



Identificación Eficiente de Sistemas Dinámicos: Combinando SINDy y Conocimiento Mecánico

Aitor Plaza¹, Mikel Merino-Olagüe^{1,2}, Xabier Iriarte^{1,2}

¹ Dpto. de Ingeniería. Universidad Pública de Navarra. [aitor.plaza, mikel.merino,xabier.iriarte]@unavarra.es

² Institute of Smart Cities (ISC). Universidad Pública de Navarra. [mikel.merino, xabier.iriarte]@unavarra.es

La obtención de forma automática de leyes físicas que gobiernan un sistema únicamente a partir de datos siempre ha sido de gran interés en muchos campos científicos. En el ámbito de la ingeniería mecánica, este proceso se denomina identificación de sistemas. Se basa en utilizar datos de mediciones para deducir las ecuaciones que rigen, en forma de sistemas dinámicos, la descripción de dichos datos. Una vez que se descubren estas ecuaciones, éstas pueden emplearse para predecir el comportamiento futuro del sistema, determinar qué acciones o ajustes deben realizarse para controlar el sistema de manera efectiva o utilizar métodos matemáticos y analíticos para comprender mejor su comportamiento.

Recientemente, las técnicas de modelado basados en datos por medio de procesos de regresión dispersa, como el algoritmo SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamical systems) y sus diferentes modificaciones, se han desarrollado para resolver las dificultades en la extracción de la dinámica subyacente a partir de datos experimentales. Este algoritmo identifica estos modelos mediante la construcción de una colección de funciones candidatas (denominada biblioteca) que describen la dinámica del sistema. Mediante las técnicas de regresión dispersa selecciona las funciones más relevantes, promoviendo soluciones simples y parsimoniosas. El resultado final es un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema. Su principal ventaja es que los modelos resultantes son intrínsecamente interpretables y generalizables. La desventaja es que la creación de esta biblioteca de funciones se realiza mediante un enfoque de "fuerza bruta". Es decir, se generan muchas funciones candidatas de manera exhaustiva, sin un conocimiento previo específico sobre cuáles son las más adecuadas para describir la dinámica del sistema.

En este trabajo se propone aprovechar el conocimiento previo relativo a la naturaleza del sistema a analizar, un sistema mecánico. Esto permite generar una biblioteca de funciones en la que las funciones cumplen una serie de condiciones extraídas de la mecánica: análisis dimensional (unidades de las funciones han de ser coherentes con el sistema), simetrías en las ecuaciones (matriz de masa) o recursividad (aprovechamiento de la estructura cinemática del sistema) entre otras. Al limitar la biblioteca a unas funciones que sí tienen sentido físico, se reduce el espacio de búsqueda, lo que puede acelerar el proceso de identificación y hacer el algoritmo más eficiente.

Este procedimiento se ha probado en varios sistemas mecánicos con diferentes características: lineal y no lineal, número de grados de libertad o espacio de trabajo verificando el resultado con las ecuaciones ya conocidas que describen estos sistemas.

Esta metodología permite no solo obtener las ecuaciones dinámicas (ya conocidas en muchos casos), sino que además puede ser implementada para situaciones en las que la física exacta de un fenómeno es desconocida o para obtener sistemas de orden reducido, donde ciertas partes de la física a modelar no sean relevantes en el modelo.

1. Introducción

En el actual panorama científico y tecnológico, la modelización precisa y eficiente de sistemas dinámicos complejos es un desafío formidable que ha impulsado el desarrollo de métodos híbridos. La combinación de técnicas basadas en datos y el conocimiento a priori derivado de las leyes físicas tradicionales se perfila como una estrategia prometedora para la comprensión y predicción de fenómenos en diversas áreas de la ingeniería y la ciencia. El método SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) ha emergido en los últimos años como una herramienta poderosa para extraer modelos matemáticos explícitos a partir de datos, al identificar de forma dispersa las relaciones subyacentes entre variables dinámicas [1]. Sin embargo, su aplicación directa en sistemas mecánicos tradicionales puede verse limitada debido a la complejidad inherente de estos sistemas y a la presencia de ruido en los datos experimentales.

