la influencia que tiene el sentido de la hélice en la distribución longitudinal de la carga, a pesar de que este efecto no se tiene en cuenta en los métodos propuestos en la norma. Estos hallazgos sugieren posibles mejoras en la norma ISO 6336 para aumentar su precisión.

1. Introducción

La determinación de la capacidad de carga desempeña un papel fundamental en el diseño y la evaluación de transmisiones de engranajes, ya que permite garantizar que una transmisión sea capaz de transmitir la potencia requerida sin que se produzca el fallo prematuro de la misma [1].

En este proceso de determinación de la capacidad de carga se determinan las tensiones máximas (de contacto y de flexión) que se producen durante el funcionamiento de la transmisión, y luego estas tensiones máximas se comparan con valores de tensión admisibles para garantizar que el sistema pueda soportar un número determinado de ciclos de trabajo sin fallar. Este proceso es fundamental no solo para asegurar que la transmisión funcione con los márgenes de seguridad adecuados, sino también para optimizar su rendimiento y eficiencia.

En las últimas décadas ha habido un aumento de los recursos computacionales y se ha avanzado en el desarrollo de técnicas numéricas, como el método de los elementos finitos, y eso ha permitido mejorar el análisis tensional de las transmisiones de engranajes, dando lugar a simulaciones más precisas y detalladas [2], [3], [4].

A pesar de estos avances, los métodos analíticos tradicionales (como los presentes en la norma ISO 6336 [5], [6], [7] o en la AGMA 2001-D04 [8]) siguen teniendo un papel fundamental debido a su capacidad para ofrecer estimaciones rápidas del estado tensional de los engranajes con un coste computacional bajo. Esto resulta especialmente relevante en procesos de optimización de transmisiones de engranajes, donde la determinación de la capacidad de la carga se realiza de manera exhaustiva para un gran número de diseños de transmisión [9], [10], [11].

En estos métodos analíticos las tensiones nominales de flexión y de contacto se determinan utilizando la ley de flexión de Navier y la teoría de contacto de Hertz [12], respectivamente. En estos cálculos de valores nominales de tensión se considera una intensidad de carga media W_m , bajo la hipótesis de que la carga transmitida se distribuye de manera uniforme a lo largo del ancho de la cara del engranaje.

Las tensiones máximas de flexión y contacto se determinan considerando la intensidad de carga máxima W_{max} , que se obtiene multiplicando la intensidad de carga media W_m por una serie de factores de penalización, cuya función es adaptar los valores nominales a las condiciones reales de trabajo. En el caso de las tensiones máximas de contacto (siguiendo un procedimiento similar para las tensiones máximas de flexión), la intensidad máxima de carga se calcula típicamente como:

$$W_{max} = W_m \cdot Z_\varepsilon^2 \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha} \cdot K_A \cdot K_V \quad (1)$$

Donde:

- Z_ε es el factor de grado de recubrimiento, que tiene en cuenta el reparto de la carga cuando varios dientes están en contacto simultáneamente.
- K_A es el factor de aplicación, que permite considerar los efectos de las cargas dinámicas generadas por impactos tanto de la máquina motriz como de la máquina conducida.
- K_V es el factor dinámico, que permite considerar los efectos de las vibraciones en la transmisión debido a imprecisiones en los engranajes, fluctuaciones de par y rigidez de los componentes.
- $K_{H\alpha}$ es el factor de distribución transversal de la carga, que tiene en cuenta la distribución no uniforme de la carga entre varias parejas de dientes que contactan simultáneamente.
- $K_{H\beta}$ es el factor de distribución longitudinal de la carga, que considera la distribución no uniforme de la carga a lo largo del ancho de cara de los dientes de los engranajes.

La norma ISO 6336 proporciona métodos analíticos ampliamente reconocidos para el cálculo de estos factores de penalización. Aunque estos métodos presentan la ventaja de ser computacionalmente eficientes, se basan en ciertas suposiciones que pueden limitar su aplicabilidad, especialmente cuando las condiciones reales de operación se desvían de los escenarios idealizados.

Varios autores han realizado investigaciones sobre los métodos de cálculo propuestos en la norma ISO 6336 para estos factores de penalización. Curà [13] propuso un método alternativo para calcular K_A en casos donde el par nominal no se conoce de antemano. Belingardi [14] comparó los resultados de K_V obtenidos con el método de cálculo de la norma ISO 6336 con los obtenidos a partir de un análisis de dinámica multicuerpo. Zhao [15] utilizó los métodos de la norma ISO 6336 para estudiar el efecto del ángulo de hélice sobre el estado tensional de la transmisión. Kawalec [16] realizó una comparación exhaustiva entre los métodos propuestos en la norma ISO 6336 y en la AGMA 2001-D04 para el cálculo de la tensión de flexión, contrastando los resultados obtenidos con los obtenidos mediante análisis por elementos finitos. Lisle [17] llevó a cabo comparaciones similares, incorporando además resultados de análisis experimentales.

Este trabajo se centra en el factor de distribución longitudinal de la carga. Este factor de penalización tiene en cuenta los errores de fabricación y montaje de la transmisión, las holguras en los rodamientos y las deformaciones elásticas del conjunto engranajes-ejes-apoyos. Este factor ha sido objeto de estudio por parte de numerosos investigadores como Zhou [18], Kamycki [19] y Atanasovska [20], que desarrollaron modelos numéricos para calcular el factor de distribución longitudinal de la carga en transmisiones de engranajes cilíndricos rectos.

En una investigación previa realizada por los autores [21] se analizó la aplicación de este factor en engranajes cilíndricos rectos mediante un modelo avanzado de elementos finitos de la transmisión. Los resultados mostraron que las simplificaciones inherentes a estos métodos pueden conducir a estimaciones no conservativas, lo que podría provocar una sobreestimación de la capacidad de carga y comprometer la seguridad y durabilidad de la transmisión. La principal novedad de este trabajo con respecto a estudios anteriores era la consideración de la flexibilidad de los ejes en los modelos de elementos finitos.

Este trabajo tiene como objetivo analizar y evaluar los métodos de cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga propuestos en la norma ISO 6336, con un enfoque específico en su aplicación a engranajes cilíndricos helicoidales. Además, se incorpora un modelo numérico avanzado que considera el sistema completo de engranaje-eje-soporte para proporcionar predicciones más precisas sobre la distribución de la carga. Mediante la comparación de los resultados obtenidos con este modelo numérico y los derivados de la norma ISO 6336, se identifican posibles limitaciones y se proponen mejoras para aumentar la precisión de estos métodos.

2. Geometría de la transmisión y condiciones de trabajo

La Figura 1 muestra una transmisión de engranajes helicoidales compuesta por un piñón y una rueda montados sobre sus respectivos ejes. Ambos ejes tienen una longitud l , sus diámetros son d_{sh1} y d_{sh2} , y están separados una distancia a_w . El eje del piñón se considera biapoyado en los puntos A_1 y B_1 , y el eje de la rueda se considera biapoyado en los puntos A_2 y B_2 . Los puntos C_1 y C_2 indican el centro del piñón y de la rueda, respectivamente. La posición de los engranajes sobre los ejes viene definida por la variable s , que indica la distancia entre los puntos C_1 y C_2 y el centro de los ejes. De esta manera, cuando $s = 0 \text{ mm}$, los engranajes están montados en el medio de los ejes.

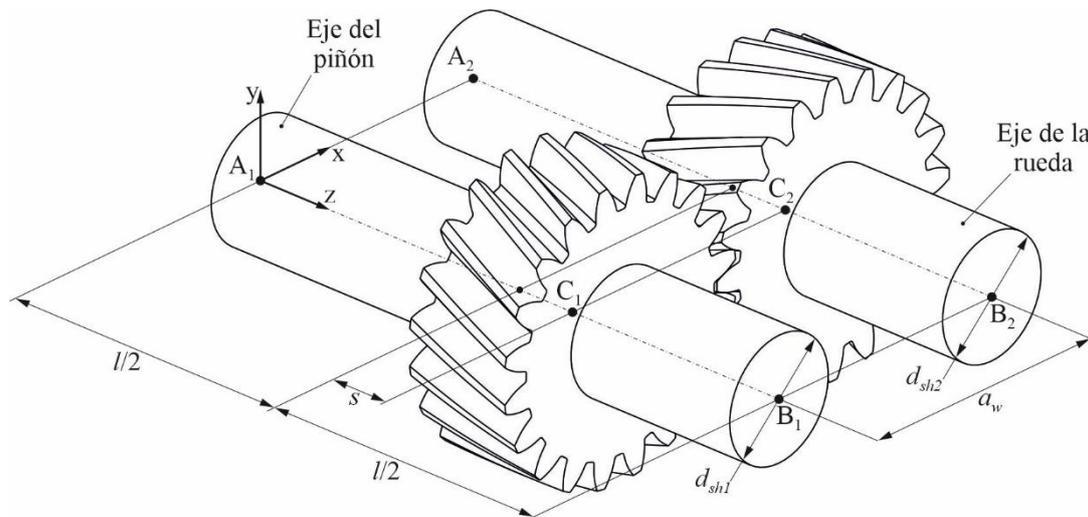


Figura 1: Transmisión de engranajes helicoidales.

La geometría de la transmisión de la Figura 1 viene definida por el conjunto de 18 variables mostradas en la Tabla 1. En esta definición de la geometría de la transmisión se considera que ambas ruedas dentadas tienen dientes con perfil de evolvente no modificado, tallados con una cremallera de corte siguiendo el método Maag (22). Se considera que esta cremallera de corte es idéntica para el piñón y para la rueda, excepto en el redondeo del pie del diente, que puede tomar valores distintos en cada caso. Un parámetro adicional define el sentido de la hélice de los engranajes (hélice a derechas o hélice a izquierdas).

