



Caracterización del espacio de trabajo de una nueva familia de manipuladores paralelos 2T2R

P. Diego Martín¹, E. Macho Mier¹, S. Herrero Villalibre¹, M. Diez Sánchez¹, J. Corral Sáiz¹,
A. Schmedling Casas¹, R. Valenzuela Montes¹, F. J. Campa Gómez¹, C. Pinto Camara¹

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad del País Vasco (UPV/EHU), Escuela de Ingeniería de Bilbao

paul.diego@ehu.eus, erik.macho@ehu.eus, saioa.herrero@ehu.eus, mikel.diez@ehu.eus, j.corral@ehu.eus,
adrian.schmedling@ehu.eus, ruben.valenzuela@ehu.eus, fran.campa@ehu.eus, charles.pinto@ehu.eus

Este trabajo de investigación presenta una metodología para el cálculo y la caracterización del espacio de trabajo de una familia novedosa de manipuladores paralelos capaces de realizar 2 traslaciones (2T) y 2 rotaciones (2R) requeridas en un amplio abanico de aplicaciones del ámbito industrial, aeronáutico y de la rehabilitación. Debido a su similitud cinemática, la metodología da lugar a resultados análogos para cada uno de los manipuladores que conforman la familia, por ende, a lo largo del trabajo se toma como ejemplo ilustrativo un único manipulador. En concreto, uno de topología simétrica y novedosa hasta la fecha (2RRU-2RSS).

En primer lugar, se describen las variables cinemáticas de entrada-salida asociadas al manipulador objeto de estudio, y se plantean las coordenadas de sus pares cinemáticos en función de estas. Posteriormente, se enumeran las diferentes variantes topológicas que dan lugar a los mecanismos cinemáticamente equivalentes que conforman esta familia y para los cuales son extrapolables las conclusiones alcanzadas. A continuación, se propone una metodología con un enfoque de carácter geométrico para obtener el espacio de trabajo individual de cada cadena, a partir de las expresiones analíticas del lugar geométrico de sus singularidades. Finalmente, haciendo uso de dichas expresiones y aplicando un método analítico-gráfico de desarrollo propio en MATLAB, se obtiene el espacio de trabajo del mecanismo completo.

Además de que el método presenta un coste computacional inferior a aquellos de uso habitual, el hecho de calcular individualmente el espacio de trabajo de cada cadena, no sólo permite observar la influencia o el efecto de cada una de ellas en las fronteras del espacio de trabajo resultante, sino que posibilita caracterizar geoméricamente el tamaño y la forma del mismo en función de todos los parámetros dimensionales y la orientación del elemento terminal, lo que resulta de gran utilidad para el proceso de síntesis dimensional y optimización.

1. Introducción

Los robots paralelos o de cinemática paralela son sistemas caracterizados por un elemento terminal (plataforma móvil) que se conecta a un bastidor (plataforma fija) mediante un conjunto de cadenas cinemáticas. Esta arquitectura paralela hace que, en comparación con los robots series tradicionales, los robots paralelos presenten una mayor rigidez, un mejor comportamiento dinámico, una mayor capacidad de carga y una alta precisión [1]. Debido a estas características de gran interés práctico, los manipuladores paralelos se han hecho un hueco en la industria [2] y su uso se está extendiendo para cubrir un amplio abanico de aplicaciones que van desde simuladores de movimiento [3] y sistemas de posicionamiento para el sector aeronáutico [4], hasta dispositivos de rehabilitación [5].

Cuando se habla de manipuladores paralelos, se tiende a pensar en la clásica plataforma de Gough-Stewart de 6 grados de libertad (gdl) [6]. Sin embargo, en muchas de las aplicaciones mencionadas el número de gdl requerido es inferior a 6, siendo en dichos casos interesante emplear los denominados manipuladores paralelos de movilidad reducida. Estos mantienen las ventajas inherentes de los robots de arquitectura paralela, pero presentan un número inferior de gdl y, por ende, son más eficientes desde un punto de vista mecánico y de control.

A pesar de que la síntesis de los manipuladores paralelos de movilidad reducida es una tarea compleja, el número de diseños de este tipo ha ido creciendo significativamente a lo largo de las últimas décadas gracias a la cantidad de métodos de síntesis topológica que se han propuesto [7]. No obstante, la mayoría de estos métodos se han empleado principalmente para desarrollar manipuladores de 3 gdl, como por ejemplo el robot DELTA propuesto por Clavel [8], dejando de lado el diseño de manipuladores de 4 gdl [9].