La obtención de forma automática de las leyes físicas que gobiernan un sistema a partir únicamente de datos siempre ha resultado de gran interés en numerosos campos científicos [1-2]. En el ámbito de la ingeniería mecánica, este proceso es conocido como *identificación de sistemas*. Se basa en el uso de datos de medición para derivar las ecuaciones que describen, en forma de sistemas dinámicos, la evolución temporal de dichos datos. Concretamente, en el campo de la dinámica de sistemas de múlticuerpo, existe cierto interés creciente en la aplicación de técnicas de aprendizaje automático para desarrollar diversos enfoques que permitan obtener la dinámica que representa el sistema directamente a partir de datos [3].

Desde hace unos pocos años, se vienen desarrollando técnicas de modelización basadas en datos que utilizan los denominados procesos de *Regresión Dispersa*. Entre estos métodos cabe destacar el algoritmo SINDy (denominado así por las siglas en inglés de Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems) [4] y sus diferentes versiones [5-6]. El objetivo de estos métodos es el de superar las dificultades en la extracción de la dinámica subyacente a partir de datos experimentales. Fundamentalmente, este algoritmo identifica dichos modelos mediante la construcción de una colección de funciones candidatas (denominada *biblioteca*), entre las que se incluyen términos polinómicos, trigonométricos y otros no lineales, con el objetivo de representar la dinámica del sistema a partir de un supuesto amplio de posibles relaciones. Mediante las técnicas de regresión dispersa, se extraen de la biblioteca las funciones más relevantes, de forma que mediante su combinación lineal se obtiene el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución temporal de las variables de interés del sistema. Su principal ventaja radica en que los modelos resultantes son interpretables y generalizables. La desventaja, sin embargo, es que la creación de esta biblioteca de funciones se realiza mediante un enfoque de *fuerza bruta*. Es decir, se generan exhaustivamente numerosas funciones candidatas, de distinto tipo y grado, sin conocimiento previo específico de cuáles son las más adecuadas para describir la dinámica, en este caso, la dinámica de sistemas multicuerpo.

En el campo de la dinámica de sistemas de multicuerpo, el algoritmo SINDy no ha recibido mucha atención, habiéndose aplicado solo a casos específicos y siempre a partir de un enfoque de fuerza bruta [7-9]. Es particularmente interesante tener en cuenta el trabajo presentado en [10], en donde los autores aplican este método utilizando un enfoque basado en algoritmos genéticos de regresión simbólica dispersa a diferentes sistemas mecánicos, obteniendo las ecuaciones que representan la dinámica de diferentes mecanismos. A pesar de que la aplicación del método SINDy a sistemas mecánicos no es nueva, todos estos trabajos anteriores comparten la característica de no tener en cuenta la naturaleza del sistema en estudio. En este trabajo, proponemos no adoptar un enfoque de fuerza bruta, sino considerar el tipo de sistema del que se trata, es decir, un sistema mecánico.

Como ya se ha comentado, una de las principales limitaciones al aplicar SINDy en el contexto de la mecánica es la sobreabundancia de funciones candidatas en la biblioteca y que carecen de una clara y explícita naturaleza física. Así pues, este trabajo se centra en establecer un marco metodológico que permita la integración efectiva de restricciones físicas en el algoritmo SINDy aplicado a sistemas mecánicos. A partir de aquí, la estructura del artículo se organiza en varias secciones. En la primera sección se presenta una revisión teórica del algoritmo SINDy y su evolución en la literatura. A continuación, esta misma sección presenta la propuesta de una metodología que incorpore el conocimiento físico en la selección de funciones candidatas y al problema de regresión dispersa. Posteriormente, se incluye el estudio de esta metodología aplicada dos casos de estudio no lineales, uno de un grado de libertad y el otro de dos, y se discuten los resultados obtenidos. Finalmente, se presenta brevemente una serie de conclusiones.