Además de los parámetros geométricos de la transmisión, también es necesario indicar las condiciones de carga de ésta, atendiendo al par de entrada T_1 o al par de salida T_2 , así como los puntos de aplicación de estos pares. Por defecto, el par de entrada se considerará aplicado en el punto A_1 , mientras que el par de salida podrá estar aplicado en A_2 o en B_2 .

Tabla 1: Parámetros que definen la geometría de la transmisión.

Categoría	Parámetro	Piñón	Rueda
Parámetros de diseño de la cremallera de corte con la que se fabrican los engranajes	Ángulo de presión normal	α_n	
	Módulo normal	m_n	
	Ángulo de hélice	β	
	Adendo	h_{aP}	
	Dedendo	h_{fP}	
	Redondeo del pie del diente	ρ_{fP1}	ρ_{fP2}
Parámetros de diseño de las ruedas dentadas	Número de dientes	z_1	z_2
	Ancho de cara	b_1	b_2
	Coefficiente de desplazamiento del perfil	x_1	x_2
Parámetros de diseño de la transmisión	Posición de montaje de los engranajes		s
	Longitud de los ejes		l
	Distancia entre ejes		a_w
	Diámetro de los ejes	d_{sh1}	d_{sh2}

En los subapartados siguientes, y para que la formulación incluida en este trabajo sea autocontenida, se presentan las ecuaciones que definen los parámetros necesarios para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga utilizado en la formulación propuesta por el método C de la norma ISO 6336.

2.1. Parámetros geométricos derivados

En este subapartado se proporcionan las expresiones matemáticas de los parámetros geométricos derivados que definen la geometría de los engranajes y que según la formulación propuesta en el método C de la norma ISO 6336 afectan al cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga. Los parámetros presentados en este subapartado se calculan a partir de los parámetros de entrada mostrados en la Tabla 1. En primer lugar, se define el ángulo de hélice medido en el círculo base β_b como:

$$\beta_b = \arcsin(\sin \beta \cdot \cos \alpha_n) \quad (2)$$

Por otra parte, el paso transversal de los engranajes en el cilindro de base p_{bt} se calcula como:

$$p_{bt} = \frac{m_n \cdot \pi \cdot \tan \beta_b}{\sin \beta} \quad (3)$$

Los diámetros de los cilindros de referencia d_i , de cabeza d_{ai} y de base d_{bi} de un engranaje helicoidal se definen como:

$$d_i = \frac{z_i \cdot m_n}{\cos \beta} \quad (4a)$$

$$d_{ai} = d_i + 2 \cdot (x_i \cdot m_n + h_{aP}) \quad (4b)$$

$$d_{bi} = \frac{z_i \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n}{\cos \beta_b} \quad (4c)$$

donde $i = 1$ cuando se trata de los diámetros del piñón, y $i = 2$ cuando se trata de los diámetros de la rueda. Finalmente, el ángulo de presión transversal en condiciones de trabajo α_{wt} se calcula como:

$$\alpha_{wt} = \arccos\left(\frac{d_1 + d_2}{2} \cdot \frac{\tan \beta_b}{a_w \cdot \tan \beta}\right) \quad (5)$$

2.2. Análisis teórico del engrane

En este subapartado se define la relación de contacto transversal ε_α , que según la formulación propuesta en el método C de la norma ISO 6336 afecta al cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga. Esta relación de contacto transversal ε_α se deriva de los parámetros de entrada mostrados en la Tabla 1, y de los parámetros geométricos definidos en el subapartado 2.1:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} - 2 \cdot a_w \cdot \sin \alpha_{wt}}{2 \cdot p_{bt}} \quad (6)$$

Además, y aunque según el método C de la norma ISO 6336 no intervengan en el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga, también se define el grado de recubrimiento ε_β y la relación total de contacto ε_γ :

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_{eff} \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi} \quad (7a)$$

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \quad (7b)$$

donde el parámetro b_{eff} representa el valor efectivo del solape entre los anchos de cara del piñón y de la rueda.

2.3. Análisis de fuerzas en el contacto

En este subapartado se definen las fuerzas que se generan en el contacto entre los dientes de los engranajes y que según el método C de la norma ISO 6336 afectan al cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga. La fuerza tangencial en el cilindro de referencia F_t se calcula como:

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{d_1} = \frac{2 \cdot T_2}{d_2} \quad (8)$$

Normalmente esta fuerza se penaliza mediante el factor de aplicación K_A y el factor dinámico K_V , obteniendo así la carga tangencial relevante a los cálculos de contacto F_m , que se define como:

$$F_m = F_t \cdot K_A \cdot K_V \quad (9)$$

Además, y aunque esta fuerza no se emplea directamente en el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga según el método C de la norma ISO 6336, se proporciona la expresión matemática para la fuerza tangencial en el cilindro de base F_{bt} :

$$F_{bt} = \frac{F_t \cdot \tan \beta}{\tan \beta_b} \quad (10)$$

3. Cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga según ISO 6336

La modelización del engrane mediante un modelo de contacto de Winkler es una práctica habitual entre las personas que investigan en transmisiones de engranajes [22]. Este método para el cálculo de la distribución longitudinal de la carga se basa en el análisis del contacto en el plano de acción, entre una única pareja de dientes del piñón y de la rueda, tal y como se muestra en la Figura 2a.

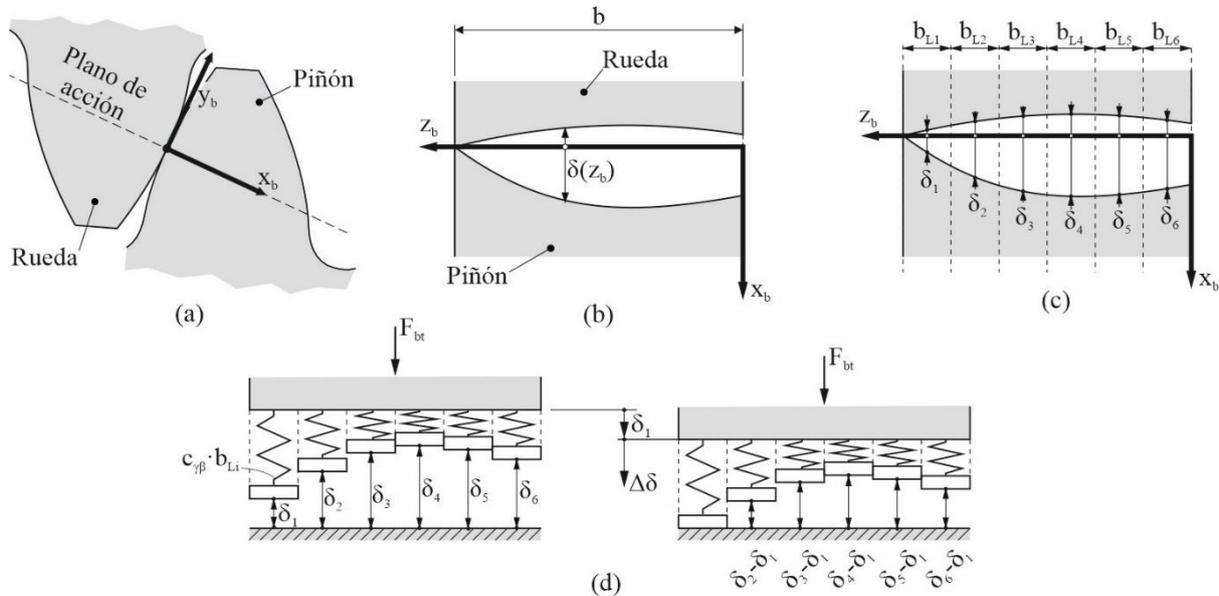


Figura 2: Modelo de contacto de Winkler para el cálculo de la distribución longitudinal de la carga.

En este plano la distancia entre los flancos de los dientes del piñón y de la rueda viene definida por una función $\delta(z_b)$, como se muestra en la Figura 2b. Bajo estas consideraciones, la aplicación del modelo de contacto de Winkler para el cálculo de la distribución longitudinal de la carga se realiza en tres pasos:

- El ancho de cara de los engranajes se divide en un número discreto de secciones (o rebanadas, del inglés *slices*) de anchura b_{Li} , tal y como se muestra en la Figura 2c. La separación entre los flancos de los dientes en el centro de cada sección se define por la distancia δ_i .
- A continuación, se establece el modelo de contacto de Winkler, modelizando cada una de las secciones como un muelle de rigidez $c_{\gamma\beta} \cdot b_{Li}$, tal y como se muestra en la Figura 2d. Cada uno de estos muelles tiene originalmente asociada una separación δ_i . Aquí, $c_{\gamma\beta}$ el valor medio de la rigidez del engrane.
- Finalmente, y utilizando métodos iterativos, se determina la aproximación entre flancos $\Delta\delta$ que garantiza que $F_{bt} = \sum F_i$, donde F_i es la fuerza ejercida por cada uno de los muelles, calculada como:

$$F_i = c_{\gamma\beta} \cdot b_{Li} \cdot \begin{cases} \Delta\delta - \delta_i + \delta_1 & \text{si } \Delta\delta + \delta_1 \geq \delta_i \\ 0 & \text{si } \Delta\delta + \delta_1 < \delta_i \end{cases} \quad (11)$$

Una vez determinada la fuerza F_i ejercida por cada muelle, el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$ se calcula como:

$$K_{H\beta} = \frac{\max(F_i/b_{Li})}{F_m/b} \quad (12)$$

En el método C de la norma ISO 6336 se utiliza un procedimiento similar a este para determinar el factor de distribución longitudinal de la carga. Sin embargo, para evitar métodos iterativos en el cálculo, en la norma ISO 6336 se toma la hipótesis de que la separación entre los flancos de los dientes crece linealmente, tal y como se muestra en la Figura 3a. En esta figura, la separación máxima entre flancos viene determinada por la distancia $F_{\beta y}$, conocida como la desalineación equivalente del engrane.