En función del patrón de movimiento, los manipuladores paralelos de 4 gdl se pueden clasificar en 3 grupos: 3T1R, 2T2R y 1T3R, donde T y R hacen referencia al movimiento de traslación y rotación, respectivamente. De estos tres grupos, los manipuladores 2T2R son los menos investigados y, por tanto, el número de manipuladores paralelos de este tipo es escaso en la literatura. En la actualidad, sin embargo, existe una alta demanda de diseños mecánicos con un patrón de movimiento 2T2R ya que, en el ámbito de la rehabilitación [10], de la fabricación [11] e incluso de la industria aeroespacial [12] se requiere del uso de mecanismos capaces de generar dos traslaciones (2T) en un plano vertical y dos rotaciones (2R) en torno a ejes horizontales. La mayoría de los manipuladores 2T2R que han sido propuestos presentan uno o varios de los siguientes inconvenientes: su topología es compleja [13], contienen un elevado número de componentes [14] y/o deben satisfacer condiciones geométricas muy estrictas [15] que dificultan el montaje y el desarrollo de un prototipo.

Si bien los manipuladores paralelos se caracterizan por tener unas ventajas con respecto a los robots serie, también presentan una serie de desventajas entre las que destaca un espacio de trabajo, definido como el conjunto de posiciones y orientaciones que la plataforma móvil puede alcanzar, muy reducido y limitante. En consecuencia, el tamaño y la forma del mismo son dos factores críticos en su diseño [16]. Para manipuladores de más de 3 gdl no es posible representar completamente el espacio de trabajo, siendo necesario restringir o fijar varios de los gdl. En función del tipo de gdl que se restringen y se representan, se obtienen diferentes tipos de subespacios del mismo, siendo el espacio de trabajo traslacional (o de orientación constante) y rotacional (o de posición constante) los dos más habituales para manipuladores 2T2R y que se pueden obtener fijando la orientación o la posición de la plataforma móvil, respectivamente [17].

En la literatura existen diferentes métodos para calcular el espacio de trabajo teórico que, a grandes rasgos, se pueden dividir en tres tipos: métodos discretos, analíticos y geométricos. El primer tipo, discretiza el espacio, en variables de salida, con una malla donde los nodos representan las diferentes posiciones y orientaciones de la plataforma móvil. Para cada nodo, se resuelve el problema de posición inverso y se comprueba si la posición/orientación correspondiente pertenece o no al espacio de trabajo. Las referencias [18] y [19] son dos ejemplos en los que se utiliza este tipo de método. Las dos principales ventajas de los métodos discretos son su fácil implementación y su potencial para considerar todo tipo de restricciones (p. ej., interferencias entre barras o la limitación del rango de los pares cinemáticos). Sin embargo, presentan un elevado coste computacional y su precisión depende del tamaño de la malla.

Por su parte, los métodos *analíticos* consisten en obtener las expresiones algebraicas de las curvas o superficies que representan las fronteras del espacio de trabajo. Su coste computacional es inferior al de los métodos discretos y permiten representar con precisión las fronteras del espacio de trabajo. Sin embargo, los métodos de este tipo no se pueden generalizar ya que dependen de la arquitectura particular del robot que se está analizando. A modo de ejemplo, los autores de [20] y [21] utilizaron métodos analíticos para determinar las fronteras del espacio de trabajo rotacional y traslacional de manipuladores paralelos de baja movilidad.

Finalmente, los métodos *geométricos* calculan el espacio de trabajo de cada cadena cinemática por separado y posteriormente calculan su intersección para obtener el espacio de trabajo del manipulador completo. Además de proporcionar unos resultados precisos con un coste computacional reducido, proporcionan información valiosa sobre la influencia que tienen las dimensiones del mecanismo en el espacio de trabajo. No obstante, suelen requerir de un software de CAD para poder realizar la intersección entre las diferentes superficies geométricas [22]. Son

varios los investigadores que han utilizado este tipo de método para calcular el espacio de trabajo tanto de manipuladores de 6 gdl [23][24], como manipuladores de movilidad reducida [25][26].

En este contexto, el presente trabajo tiene una doble finalidad. Por un lado, presentar un nuevo manipulador paralelo 2T2R, junto con sus variantes topológicas, para paliar la escasez de diseños de este tipo que existen y que pueden emplearse para cubrir las aplicaciones mencionadas anteriormente. Y, por otro lado, proponer una metodología de carácter analítico-geométrica válida para obtener el espacio de trabajo de esta familia de manipuladores, que aúna las ventajas de ambos métodos (analíticos/geométricos) y permite caracterizar el efecto de los parámetros geométricos del mecanismo en la forma y tamaño del mismo, lo que resulta de interés para un posterior proceso de síntesis dimensional y de optimización.