2. Metodología

2.1. El algoritmo SINDy

El algoritmo SINDy (Sparse Identification of Nonlinear Dynamics) surgió como un planteamiento innovador a la posibilidad de descubrir, a partir de datos, las ecuaciones que gobiernan sistemas dinámicos complejos. Fue presentado inicialmente por Brunton, Proctor y Kutz [4] y se fundamenta en la hipótesis de que, a pesar de contar con un gran número de posibles funciones candidatas, la verdadera dinámica de un sistema se puede describir mediante una combinación lineal dispersa de estas funciones. Es decir, que sólo unas pocas de estas funciones

resultan determinantes para reproducir con precisión la evolución temporal un sistema. SINDy aprovecha que muchos sistemas dinámicos se pueden escribir en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa el estado del sistema. SINDy busca aproximar linealmente $f(\mathbf{x})$ como una combinación dispersa (ξ) de funciones base no lineales predefinidas en una biblioteca $\Theta(\mathbf{x})$. Es decir:

$$\dot{\mathbf{X}} = \Theta(\mathbf{X})\Xi$$

en donde $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_1) \ \mathbf{x}(t_2) \ \dots \ \mathbf{x}(t_n)]^T$ es la matriz de estados medidos a lo largo del tiempo, la matriz $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{x}}(t_1) \ \dot{\mathbf{x}}(t_2) \ \dots \ \dot{\mathbf{x}}(t_n)]^T$ representa las derivadas temporales de la matriz de, $\Theta(\mathbf{x})$ es la biblioteca de funciones candidatas (exponenciales, polinomios, trigonométricas, etc...) y, finalmente, Ξ es la matriz dispersa que contiene los coeficientes de la combinación lineal.

Se ha de hacer notar que en la aplicación de este algoritmo los valores del vector de estados y su derivada en cada instante i de tiempo, $\mathbf{x}(t_i)$ y $\dot{\mathbf{x}}(t_i)$, han de ser medidos.

Como se ha indicado, el algoritmo SINDy asume que la dinámica del sistema puede aproximarse mediante una combinación lineal de funciones no lineales tomadas de esta biblioteca predefinida $\Theta(\mathbf{x})$, que depende del estado. Ésta se construye evaluando diversas funciones candidatas en cada punto $\mathbf{x}(t_i)$:

$$\Theta(\mathbf{X}) = [\mathbf{1} \ \mathbf{X} \ \mathbf{X}^2 \ \dots \ \mathbf{X}^d \ \dots \ \sin(\mathbf{X}) \ \dots]$$

en donde \mathbf{X}^d indica una matriz con todas las posibles combinaciones de grado d de todas las series temporales. En general esta librería está únicamente limitada por la imaginación del usuario. Cada columna ξ_k de la matriz Ξ es un vector de coeficientes que determina qué función candidata es la que está *activa* en la fila k -ésima de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Un modelo óptimo es el que contiene menor número de término en la matriz Ξ representado adecuadamente el modelo original.

Para determinar los coeficientes ξ_k se resuelve un problema de optimización con regularización que promueva la dispersidad. Una forma común es utilizar la regularización l_1 :

$$\xi_k = \min_{\xi_k} \|\dot{\mathbf{X}}_k - \Theta(\mathbf{X})\xi_k\|_2 + \lambda \|\xi_k\|_1$$

en donde $\dot{\mathbf{X}}_k$ es la columna k -ésima de $\dot{\mathbf{X}}$ y λ es el coeficiente de regularización. Los métodos de regresión dispersa como LASSO [11] o el método de mínimos cuadrados secuencial con umbral (Sequential Thresholded Least-Squares, STLS) [4], aumentan la robustez computacional de método para problemas con ruido y sobredeterminados.