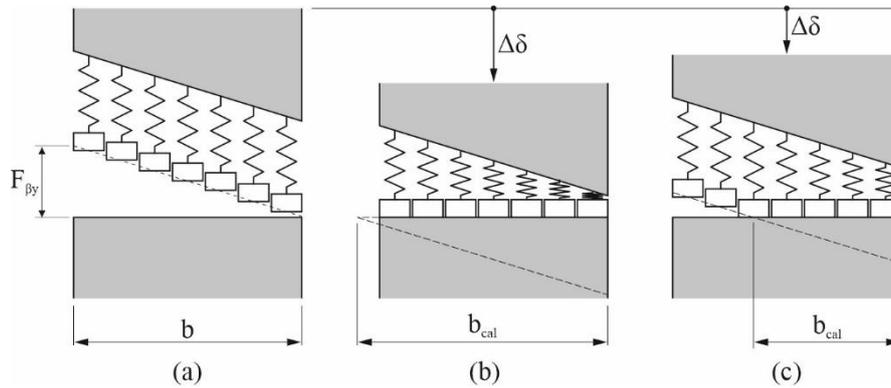


Figura 3: Modelo de contacto de Winkler para el cálculo de $K_{H\beta}$ según la norma ISO 6336.

En función del nivel de aproximación entre los flancos de los dientes (que depende de los parámetros del modelo de contacto) se puede llegar a dos situaciones distintas:

- En la primera situación, el contacto entre los flancos de los dientes se produce a lo largo de todo el ancho de cara de los engranajes, de manera que $b_{cal} > b$ (Figura 3b).
- En la segunda situación, el contacto entre los flancos de los dientes sólo cubre de manera parcial el ancho de cara de los engranajes, de manera que $b_{cal} \leq b$ (Figura 3c).

En el método C de la norma ISO 6336, la relación b_{cal}/b se calcula como:

$$b_{cal}/b = \begin{cases} \sqrt{\frac{2 \cdot F_m/b}{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}} & \text{si } \frac{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{F_m/b} \geq 1 \\ 0.5 + \frac{F_m/b}{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}} & \text{si } \frac{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{F_m/b} < 1 \end{cases} \quad (13)$$

Bajo estos preceptos, en el método C de la norma ISO 6336, el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$ se calcula como:

$$K_{H\beta} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2 \cdot F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{F_m/b}} & \text{si } b_{cal} \leq b \\ \frac{F_{\beta y} \cdot c_{\gamma\beta}}{2 \cdot F_m/b} + 1 & \text{si } b_{cal} > b \end{cases} \quad (14)$$

En los subapartados siguientes se detalla el cálculo de la desalineación equivalente $F_{\beta y}$ y del valor medio de la rigidez media del engrane $c_{\gamma\beta}$.

3.1. Cálculo de la desalineación equivalente

La desalineación equivalente $F_{\beta y}$ se define como el valor absoluto de la suma de las desviaciones de fabricación y las deflexiones elásticas, medidas en el plano de acción. Este valor depende de la desalineación inicial equivalente $F_{\beta x}$ y de la reducción de la desalineación del engrane debido al rodaje de la transmisión y_β :

$$F_{\beta y} = F_{\beta x} - y_\beta \quad (15)$$

El desalineamiento inicial equivalente $F_{\beta x}$ se calcula como:

$$F_{\beta x} = 1.33 \cdot B_1 \cdot f_{sh1} + f_{sh2} \quad (16)$$

donde f_{sh1} y f_{sh2} son las componentes de la desalineación equivalente inicial debidas a las deformaciones elásticas del conjunto formado por el piñón y la rueda (y los ejes que los soportan). Además, el factor adimensional B_1 tiene en cuenta la existencia de modificaciones en las superficies de contacto del piñón.

La ISO 6336 propone la ecuación 16 para el cálculo de f_{sh1} y f_{sh2} , cuya notación ha sido ligeramente modificada en favor de la coherencia de este trabajo:

$$f_{shi} = \frac{F_m}{b_i} \cdot k_u \cdot \left((B^* - 0.3) + K'_{1i} \cdot K'_{2i} \cdot \frac{l \cdot s}{d_i^2} \cdot \left(\frac{d_i}{d_{shi}} \right)^4 \right) + 0.3 \cdot \left(\frac{b_i}{d_i} \right)^2 \quad (17)$$

donde $i = 1$ cuando se trata del eje del piñón, $i = 2$ cuando se trata del eje de la rueda. Además, se consideran los siguientes factores:

- Un factor k_u que tiene en cuenta las propiedades elásticas del material de los engranajes y de sus ejes. En el caso de engranajes y ejes de acero, el valor es $k_u = 0.023 (mm \cdot \mu m)/N$.
- Un factor adimensional B^* que tiene en cuenta el número de engranajes sobre los que se divide la potencia transmitida entre dos ejes. Si la potencia se transmite entre dos ejes a través de una única pareja de engranajes, entonces $B^* = 1$.
- Un factor adimensional K'_{2i} que tiene en cuenta el incremento de la rigidez del eje por la inclusión del engranaje sobre él. Cuando los engranajes están montados entre los apoyos, K'_{2i} se calcula como:

$$K'_{2i} = \begin{cases} 0.48 & \text{si } d_i/d_{shi} \geq 1.15 \\ 0.80 & \text{si } d_i/d_{shi} < 1.15 \end{cases} \quad (18)$$

- Un factor adimensional K'_{1i} que tiene en cuenta la posición de montaje del engranaje relativa a los apoyos y a la entrada/salida de potencia del eje. Puede tomar valores distintos en función de si la desalineación del engrane ocasionada por la flexión del eje y la desalineación del engrane producida por la torsión del engranaje se suman o se compensan. La Figura 4 muestra los 4 tipos distintos de configuraciones contempladas en este trabajo, y los valores de K'_{11} y K'_{12} para cada una de ellas.

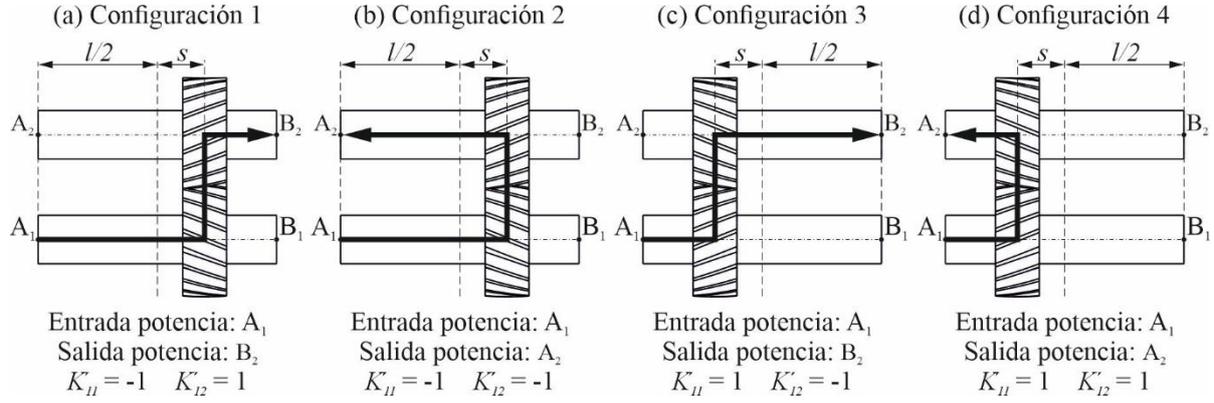


Figura 4: Distintas configuraciones de la transmisión.

En base a esto y considerando que la potencia se transmite entre los ejes a través de un único par de engranajes, la ecuación 17 puede reescribirse como:

$$f_{shi} = F_m \cdot k_{unit} \cdot b_i \cdot \begin{cases} \frac{1}{d_i^2} + K'_{2i} \cdot \frac{l \cdot s}{d_{sh}^4} & \text{si } K'_{1i} = 1 \\ \frac{1}{d_i^2} - K'_{2i} \cdot \frac{l \cdot s}{d_{sh}^4} & \text{si } K'_{1i} = -1 \text{ y } N_i \leq 0.7 \\ -\frac{0.4}{d_i^2} + K'_{2i} \cdot \frac{l \cdot s}{d_{sh}^4} & \text{si } K'_{1i} = -1 \text{ y } N_i > 0.7 \end{cases} \quad (19)$$

donde N_i se define como:

$$N_i = K'_{2i} \cdot l \cdot s \cdot \frac{d_i^2}{d_{shi}^4} \quad (20)$$

Resulta interesante poner de manifiesto que en esta formulación para el cálculo de la desalineación equivalente no se tiene en cuenta el sentido de la hélice de los engranajes cilíndricos helicoidales.