2. Descripción del mecanismo y sus variantes

La Figura 1 muestra el mecanismo que se va a analizar en este trabajo. Se trata de un manipulador paralelo novedoso de 4 gdl formado por dos plataformas, una fija y otra móvil, unidas a través de cuatro cadenas cinemáticas. Las dos cadenas centrales ($i = 1, 3$) están compuestas por dos pares de rotación (R) y una junta universal (U), mientras que las cadenas laterales ($i = 2, 4$) están compuestas por un par de rotación y dos pares esféricos (S). Los cuatro pares R unidos a las plataforma fija o bastidor, son los pares actuados y, por tanto, la topología cinemática del mecanismo queda definida como $2\text{RRU}-2\text{RSS}$.

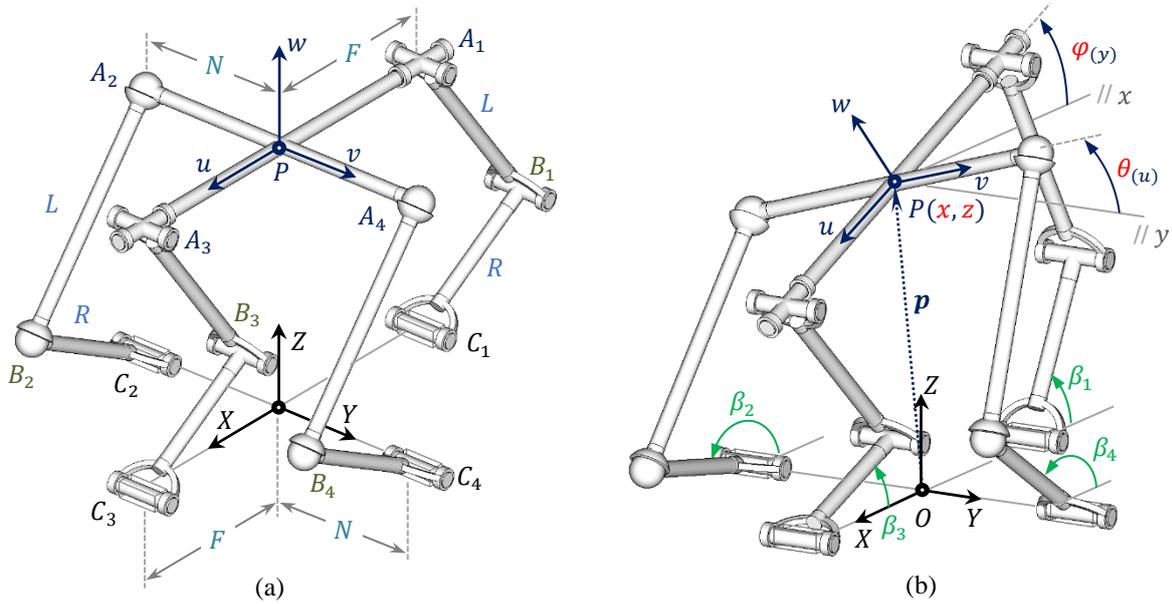


Figura 1: Manipulador paralelo 2RRU-2RSS: (a) parámetros geométricos (b) variables de entrada y salida.

Tal y como se muestra en la Figura 1, se hace uso de dos sistemas de referencia. El sistema de referencia fijo (O_{XYZ}) está situado en el centro del bastidor y el sistema de referencia móvil (P_{uvw}) está anclado a la plataforma móvil, donde el eje w apunta en la dirección normal a dicha plataforma y el eje u apunta a una de las juntas universales.

La posición de la plataforma viene definida por el vector $\mathbf{p} = [x, 0, z]^T$, mientras que su orientación se define a través de los ángulos φ y θ , que representan las rotaciones alrededor del eje Y y el eje u , respectivamente. Las dos coordenadas del punto P , punto de referencia de la plataforma móvil, y los dos ángulos de rotación anteriores conforman el vector de variables de salida $\mathbf{x} = [x, z, \varphi, \theta]^T$, que define por completo la posición y orientación del mecanismo e indica que los gdl del mismo son dos traslaciones (2T) a lo largo de los ejes X y Z , y dos rotaciones (2R) entorno a los ejes Y y u .

En cuanto a la nomenclatura de los pares cinemáticos, se empleará la letra C_i para hacer referencia a los pares actuados anclados al bastidor, la letra B_i para definir los pares intermedios y la letra A_i para los pares terminales, donde el subíndice i identifica la cadena cinemática. Asimismo, se utilizará el término de barras inferiores para hacer referencia a las barras que conectan los pares C_i y B_i , y el término de barras superiores a aquellas que conectan los pares B_i y A_i . El ángulo que forma la barra inferior de la cadena i con respecto al eje X se denotará como β_i , que conforma el vector de variables de entrada, $\mathbf{q} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]^T$. En la Figura 1b se pueden ver representadas las cuatro variables de entrada y las cuatro de salida.