2.2. Integración del conocimiento mecánico en el algoritmo SINDy

El enfoque que se presenta en este trabajo permite generar la biblioteca de funciones de manera que ésta cumpla con una serie de condiciones derivadas de la dinámica de sistemas de multicuerpo:

Orden del sistema.

Como se ha visto, el algoritmo SINDy se formula comúnmente para ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs) de primer orden. Sin embargo, puede adaptarse para manejar sistemas de orden superior, específicamente sistemas de segundo orden. Las ODEs pueden reorganizarse de modo que adquiera una estructura similar a la de un sistema multicuerpo de segundo orden.

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} - \delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}$$

en donde $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ son, respetivamente, las coordenadas, velocidades y aceleración generalizadas, $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ es la matriz de masa (dependiente de \mathbf{q}), $\delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el termino de fuerzas generalizadas (fuerzas de inercia y acciones constitutivas) y $\boldsymbol{\tau}$ es el término de acciones exteriores.

En este caso el algoritmo SINDy se plantea para obtener las ODEs que representan la dinámica del sistema. Para ello el algoritmo se reescribe como:

$$\boldsymbol{\tau} = \Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\Xi$$

Es decir, la biblioteca de funciones candidatas dependerá únicamente de $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ y cada columna ξ_k de la matriz Ξ es un vector de coeficientes que determina qué función candidata es la que está *activa* en la fila k -ésima de $\boldsymbol{\tau}$. Estos coeficientes serán en general coeficientes con significado físico, como masa, primeros y segundos momentos de inercia y coeficientes de rigidez y de amortiguamiento.

Se ha de hacer notar que en esta forma de representar el sistema para los diversos i instantes de tiempo se han de conocer los valores de $\boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i$ y $\ddot{\mathbf{q}}_i$.

En este caso, el procedimiento para determinar la matriz Ξ se reescribe como:

$$\xi_k = \min_{\xi_k} \|\tau_k - \Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\xi_k\|_2 + \lambda \|\xi_k\|_1$$

Para la resolución de este procedimiento se opta por el método STLS tal y como se presenta en [4].

Derivación numérica.

Como ha sido visto, en este caso la biblioteca de funciones $\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ depende de $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ y por lo tanto se ha de conocer su valor en cada instante de tiempo i . Puede darse el caso de estas coordenadas, velocidades y aceleraciones generalizadas no sean accesibles siempre. Dado que la mayoría de los datos experimentales se toman en formato discreto, se utilizan métodos de diferenciación y derivación numérica. Sin embargo, esta tarea no siempre es trivial. De hecho, la diferenciación numérica de señales ruidosas sigue siendo un problema no completamente resuelto, como se muestra en [12]. Para el suavizado y realizar la diferenciación numérica de las variables de estado, en este trabajo se propone utilizar el método de regularización de Tikhonov de primer orden [13]. Para la derivación numérica, existen diversas aproximaciones que se pueden emplear: métodos de Newton, regla trapezoidal, regla de Simpson, etc...

Análisis dimensional.

Garantizar la consistencia de las unidades en la biblioteca de funciones candidatas es crucial. Las ecuaciones que rigen la dinámica de sistemas multicuerpo deben mantener dicha consistencia, al igual que la biblioteca de funciones $\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$.

Si se piensa en $\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$, las funciones candidatas han de ser combinaciones de únicamente de coordenadas y aceleraciones generalizadas. Es más, las coordenadas deberán aparecer dentro de funciones trigonométricas como senos y cosenos. Por otro lado, en $\delta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ los términos como la velocidad angular elevada al cubo nunca aparecerán, siempre estará elevada al cuadrado. O nunca aparecerán coordenadas generalizadas elevadas a diferentes potencias, etc... Esto permite reducir drásticamente el número de funciones candidatas, reduciendo el espacio de búsqueda y ayudando notablemente al algoritmo de regresión dispersa. De esta forma, el modo de proceder por fuerza bruta del algoritmo SINDy original, pasa a tener cierto sentido físico al tener sólo funciones candidatas que se sabe a priori qué estructura van a tener.