3.2. Cálculo del valor medio de la rigidez del engrane

En la ISO 6336 se utilizan dos tipos de valor medio de la rigidez del engrane: uno utilizado para los factores de distribución transversal de la carga $c_{\gamma\alpha}$ y otro para los factores de distribución longitudinal de la carga $c_{\gamma\beta}$. Ambos valores de rigidez están relacionados según la expresión:

$$c_{\gamma\beta} = 0.85 \cdot c_{\gamma\alpha} \quad (21)$$

Según el método C de la norma ISO 6336, la rigidez del engrane utilizada para el cálculo de los factores de distribución transversal de la carga $c_{\gamma\alpha}$ se define como:

$$c_{\gamma\alpha} = \frac{1}{q'} \cdot \overbrace{C_M \cdot C_R \cdot C_B \cdot \cos \beta \cdot (0.75 \cdot \varepsilon_\alpha + 0.25)}^{c'} \quad (22)$$

La ecuación anterior incluye los siguientes factores adimensionales:

- Un factor adimensional C_M que tiene en cuenta las diferencias entre los valores de rigidez teóricos y los valores medidos experimentalmente. Para engranajes sin alma adelgazada tiene un valor $C_M = 0.8$.
- Un factor adimensional C_R que tiene en cuenta el efecto de las almas adelgazadas sobre la rigidez del engrane. Para engranajes sin alma adelgazada tiene un valor $C_R = 1$.
- Un factor adimensional C_B que tiene en cuenta las variaciones en la rigidez del engrane para engranajes fabricados con rack distinto al normalizado por la ISO 53 [23] (tomado como referencia para los cálculos), y que se define como:

$$C_B = \left[1 + 0.5 \cdot \left(1.2 - \frac{h_{fp}}{m_n} \right) \right] \cdot [1 - 0.02 \cdot (20^\circ - \alpha_n)] \quad (23)$$

La ecuación 22 también incluye el valor mínimo de la flexibilidad de una pareja de dientes q' se define como:

$$q' = C_1 + C_4 \cdot x_1 + C_6 \cdot x_2 + C_8 \cdot x_1^2 + C_9 \cdot x_2^2 + \left(\frac{C_2 + C_5 \cdot x_1}{z_1} + \frac{C_3 + C_7 \cdot x_2}{z_2} \right) \cdot \cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta \quad (24)$$

donde los coeficientes C_1 - C_9 se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2: Coeficientes para el cálculo de la flexibilidad de una pareja de dientes (valores en N/($\mu\text{m} \cdot \text{mm}$)).

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
0.04723	0.15551	0.25791	-0.00635	-0.11654	-0.00193	-0.24188	0.00529	0.00182

3.3. Hipótesis y limitaciones del método

En este apartado se describen las hipótesis y las limitaciones del método C de la norma ISO 6336 para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga.

En la ecuación 16 utilizada para el cálculo de la desalineación inicial equivalente:

- Se considera un factor de corrección de 1.33, que se introduce para compensar la hipótesis de que la separación entre los flancos de los dientes de los engranajes, provocada por las deformaciones elásticas de los engranajes y de los ejes, sigue una línea recta (ver Figura 2a).
- El factor de corrección de 1.33 únicamente se aplica a las deformaciones del piñón y de su eje. Esto se debe a que se considera que la mayor rigidez del conjunto rueda-eje hace que sus deformaciones sean más pequeñas y satisfagan, en mayor medida, las hipótesis del cálculo.
- A medida que la curvatura de la línea de deformación crece, esta hipótesis puede llevar a discrepancias entre la distribución de la carga calculada y la real. Esto ocurre cuando la carga transmitida es elevada, o cuando la relación b_i/d_i es grande.
- Este método desprecia los efectos de las deformaciones de los engranajes debido a dilataciones térmicas provocadas por incrementos de temperaturas, así como las deformaciones provocadas por fuerzas centrífugas.

En la ecuación 17 (y en la ecuación 19) utilizada para el cálculo de las componentes de la desalineación equivalente debidas a las deformaciones elásticas de los elementos de transmisión:

- Se aplica el principio de superposición para considerar las deformaciones producidas por la flexión del eje y la torsión del cuerpo del engranaje.
- Para el cálculo de la deformación por flexión del eje se considera una carga puntual aplicada en el centro del engranaje, y para el cálculo de la deformación por torsión se considera una carga uniformemente distribuida a lo largo del ancho de cara del engranaje. Se asume que la deformación que se produce bajo estas hipótesis de carga es similar a la que se produce con la distribución real de la carga. Se considera que esta hipótesis de carga es válida para valores bajos de $K_{H\beta}$, y pierde validez a medida que el valor de $K_{H\beta}$ se incrementa.
- Se asume que la configuración de la transmisión es acorde con la mostrada en la Figura 4, y que la posición de montaje de los engranajes no se aleja del medio del eje, de manera que $0 \leq s/l \leq 0.3$.
- Se considera que los ejes son de acero y tienen un diámetro constante. En el caso de ejes huecos, se considera que pueden aproximarse satisfactoriamente a ejes sólidos.
- Las deformaciones debidas a cargas axiales y momentos flectores no se incluyen en esta ecuación, aunque pueden ser relevantes en engranajes helicoidales.
- Esta ecuación también incluye una constante empírica obtenida en base a la práctica experimental [24].

La ecuación 22 para el cálculo de la rigidez del engrane:

- Se basa en la hipótesis de que el piñón y la rueda son engranajes externos de acero, y que la conexión entre el eje y la rueda dentada reparte la carga de manera uniforme en toda la circunferencia (como si la rueda dentada estuviese mecanizada sobre el propio eje).
- En esta ecuación aparece el término c' , que representa la rigidez máxima en el contacto de una pareja de dientes de engranajes cilíndricos rectos. Esta rigidez máxima es aproximadamente igual a la rigidez

máxima de una única pareja de dientes en contacto, que se asume que ocurre en el límite exterior de la zona de contacto único. Para engranajes helicoidales, este término representa la rigidez máxima normal a la hélice de un par de dientes, calculada considerando el concepto de engranaje virtual [25].

- En el caso de engranajes helicoidales, se utiliza el término $\cos \beta$ para transformar al plano transversal el valor de c' , originalmente calculado en el plano normal.
- La ecuación para el cálculo de c' se considera válida para transmisiones de engranajes donde la relación transversal de contacto $\varepsilon_\alpha \geq 1.2$, con un ángulo de hélice $\beta \leq 30^\circ$ y para cargas específicas $F_t \cdot K_A/b$ mayores de 100 N/mm. Esta ecuación puede acarrear errores de hasta el 10% cuando $\varepsilon_\alpha < 1.2$ y se deben tomar consideraciones adicionales cuando la carga específica es inferior a 100 N/mm.

La ecuación 24, utilizada para calcular el valor mínimo de flexibilidad de un par de dientes q' se derivó, con la ayuda de una expansión en serie, a partir de un engranaje cilíndrico conjugado con un perfil de cremallera básica estándar según la norma ISO 53 [23] y asumiendo una carga específica de 300 N/mm [26]. Esta ecuación se puede aplicar siempre que $x_1 \geq x_2$ y que $-0.5 \leq x_1 + x_2 \leq 2$. Cuando la carga específica está comprendida entre 100 N/mm y 1600 N/mm, los errores en el cálculo de la flexibilidad de la pareja de dientes en contacto están comprendidos entre +5% y -8%, respectivamente.

Por último, cabe destacar que el Anexo E.4 de la norma ISO 6336-1 [7] describe el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga utilizando un modelo de contacto de Winkler, en un procedimiento similar al presentado en este trabajo y considerando la fuerza tangencial en el cilindro base F_{bt} . En contraste, las ecuaciones de la norma ISO 6336-1 para el cálculo de este factor (ecuaciones 13 y 14) se basan en la fuerza tangencial en el cilindro de referencia F_t . Esto puede generar discrepancias en los resultados si ambos procedimientos se aplican de forma independiente.

4. Cálculo del factor de relación de contacto según la norma ISO 6336

El factor de relación de contacto Z_ε considera la influencia del grado de recubrimiento en la capacidad de carga de la transmisión. Según el método C de la norma ISO 6336, este factor se puede calcular como:

$$Z_\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3} \cdot (1 - \varepsilon_\beta)} & \text{si } \varepsilon_\beta < 1 \\ 0.80 & \text{si } \varepsilon_\beta \geq 1 \end{cases} \quad (25)$$

5. Cálculo numérico de los factores de distribución de la carga

En este trabajo el factor de distribución longitudinal de la carga obtenido de la aplicación del método C de la norma ISO 6336 se compara con el obtenido a partir de los resultados del análisis de un modelo de elementos finitos avanzado de la transmisión, que incluye a los cuerpos de los engranajes y a sus ejes. La Figura 5 resume el modelo de elementos finitos de la transmisión utilizado en este trabajo.

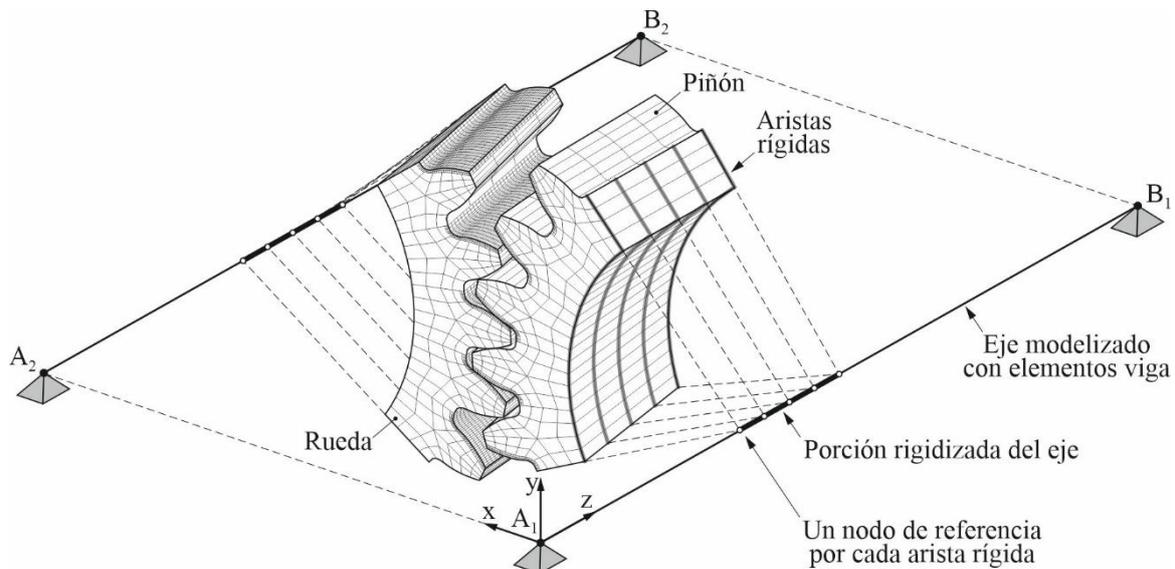


Figura 5: Descripción del modelo de elementos finitos de la transmisión.