Naturaleza de las coordenadas.

Estrechamente relacionado con el análisis dimensional, las coordenadas generalizadas pueden ser divididas en dos subconjuntos, las de naturaleza de traslación y las de naturaleza rotacional. Las primeras tienen unidades de distancia (m, cm, mm, ...) mientras que las segundas de giro (rad o deg). Las primeras nunca podrán aparecer en sistemas mecánicos dentro de funciones trigonométricas, mientras que las segundas, en general, siempre serán argumento de funciones trigonométricas. La excepción a esto son los casos en que existan muelles o amortiguadores rotacionales, donde sí aparecen fuera de estas funciones trigonométricas.

Explotación de simetrías.

Es bien sabido que en un sistema multicuerpo, si las ecuaciones de movimiento se derivan mediante el Principio de las Potencias Virtuales, la matriz de masa $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ resultante es simétrica. Esta idea también puede incorporarse en la creación de la biblioteca de funciones candidatas para sistemas con varios grados de libertad.

En este caso las columnas ξ_k de la matriz Ξ tendrán coeficientes iguales. La librería $\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ se puede generar de tal forma, que se aproveche esta simetría, lo que, de nuevo, reduce drásticamente el número de funciones candidatas al poder predecirse qué elementos de la podrán ser no nulos.

Estructura cinemática.

La estructura cinemática de un sistema multicuerpo también puede ser explotada por el método SINDy para reducir la complejidad computacional y proporcionar coherencia física. Los sistemas multicuerpo a menudo presentan relaciones jerárquicas (por ejemplo, entre eslabones, articulaciones y coordenadas generalizadas), lo cual puede orientar el diseño de la librería $\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$.

Si se piensa en un eslabonamiento donde partes rígidas están conectadas para formar cadenas, si éste se acota por medio de coordenadas relativas, habrá relaciones entre las coordenadas en un orden determinado. Esto permite buscar funciones candidatas que tengan en cuenta estas relaciones. Por ejemplo, sea un sistema con n giros relativos dados por las n coordenadas generalizadas θ_n . Se podrán proponer funciones candidatas que dependan de $\theta_n, \theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots$, siguiendo el orden de los eslabones. Lo que habrá, serán funciones que dependa, por ejemplo, de θ_n y θ_{n-3} , saltando a las coordenadas intermedias.

Adicionalmente, el problema de regresión dispersa para determinar la matriz Ξ podría abordarse de forma secuencial siguiendo el denominado esquema de dinámica recursiva inversa. Es decir, por medio de la regresión, obtener primeramente las ecuaciones relativas a sólidos más alejados de la base, para ir aplicando el mismo método

de forma secuencial obteniendo las ecuaciones asociadas a sólidos cada vez más cerca de la base. Esto ayuda el método de regresión dispersa y adicionalmente al coste computacional del mismo.

Parámetro de regularización.

La dispersidad en las funciones candidatas puede imponerse también mediante técnicas de regularización. El conocimiento físico podría incorporarse como parte del problema de regresión dispersa sujeto a restricciones basadas en la física, es decir, haciendo cumplir relaciones cinemáticas o asegurando la conservación de la energía.

Si se piensa en un péndulo triple o un cuadrilátero articulado, las ecuaciones dinámicas son las mismas, la diferencia radica en que uno es de cadena abierta y el otro de cadena cerrada. En el sistema de cadena cerrada, se han de cumplir ciertas relaciones geométricas y cinemáticas entre coordenadas, velocidades y aceleraciones. Esta información de su puede añadir con una restricción adicional en el problema de minimización.

3. Ejemplos y discusión

A continuación se presentan dos ejemplos básicos que permiten ilustrar y ayudar a comprender el funcionamiento de esta metodología. En primer lugar, se presenta un ejemplo sencillo de un sistema no lineal de un grado de libertad que permitirá comprender mejor el concepto de librería de funciones candidatas. A continuación, se aplica la metodología a un sistema no lineal de dos grados de libertad, mostrando cómo se puede aplicar a estos sistemas más complejos y mostrando que la extensión a sistemas de mayor tamaño es simplemente un tema computacional.

3.1. Sistema lineal de un grado de libertad

Sea el clásico sistema de un grado de libertad de un péndulo simple en donde existe rozamiento entre el suelo y el péndulo y se le aplica un momento $m(t)$. Nótese que la ecuación que rige la dinámica de este sistema es $ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mlg\sin(\theta) = \tau(t)$ y es conocida. En este ejemplo se ha considerado: $m=1$ kg, $l=0.5$ m, $c=0.1$ Ns/m y $g=9.8$ m/s².

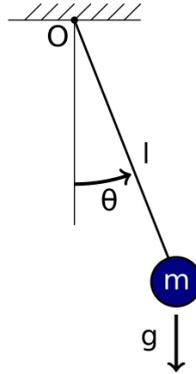


Figura 1: Sistema lineal de un grado de libertad no lineal.

En este ejemplo, esta ecuación será usada para generar los datos necesarios y validar el funcionamiento de la metodología. La ecuación se utilizará para crear, por medio de una simulación, de los datos temporales que describirán la posición, velocidad y aceleración de la masa. Estos datos en un caso real, corresponderían a datos medidos.

Sean los vectores $\mathbf{X} = [\theta]$, $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\theta}]$ y $\ddot{\mathbf{X}} = [\ddot{\theta}]$ datos medidos de posición, velocidad y aceleración del sistema y el vector de fuerzas exteriores $\boldsymbol{\tau} = [\tau(t)]$ también medido. Sin, a priori, conocer la dinámica de este sistema se procederá a crear la librería de funciones candidatas, $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$, con todas las posibilidades dimensionalmente consistentes del estado teniendo en cuenta los puntos detallados en la sección anterior:

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \theta & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \theta \sin(\theta) & \theta \cos(\theta) & \dot{\theta} & \dot{\theta} \sin(\theta) & \dot{\theta} \cos(\theta) & \dot{\theta}^2 & \dot{\theta}^2 \sin(\theta) & \dot{\theta}^2 \cos(\theta) & \ddot{\theta} \end{bmatrix}$$

Nótese que en esta matriz cada fila corresponde a las funciones candidatas evaluadas en un instante de tiempo diferentes. El vector $\boldsymbol{\tau}$ contiene los valores del vector de acción exterior en los mismo instantes de tiempo. Con estos datos, se determinan los elementos de $\boldsymbol{\Xi}$ que tienen relevancia en la dinámica del sistema. El valor numérico de los elementos es el peso con el que cada una de las funciones candidatas participa en la dinámica del sistema. Para ello se resuelve la siguiente ecuación mediante el algoritmo STLS tal y como se presenta en [4].

$$\boldsymbol{\Xi} = \min_{\boldsymbol{\Xi}} \|\boldsymbol{\tau}_k - \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\Xi}\|_2 + \lambda \|\boldsymbol{\Xi}\|_1$$

De este problema de minimización secuencial se obtienen los siguientes resultados:

$$\Xi = [0 \ 0 \ 4.9 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.25]^T$$

Como se puede ver los valores obtenidos corresponden a los términos de la ecuación dinámica del péndulo evaluados con los valores de los parámetros correspondientes: $mlg = 4.9$, $c = 0.1$ y $ml^2 = 0.25$.

3.2. Sistema no lineal de dos grados de libertad. Péndulo invertido.

En este segundo ejemplo, se aplica esta metodología al siguiente sistema de dos grados de libertad de la figura. Como se puede ver se trata del sistema denominado “péndulo invertido”.