En este modelo el mallado de los cuerpos de los engranajes se realiza como se describe en la referencia [27]. La base de este mallado es la utilización de dos mallas independientes: una malla refinada para las superficies de contacto de los engranajes, y una malla basta para el resto del cuerpo del engranaje. Ambas mallas se unen a través de restricciones de movimiento que garantizan la continuidad de los desplazamientos a lo largo de todo el modelo. La Figura 6 muestra de manera más detallada ambas mallas:

- La malla refinada está compuesta de varias capas de elementos finitos hexaédricos de primer orden (referencia C3D8I en Abaqus [28]) y se caracteriza por un espesor e (en la figura 6 se muestra solo dos capas de elementos, en favor de la simplicidad),
- La malla basta está compuesta por elementos finitos hexaédricos de segundo orden (referencia C3D20 en Abaqus [28]).

Cada una de estas mallas se genera utilizando el método descrito por Argyris [29], en el cual se crea una malla cuadrilateral plana para varias secciones transversales distribuidas uniformemente a lo largo del ancho del engranaje. Luego, los nodos en secciones transversales adyacentes se conectan para formar la malla tridimensional. Es importante destacar que todos los nodos dentro de una misma sección transversal comparten la misma coordenada en la dirección z .

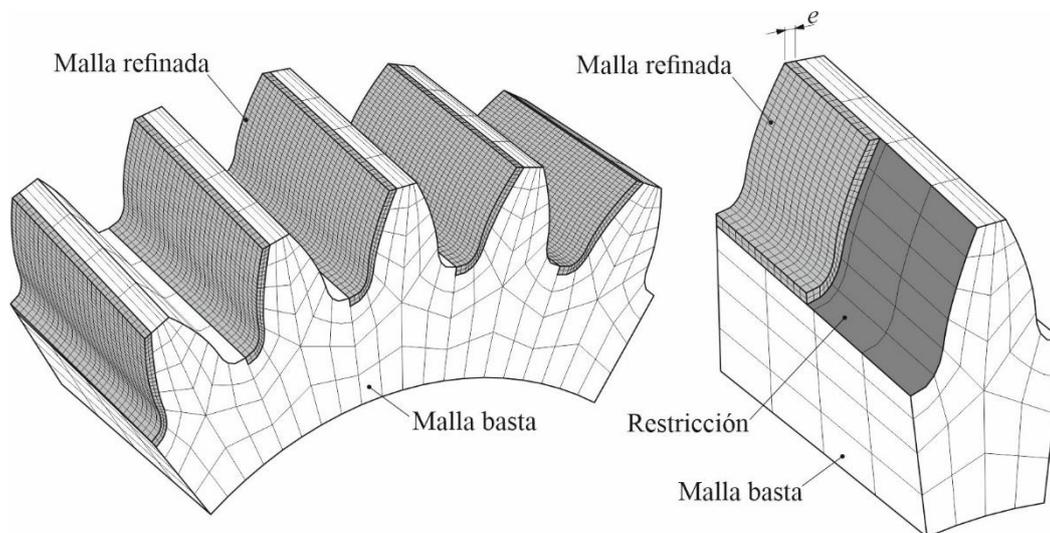


Figura 6: Descripción del mallado del cuerpo de los engranajes.

La inclusión de los ejes de los engranajes en el modelo de elementos finitos se realiza como se describe en la referencia [30]. Para una mayor eficiencia computacional, los ejes de los engranajes se modelizan mediante elementos finitos de tipo viga. La conexión entre los cuerpos de los engranajes y los ejes se establece a través de un conjunto de aristas rígidas, que envuelven la parte inferior del cuerpo de los engranajes, y cuyos movimientos se acoplan a nodos de referencia situados en los elementos viga del eje. Esta configuración del modelo de elementos finitos permite considerar tanto la deformación por flexión de los ejes y como la deformación por torsión de los cuerpos de los engranajes.

El contacto entre los dientes del engranaje se modela mediante pares de contacto de tipo superficie-superficie, asumiendo que el efecto de la fricción es tan pequeño que puede ser despreciado. El modelo permite activar y desactivar los pares de contacto, lo que posibilita simular condiciones en las que toda la carga se transmite a través de una única pareja de dientes, incluso en casos donde $\varepsilon_\gamma > 2$.

El modelo de elementos finitos considera un modelo de material elástico lineal para los engranajes y sus ejes, asumiendo que las deformaciones son tan pequeñas que se pueden estudiar bajo las hipótesis de la teoría de pequeños desplazamientos. Las condiciones de contorno se aplican en los nodos de los ejes que coinciden con los apoyos marcados en la Figura 1 (puntos A_1 , B_1 , A_2 y B_2).

El modelo de elementos finitos resultante se analiza mediante un análisis estático, en una posición donde la pareja de dientes central contacta en el cilindro de referencia. A partir de los resultados del análisis, el factor de distribución longitudinal de carga se calcula de la siguiente manera:

1. El piñón tiene 5 superficies de contacto, las cuales se denotan como $m = \{1, 2, \dots, 5\}$. Cada superficie de contacto está formada por una malla de $n_k \times n_i$ nodos, donde n_k representa el número de nodos en la dirección longitudinal y n_i el número de nodos en la dirección del perfil. De esta manera, $k = \{1, 2, \dots, n_k\}$ se refiere al número de secciones transversales, e $i = \{1, 2, \dots, n_i\}$ corresponde al número de

nodo dentro de la sección k . Así, cada nodo en las superficies de contacto tiene una codificación única $\{m, k, i\}$.

- Para cada nodo $\{m, k, i\}$ en las superficies de contacto activas del piñón, se recuperan los vectores que describen su posición deformada $\vec{r}^{\{m,k,i\}}$ y la fuerza de contacto $\vec{F}^{\{m,k,i\}}$. La componente de la fuerza tangencial en el cilindro base generada por la fuerza de contacto aplicada en dicho nodo se calcula como:

$$F_{bt}^{\{m,k,i\}} = \frac{2}{d_{b1}} \cdot (\vec{r}^{\{m,k,i\}} \times \vec{F}^{\{m,k,i\}}) \cdot \vec{k} \quad (26)$$

donde \vec{k} es el vector unitario asociado con el eje z.

- La intensidad de carga en la sección transversal k de la superficie de contacto m se calcula como:

$$W^{\{m,k\}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_i} F_{bt}^{\{m,k,i\}}}{h^{\{m,k\}}} \quad (27)$$

donde $h^{\{m,k\}}$ es el ancho equivalente asociado a la sección transversal k en la superficie de contacto m , definido como:

$$h^{\{m,k\}} = \begin{cases} b/(n_k - 1) & \text{si } 2 \leq k < n_k \\ b/(2 \cdot n_k - 2) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (28)$$

- A partir de los valores obtenidos de la intensidad de carga $W^{\{m,k\}}$ se define la función de intensidad de carga $W^m(z)$ para cada superficie de contacto m . Esta función se obtiene mediante interpolación lineal entre los valores de intensidad de carga correspondiente a secciones transversales adyacentes.

6. Ejemplos numéricos

Los métodos descritos anteriormente se aplican para analizar el factor de distribución longitudinal de la carga de una transmisión de engranajes cuya geometría se describe en la Tabla 3. Los engranajes de esta transmisión se fabrican utilizando una cremallera de corte estandarizada de tipo A, según la norma ISO 53 [23].

Tabla 3: Parámetros que definen la geometría de la transmisión estudiada.

Categoría	Parámetro	Piñón	Rueda
Parámetros de diseño de la cremallera de corte con la que se fabrican los engranajes	Ángulo de presión normal, α_n	20°	
	Módulo normal, m_n	3 mm	
	Ángulo de hélice, β	15°	
	Adendo, h_{aP}	$1 \cdot m_n$	
	Dedendo, h_{fP}	$1.25 \cdot m_n$	
	Redondeo del pie del diente, ρ_{fPi}	$0.38 \cdot m_n$	
Parámetros de diseño de las ruedas dentadas	Número de dientes, z_i	22	31
	Ancho de cara, b_i	32 mm	
	Coefficiente de desplazamiento del perfil, x_i	0.0	0.0
Parámetros de diseño de la transmisión	Posición de montaje de los engranajes, s	Variable	
	Longitud de los ejes, l	170 mm	
	Distancia entre ejes, a_w	82.304 mm	
	Diámetro de los ejes, d_{shi}	35 mm	50 mm

En estos ejemplos numéricos, de los 18 parámetros que definen la geometría de la transmisión, 17 se mantienen constantes y solo varía la posición de montaje s . Los casos de estudio presentados en la Tabla 4 se establecen en función de esta variación, junto con la definición del ángulo de hélice y la configuración de entrada y salida de potencia que se observa en la Figura 4.

Tabla 4: Definición de casos de estudio.

Caso de estudio	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
s/l	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.00	0.00	0.00	0.00
Sentido de hélice	Der.	Der.	Der.	Der.	Izq.	Izq.	Izq.	Izq.	Der.	Der.	Izq.	Izq.
Configuración	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	1	2

En todos los casos de estudio, se considera que los ejes de los engranajes están simplemente apoyados y que el par de entrada $T_1 = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$. Esto genera una fuerza tangencial en el cilindro base de $F_{bt} = 6255.9 \text{ N}$ y una intensidad de carga media de $W_m = 208.5 \text{ N/mm}$.

La Tabla 5 presenta los resultados analíticos obtenidos mediante la aplicación del método C de la norma ISO 6336 a cada caso de estudio. Los aspectos clave de dicha aplicación son los siguientes:

- Se consideran condiciones de carga cuasi-estáticas en los análisis, por lo que el factor dinámico y de aplicación se toman como $K_A = K_V = 1$.
- Dado que los resultados analíticos de este estudio se compararán con los obtenidos mediante un análisis por elementos finitos que considera geometrías de engranaje teóricamente exactas, se asume que $K_{H\alpha} = 1$. Por esta misma razón, también se considera que el proceso de rodaje no reduce la desalineación de los engranajes ($y_\beta = 0$ m).
- Dado que la geometría de los engranajes no varía entre los distintos casos de estudio, algunos parámetros permanecen constantes en todos ellos, como la relación de contacto transversal ε_α , el grado de recubrimiento ε_β , la relación de contacto total ε_γ , la flexibilidad del par de engranajes q' y la rigidez del engrane $c_{\gamma\beta}$.
- En este estudio se consideran engranajes con perfiles de evolvente sin modificaciones, por lo que se toma $B_1 = 1$ en la ecuación 16.

Tabla 5: Definición de casos de estudio.

Caso	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	Unidad
ε_α						1.55							-
ε_β						0.82							-
ε_γ						2.37							-
Z_ε^2						0.67							-
q'						0.06							$\mu\text{m}\cdot\text{mm}/\text{N}$
$c_{\gamma\beta}$						14.76							$\text{N}/(\mu\text{m}\cdot\text{mm})$
f_{sh1}	10.86	10.86	12.07	12.07	10.86	10.86	12.07	12.07	0.87	0.87	0.87	0.87	μm
f_{sh2}	3.13	2.52	2.52	3.13	3.13	2.52	2.52	3.13	0.44	0.44	0.44	0.44	μm
$F_{\beta\gamma}$	17.56	16.95	18.56	19.17	17.56	16.95	18.56	19.17	1.59	1.59	1.59	1.59	μm
b_{cal}/b	1.25	1.28	1.21	1.19	1.25	1.28	1.21	1.19	8.83	8.83	8.83	8.83	-
$K_{H\beta}$	1.66	1.64	1.70	1.72	1.66	1.64	1.70	1.72	1.06	1.06	1.06	1.06	-
$K_{H\beta} \cdot Z_\varepsilon^2$	1.12	1.10	1.14	1.16	1.12	1.10	1.14	1.16	0.71	0.71	0.71	0.71	-

En las siguientes secciones se comparan los resultados del factor de carga obtenidos mediante la aplicación del método C de la norma ISO 6336 con aquellos obtenidos a partir de un modelo de elementos finitos. Dicho modelo se ha construido siguiendo las directrices establecidas en las secciones anteriores. Cada geometría de engranaje cuenta con 806880 nodos y 618200 elementos. Cada superficie de contacto dispone de $n_i = 160$ nodos en la dirección del perfil y $n_k = 320$ nodos en la dirección longitudinal. Esta densidad de malla permite que, en cada sección transversal del diente, haya varios nodos dentro del área de contacto.

En las siguientes secciones, primero se presentan los resultados del análisis de un modelo elementos finitos de la transmisión en el que solo se considera una única pareja de dientes en contacto, con el objetivo de evaluar el desempeño del método C de la norma ISO 6336 en la predicción del factor de distribución longitudinal de la carga. Posteriormente, se analizan los resultados de un modelo de elementos finitos en el que se consideran varias parejas de dientes contactando simultáneamente, con el fin de evaluar la combinación del factor de distribución longitudinal de la carga con el factor de relación de contacto.

6.1. Análisis del factor de distribución longitudinal de la carga

En esta sección se analizan los resultados obtenidos para el factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$. En este caso el modelo de elementos finitos se configura considerando únicamente el contacto entre una única pareja de dientes de los engranajes, desactivando el contacto entre el resto. De esta manera, y a pesar de que la relación de contacto total real de la transmisión sea $\varepsilon_\gamma > 2$, toda la carga se transmite a través de una única pareja de dientes.

La Figura 7 muestra la distribución de carga a lo largo del ancho de la cara de los engranajes para los casos de estudio A a H, calculada a partir del análisis de elementos finitos de la transmisión. Además, esta figura presenta la distribución de carga obtenida mediante la aplicación del método C de la norma ISO 6336 (considerando $K_{H\beta}$ y b_{cal} , mostradas en la Tabla 5). A pesar de la simplicidad del método C de la norma ISO 6336, se observa que las distribuciones de carga obtenidas presentan un grado aceptable de similitud con las obtenidas a partir del modelo detallado de elementos finitos.

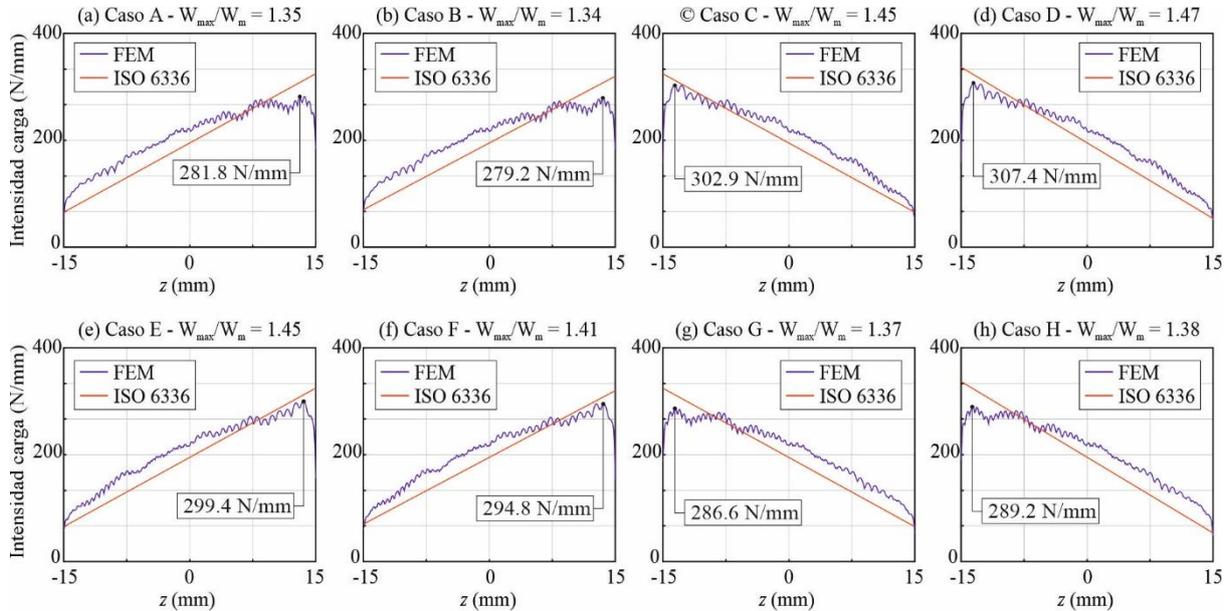


Figura 7: Distribución longitudinal de la carga para los casos de estudio A-H, considerando un único diente en contacto.

Los resultados del análisis del modelo de elementos finitos permiten observar el impacto de la configuración de entrada y salida de potencia, así como del ángulo de hélice, sobre la intensidad máxima de carga. En estos casos de estudio, la máxima intensidad de carga se produce en el caso D, donde se combina una hélice a derechas con una configuración de entrada/salida de potencia de tipo 4 (según la Figura 4d). Por lo contrario, la mínima intensidad de carga se observa en el caso B, donde se combina una hélice a derechas con una configuración de entrada/salida de potencia de tipo 2 (según la Figura 4b).

Las leyendas de la Figura 7 también incluyen la relación W_{max}/W_m , calculada a partir del modelo de elementos finitos, la cual es comparable con el factor $K_{H\beta}$ obtenido mediante el método C de la norma ISO 6336 e incluido en la Tabla 5. En todos los casos analizados, los valores del factor $K_{H\beta}$ calculados mediante el método C de la norma ISO 6336 son mayores que los obtenidos con el análisis de elementos finitos, lo que lleva a escenarios conservadores que tienden a sobrestimar la máxima intensidad de carga.

Si bien el método C de la norma ISO 6336 no considera la dirección del ángulo de hélice en el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga, los resultados muestran que el sentido de la hélice influye en la intensidad de carga máxima que se produce durante la transmisión de potencia. En particular, la mayor diferencia se encuentra entre los casos de estudio análogos D y H. La diferencia entre la intensidad de carga máxima en estos casos alcanza un valor de 18.2 N/mm, lo que representa un incremento del 6.3%.

La Figura 8 muestra la distribución de carga a lo largo del ancho de la cara de los engranajes para los casos de estudio I a L, en los cuales los engranajes están ubicados en el medio de los ejes. Se presentan las intensidades de carga obtenidas tanto a partir del análisis de elementos finitos de la transmisión como de la aplicación del método C de la norma ISO 6336. Es importante señalar que las diferencias en la magnitud de la intensidad de carga en cada resultado se deben al uso de diferentes definiciones de la carga transmitida en cada caso: F_{bt} para los resultados del análisis de elementos finitos y F_t para el método C de la norma ISO 6336.