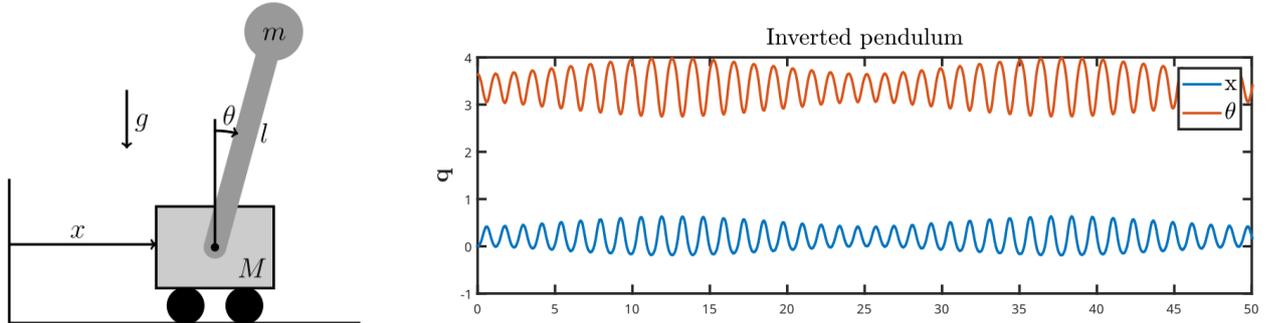


Figura 2: Péndulo invertido. En la figura de la derecha se puede ver una de las simulaciones realizadas.

En este segundo caso se han realizado dos experimentos diferentes, uno con los datos tal y como se obtienen de la simulación y un segundo experimento en el que se le ha añadido a la simulación un ruido gaussiano de $N(0,0.1)$. En este modelo se han considerado los siguientes parámetros $M=2$ kg, $m=5$ kg, $l=1$ m y $g=9.8$ m/s².

En este caso la librería de funciones candidatas es, debido a la cantidad de combinaciones, muy extensa como para ser mostrada. En su lugar, se prestan las ecuaciones del sistema, con diferentes colores:

$$\begin{aligned} (m + M)\ddot{x} - ml \cos(\theta) \ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) &= F \cos(\omega_1 t) \\ -ml \cos(\theta) \ddot{x} + ml^2 \ddot{\theta} - gml \sin(\theta) &= M \cos(\omega_2 t) \end{aligned}$$

Los términos en color verde corresponden a las funciones candidatas que tienen relevancia en la dinámica del sistema. Estos términos, junto con muchas otras funciones candidatas, evaluados en todos los instantes de tiempo de las simulaciones, forman la biblioteca $\Theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$. Los términos en color rojo corresponden a las acciones exteriores en cada uno de los instantes de tiempo y que son conocidas. Por último, los términos en color azul corresponden a los valores no nulos obtenidos del método de regresión.

Se ha de destacar que ahora Ξ es una matriz con dos columnas. En la primera se encuentran los pesos que multiplican a las funciones candidatas que aparecen en la primera ecuación, y en la segunda columna los correspondientes a la segunda. En la siguiente tabla se muestran los valores de esta regresión para los dos casos (sin ruido y con ruido):

Tabla 1: Resultados obtenidos de la aplicación del método al sistema del ejemplo 2.

Significado físico	Valor real	Valor estimado sin ruido	Valor estimado con ruido
$(m + M)$	7.00	7.00	6.5252
$-ml$	-5.00	-5.00	-4.6731
$+ml$	5.00	5.00	4.5114
ml^2	5.00	5.00	4.7242
$-gml$	-49.00	-49.00	-47.3281

Como se puede observar de los resultados obtenidos, en el caso en que no se añade ruido, los valores obtenidos son exactamente los esperados. Donde sí se ve cierta discrepancia entre los valores reales y los estimados en el segundo caso, donde se añadió ruido a los datos. Un filtrado previo a la aplicación del algoritmo ayudaría a que los resultados fueran más cercanos al valor real.