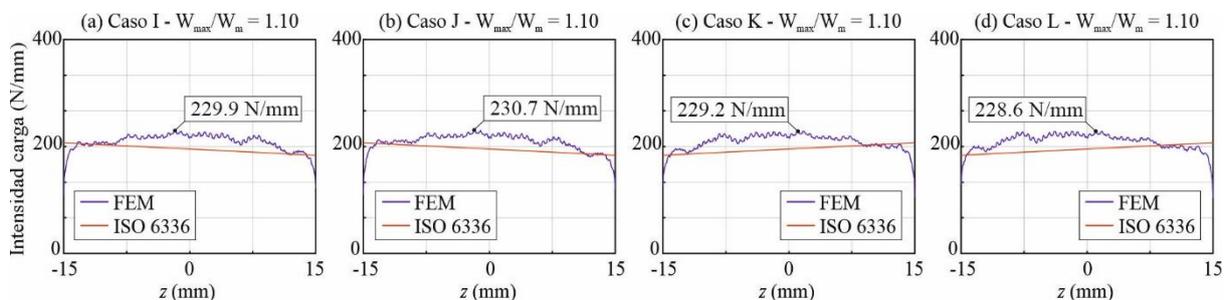


Figura 8: Distribución longitudinal de la carga para los casos de estudio I-L, considerando un único diente en contacto.

Esta figura muestra que, cuando los engranajes se encuentran ubicados en el centro del tramo entre los rodamientos ($s = 0 \text{ mm}$) y solo se considera la deformación torsional, las diferencias entre la dirección de la hélice y las configuraciones de entrada/salida de potencia son pequeñas.

6.2. Análisis del factor de distribución longitudinal de la carga combinado con el factor de relación de contacto

En esta sección se analizan los resultados obtenidos para la combinación del factor de distribución longitudinal de la carga $K_{H\beta}$ y el factor de relación de contacto Z_ϵ . Para ello, el modelo de elementos finitos se configura considerando el contacto simultáneo entre las cinco parejas de dientes incluidas en la geometría del engranaje, de modo que se tiene en cuenta el reparto de carga entre pares de contacto adyacentes.

La Figura 9 muestra la distribución de la carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes para los casos de estudio A a H, calculada a partir de los resultados del análisis por elementos finitos de la transmisión. En esta figura, la distribución de carga se presenta para los tres pares de dientes que están en contacto simultáneo en la transmisión del engranaje. Estos resultados permiten observar las diferencias en la distribución de la carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes, provocadas por los cambios en la configuración de entrada y salida de potencia, así como en el sentido de la hélice, considerando el reparto de carga.

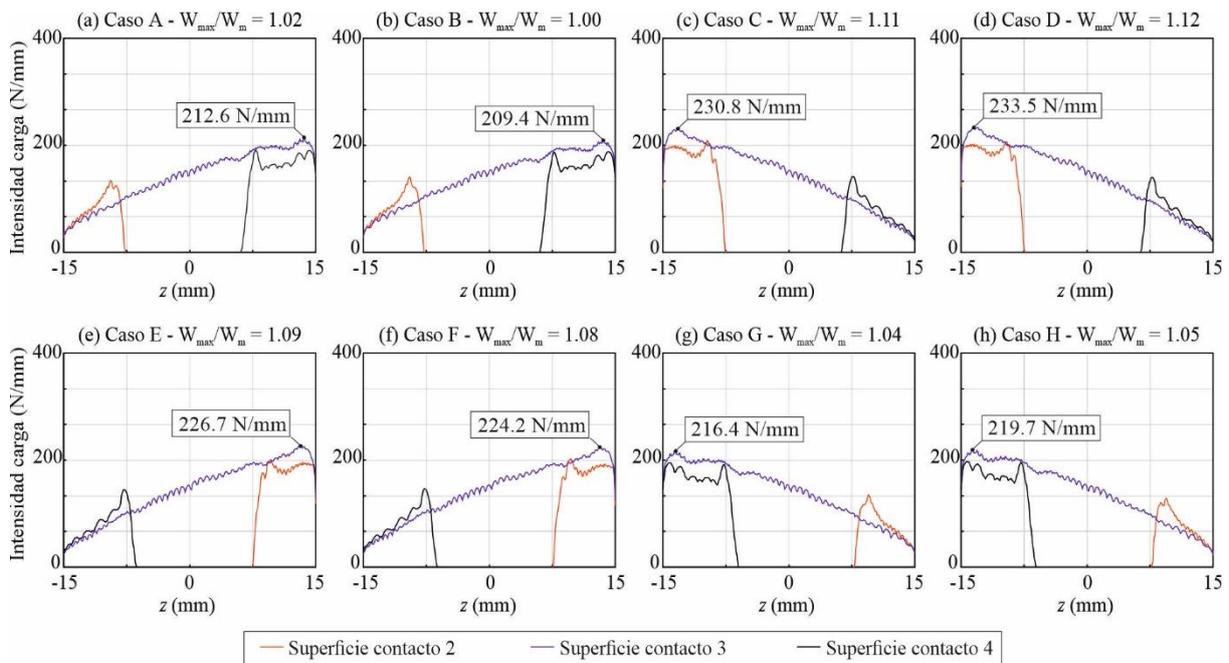


Figura 9: Distribución longitudinal de la carga para los casos de estudio A-H, considerando varios dientes en contacto.

Al igual que cuando se consideró el contacto de un solo diente (ver Figura 7), la intensidad máxima de carga se produce en el caso de estudio D, donde un ángulo de hélice a la derecha se combina con una configuración de entrada y salida de potencia de tipo 4 (según la Figura 4d). En cambio, en este análisis, la intensidad mínima de carga se presenta en el caso de estudio C (en lugar del caso B), donde un ángulo de hélice a la derecha se combina con una configuración de entrada y salida de potencia de tipo 3 (según la Figura 4c).

En estos resultados, el sentido de la hélice sigue desempeñando un papel importante en la intensidad máxima de carga. En particular, la diferencia máxima se produce entre los casos de estudio análogos B y F, alcanzando un valor de 14.8 N/mm, lo que representa un incremento del 7.0% en la intensidad máxima de carga.

Las leyendas de la Figura 9 incluyen la relación W_{max}/W_m , que en este caso es comparable con la combinación del factor de distribución longitudinal de la carga y el factor de relación de contacto $K_{H\beta} \cdot Z_\epsilon^2$, incluido en la Tabla 5. En todos los casos, los valores de $K_{H\beta} \cdot Z_\epsilon^2$, calculados mediante el método C de la norma ISO 6336 son mayores que los obtenidos a partir del análisis por elementos finitos de la transmisión, aunque las diferencias entre ambos métodos son menores que las obtenidas cuando no se consideró el factor de relación de contacto (ver la sección anterior).

La integración de la función de intensidad de carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes proporciona la carga total transmitida a través de cada superficie de contacto. A partir de esto, el reparto de carga entre los dientes se puede calcular dividiendo la carga transmitida a través del diente central entre la carga total transmitida. Según estas definiciones, el valor máximo del factor de reparto de carga es 0.685 y se produce en el caso de estudio C, mientras que el valor mínimo es 0.678 y se presenta en el caso de estudio G. Estos valores concuerdan bien con el factor de contacto Z_ϵ^2 calculado mediante el método C de la norma ISO 6336.

Finalmente, la Figura 10 muestra la distribución de carga a lo largo del ancho de cara de los engranajes para los casos de estudio I a L, calculada a partir de los resultados del análisis por elementos finitos de la transmisión,

considerando el contacto simultáneo entre los dientes del engranaje. En esta figura, la distribución de carga se representa para los tres pares de dientes que están en contacto simultáneo en la transmisión.

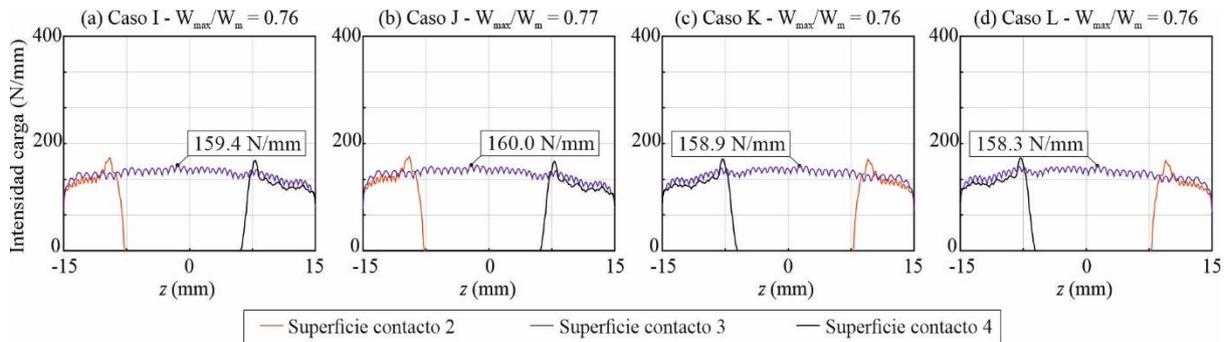


Figura 10: Distribución longitudinal de la carga para los casos de estudio I-L, considerando varios dientes en contacto.

Al igual que cuando en el modelo de elementos finitos solo se consideró el contacto de un par de dientes, esta figura muestra que cuando los engranajes están ubicados en el medio de los ejes ($s = 0 \text{ mm}$), las diferencias producidas por los cambios en el sentido de la hélice y en la configuración de entrada y salida de potencia son pequeñas.