Si se fija uno en el término $-ml$ de las ecuaciones, se puede ver que ésta aparece en ambas dos. Esto es debido a la simetría presente en la matriz de masa. En este caso, se ha tenido en cuenta este factor. Si no se hubiera tenido en cuenta este factor, se habrían obtenido dos valores diferentes. Uno de ellos para la primera ecuación que multiplicaría a la función candidata $\cos(\theta) \ddot{\theta}$ y el otro para la segunda ecuación y que multiplicaría a la función candidata $\cos(\theta) \ddot{x}$.

4. Conclusiones

En este trabajo, se presenta un mejor al algoritmo SINDy adaptado mediante la incorporación del conocimiento de dinámica multicuerpo. Se propone añadir diversas fuentes de información relativa: el orden del sistema, la derivación numérica, el análisis dimensional, la naturaleza de las coordenadas, las simetrías en la matriz de masa, la estructura cinemática del sistema. Finalmente, se propone la incorporación de otros términos de regularización que ayuden al algoritmo de optimización.

Este método presentado ayuda a crear una biblioteca de funciones candidatas más eficiente y físicamente coherente. Este enfoque evita un ataque al problema por fuerza bruta, reduce el espacio de búsqueda, acelera el proceso de identificación y mejora la precisión.

Esta metodología permite no sólo obtener las ecuaciones dinámicas (ya conocidas en muchos casos), sino que también puede aplicarse para situaciones en las que se desconoce la física exacta de un fenómeno o para obtener sistemas de orden reducido, en los que ciertas partes de la física no sean muy relevantes en la dinámica del modelo.

5. Referencias

- [1] Bongard, J., & Lipson, H. (2007). Automated reverse engineering of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(24), 9943-9948.
- [2] Schmidt, M., & Lipson, H. (2009). Distilling free-form natural laws from experimental data. *science*, 324(5923), 81-85.
- [3] Hashemi, A., Orzechowski, G., Mikkola, A., & McPhee, J. (2023). Multibody dynamics and control using machine learning. *Multibody System Dynamics*, 58(3), 397-431.
- [4] Brunton, S. L., Proctor, J. L., & Kutz, J. N. (2016). Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the national academy of sciences*, 113(15), 3932-3937.
- [5] Brunton, S. L., Proctor, J. L., & Kutz, J. N. (2016). Sparse identification of nonlinear dynamics with control (SINDYc). *IFAC-PapersOnLine*, 49(18), 710-715.
- [6] Champion, K., Lusch, B., Kutz, J. N., & Brunton, S. L. (2019). Data-driven discovery of coordinates and governing equations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(45), 22445-22451.
- [7] Piramoon, S., Ayoubi, M., & Bashash, S. (2024). Modeling and Vibration Suppression of Rotating Machines Using the Sparse Identification of Nonlinear Dynamics and Terminal Sliding Mode Control. *IEEE Access*.
- [8] Omar, M., Li, R., & Asker, A. (2022). A framework for data driven dynamic modeling of serial manipulators. *IEEE Access*, 10, 124874-124883.
- [9] Pandey, P., Khodaparast, H. H., Friswell, M. I., Chatterjee, T., Jamia, N., & Deighan, T. (2024, June). Data-driven system identification of unknown systems utilising sparse identification of nonlinear dynamics (SINDy). In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 2647, No. 6, p. 062006). IOP Publishing.
- [10] Askari Renani, E., & Crevecoeur, G. (2021). A system identification procedure for multibody system dynamics. In *ECCOMAS Multibody Dynamics Conference 2021* (pp. 148-149). Budapest University of Technology and Economics.
- [11] Tibshirani, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, 58(1), 267-288.
- [12] Van Breugel, F.; Kutz, J.N.; Brunton, B.W. Numerical differentiation of noisy data: A unifying multi-objective optimization framework. *IEEE Access* 2020, 8, 196865–196877.
- [13] Aster, R.C.; Borchers, B.; Thurber, C.H. *Parameter Estimation and Inverse Problems*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2018.