En estos casos, la relación W_{max}/W_m , que puede compararse con los valores $K_{H\beta} \cdot Z_\varepsilon^2$, mostrados en la Tabla 5, indica que el método C de la norma ISO 6336 puede subestimar la intensidad máxima de carga que se produce en el contacto entre los dientes del engranaje, lo que podría comprometer la integridad de la transmisión.

7. Conclusiones

Este estudio evalúa la precisión del método C de la norma ISO 6336 para el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga en engranajes helicoidales, comparando sus resultados con los obtenidos a partir de un modelo avanzado de elementos finitos (FEM). El enfoque basado en FEM incorpora un sistema completo de engranaje-eje-soporte, lo que permite considerar de manera más precisa las deformaciones elásticas y la distribución de la carga. El análisis incluye múltiples casos de estudio con distintos ángulos de hélice y configuraciones de entrada y salida de potencia para evaluar su impacto en la distribución de la carga.

Los resultados indican que, si bien la norma ISO 6336 proporciona un método computacionalmente eficiente para estimar el factor de distribución longitudinal de la carga, sus simplificaciones pueden llevar a resultados no conservadores en algunos casos. No obstante, en la gran mayoría de los casos analizados, la norma tiende a sobrestimar dicho factor. A pesar de sus limitaciones, el método sigue siendo útil para estimaciones rápidas, especialmente en etapas preliminares de diseño.

El estudio también resalta la influencia significativa de la dirección del ángulo de hélice y la configuración de entrada y salida de potencia en los factores de distribución de carga, aspectos que no se consideran explícitamente en la norma ISO 6336. Cuando los engranajes se encuentran ubicados en el centro del tramo de soporte del eje, las diferencias entre configuraciones y ángulos de hélice se reducen, lo que sugiere que las suposiciones de la norma pueden ser más válidas en estas condiciones.

La comparación con los resultados obtenidos mediante FEM demuestran que el modelado numérico proporciona una evolución más precisa del comportamiento de carga en engranajes helicoidales, capturando con mayor detalle la distribución de la carga a lo largo del ancho de la cara del engranaje. El análisis FEM confirma que, aunque la norma ISO 6336 ofrece un enfoque práctico, no siempre garantiza estimaciones conservadoras, por lo que en aplicaciones críticas se recomienda el uso de métodos numéricos avanzados.

Para mejorar la norma, futuras actualizaciones podrían incorporar los efectos del ángulo de hélice y la configuración de transmisión en el cálculo del factor de distribución longitudinal de la carga. Además, sería beneficioso perfeccionar la metodología para mejorar su precisión sin aumentar significativamente la complejidad computacional, lo que permitiría su aplicación en contextos de ingeniería que requieran tanto eficiencia como fiabilidad.

8. Referencias

- [1] V. Vullo, *Gears*, vol. 10. in Springer Series in Solid and Structural Mechanics, vol. 10. Cham: Springer International Publishing, 2020. doi: 10.1007/978-3-030-36502-8.

- [2] S. S. Patil, S. Karuppanan, I. Atanasovska, and A. A. Wahab, "Contact stress analysis of helical gear pairs, including frictional coefficients," *Int J Mech Sci*, vol. 85, pp. 205–211, Aug. 2014, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2014.05.013.
- [3] M. A. Hotait, A. Kahraman, and T. Nishino, "An investigation of root stresses of hypoid gears with misalignments," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, vol. 133, no. 7, 2011, doi: <https://doi.org/10.1115/1.4004224>.
- [4] I. Gonzalez-Perez, A. Fuentes, V. Roda-Casanova, F. T. Sanchez-Marin, and J. L. Iserte, "A finite element model for stress analysis of lightweight spur gear drives based on thin-webbed and thin-rimmed gears," in *International Conference on Gears*, 2013, pp. 75–86.
- [5] International Organization for Standardization, "ISO 6336-2:2019: Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears — Part 2: Calculation of surface durability (pitting)," 2019, *International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland*.
- [6] International Organization for Standardization, "ISO 6336-3:2019: Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears — Part 3: Calculation of tooth bending strength," 2019, *International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland*.
- [7] International Organization for Standardization, "ISO 6336-1:2019: Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears — Part 1: Basic Principles, Introduction and General Influence Factors," 2019, *International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland*.
- [8] American Gear Manufacturers Association, "ANSI/AGMA 2001-D04 - Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth," 2001.
- [9] D. Miler and M. Hoić, "Optimisation of cylindrical gear pairs: A review," Feb. 01, 2021, *Elsevier Ltd*. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.104156.
- [10] D. Miler, A. Lončar, D. Žeželj, and Z. Domitran, "Influence of profile shift on the spur gear pair optimization," *Mech Mach Theory*, vol. 117, pp. 189–197, Nov. 2017, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.07.001.
- [11] S. Kim, S. Moon, J. Sohn, Y. Park, C. Choi, and G. Lee, "Macro geometry optimization of a helical gear pair for mass, efficiency, and transmission error," *Mech Mach Theory*, vol. 144, p. 103634, Feb. 2020, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103634.
- [12] K. L. Johnson, "Contact Mechanics," 1989, doi: 10.1201/b17110-2.
- [13] F. Curà, "ISO Standard based method for calculating the in-operation application factor KA in gears subjected to variable working conditions," *Int J Fatigue*, vol. 91, pp. 459–465, Oct. 2016, doi: 10.1016/j.ijfatigue.2015.11.014.
- [14] G. Belingardi, V. Cuffaro, and F. Curà, "Dynamic additional loads influencing the fatigue life of gears in an electric vehicle transmission," *Frattura ed Integrità Strutturale*, vol. 8, no. 30, pp. 469–477, Sep. 2014, doi: 10.3221/IGF-ESIS.30.57.
- [15] L. Zhao, R. C. Frazer, and B. Shaw, "Comparative study of stress analysis of gears with different helix angle using the ISO 6336 standard and tooth contact analysis methods," *Proc Inst Mech Eng C J Mech Eng Sci*, vol. 230, no. 7–8, pp. 1350–1358, Apr. 2016, doi: 10.1177/0954406216639075.
- [16] A. Kawalec, J. Wiktor, and D. Ceglarek, "Comparative analysis of tooth-root strength using ISO and AGMA standards in spur and helical gears with FEM-based verification," *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, no. 5, pp. 1141–1158, 2006, doi: 10.1115/1.2214735.
- [17] T. J. Lisle, B. A. Shaw, and R. C. Frazer, "External spur gear root bending stress: A comparison of ISO 6336:2006, AGMA 2101-D04, ANSYS finite element analysis and strain gauge techniques," *Mech Mach Theory*, vol. 111, pp. 1–9, May 2017, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2017.01.006.
- [18] C. Zhou, C. Chen, L. Gui, and Z. Fan, "A nonlinear multi-point meshing model of spur gears for determining the face load factor," *Mech Mach Theory*, vol. 126, pp. 210–224, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.04.010.
- [19] W. Kamycki and S. Noga, "Application of the Thin Slice Model for Determination of Face Load Distribution along the Line of Contact and the Relative Load Distribution Measured along Gear Root," *Strojniški vestnik – Journal of Mechanical Engineering*, vol. 66, no. 5, pp. 300–310, May 2020, doi: 10.5545/sv-jme.2020.6555.
- [20] Atanasovska I. and Nikolic-Stanojevic V., "3d spur gear fem model for the numerical calculation of face load factor," *Mechanics, Automatic Control and Robotics.*, 2007.
- [21] V. Roda-Casanova, F. Sanchez-Marin, I. Gonzalez-Perez, J. L. Iserte, and A. Fuentes, "Determination of the ISO face load factor in spur gear drives by the finite element modeling of gears and shafts," *Mech Mach Theory*, 2013, doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2013.02.006.
- [22] M. N. Bettaieb, P. Velez, and M. Ajmi, "A static and dynamic model of geared transmissions by combining substructures and elastic foundations - Applications to thin-rimmed gears," *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, no. 2, 2007, doi: 10.1115/1.2406088.
- [23] International Organization for Standardization, "ISO 53:1998: Cylindrical gears for general and heavy engineering — Standard basic rack tooth profile," 1998, *International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland*.

- [24] G. Niemann and H. Winter, *Maschinenelemente Band 2: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe - Grundlagen, Stirnradgetriebe*, vol. 2. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003. doi: 10.1007/978-3-662-11873-3.
- [25] Damir. Jelaska, *Gears and gear drives*. John Wiley & Sons, 2012.
- [26] W. F. Schäfer, “Beitrag zur Ermittlung des wirksamen Flankenrichtungsfehlers bei Stirnradgetrieben und der Lastverteilung bei Geradverzahnung,” Technische Hochschule Darmstadt, 1971.
- [27] I. Gonzalez-Perez and A. Fuentes-Aznar, “Implementation of a Finite Element Model for Gear Stress Analysis Based on Tie-Surface Constraints and Its Validation Through the Hertz’s Theory,” *Journal of Mechanical Design*, vol. 140, no. 2, Feb. 2018, doi: 10.1115/1.4038301.
- [28] Dassault Systèmes, “Abaqus Analysis User’s Manual, Version 6.6,” 2006, *Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI, USA*.
- [29] J. Argyris, A. Fuentes, and F. L. Litvin, “Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears,” *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 191, no. 11–12, pp. 1057–1095, Feb. 2002, doi: 10.1016/S0045-7825(01)00316-4.
- [30] I. Gonzalez-Perez, F. Sanchez-Marin, V. Roda-Casanova, A. Fuentes, and J. L. Iserte, “A Finite Element Model for Consideration of the Torsional Effect on the Bearing Contact of Gear Drives,” *Journal of Mechanical Design*, 2012, doi: 10.1115/1.4006831.