En términos de movilidad, las cadenas centrales (RRU) son las únicas que imponen restricciones a la plataforma móvil y, por tanto, estas cadenas son las que definen su espacio de movimiento. En este sentido, cabe destacar que con sólo una cadena RRU ya sería suficiente para dotar al manipulador de los 4 gdl mencionados (2T2R) y que,

por el hecho de añadir una segunda cadena de este tipo, estamos introduciendo dos redundancias cinemáticas al manipulador. Estas redundancias se pueden eliminar simplemente sustituyendo una de las cadenas RRU por otra cadena RSS tal y como se muestra en los mecanismos de la segunda fila de la Figura 2, donde el manipulador RRU-3RSS ha sido recientemente analizado por los autores [27]. Se empleen una o dos cadenas RRU, para poder obtener el patrón de movimiento 2T2R deseado, es condición necesaria que los ejes de rotación de los pares R correspondientes a dicha/s cadena/s sean paralelos al eje Y , y el primer y el segundo eje, contados desde el bastidor, del par U sean paralelos a los ejes Y y u , respectivamente.

Por otra parte, las cadenas RSS no modifican el espacio de movimiento del manipulador, se emplean ya que tener cuatro cadenas cinemáticas en un manipulador paralelo de 4 gdl permite ubicar todos los actuadores en el bastidor, lo que reduce el consumo eléctrico, y facilita cumplir con otros requisitos de diseño de interés práctico como es incrementar la estabilidad del manipulador. Debido a la barra superior biarticulada, las cadenas RSS presentan un gdl inoperante que se puede evitar sustituyendo uno de los pares esféricos por una junta universal como se puede apreciar en las cuatro variantes de este manipulador que se recogen en las dos últimas columnas de la Figura 2. Esta última modificación no es relevante cuando las barras biarticuladas son rectas, pero resulta de gran utilidad cuando las barras superiores no lo son, ya que, en dicho caso, el giro incontrolado puede originar colisiones con otros elementos y es primordial su eliminación.

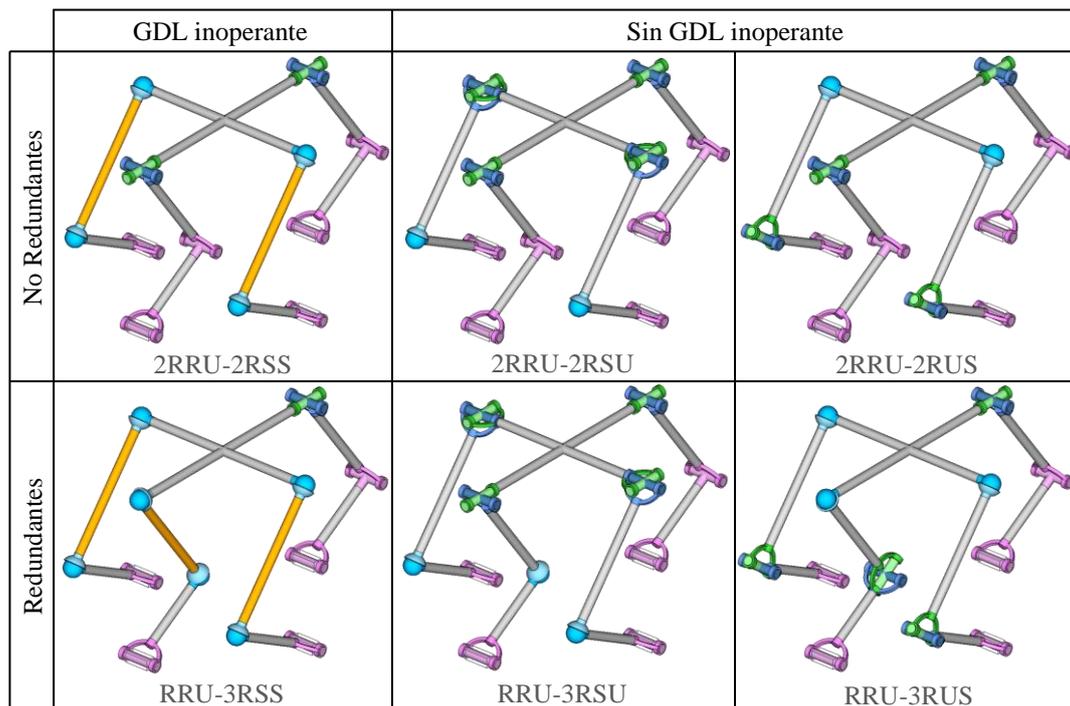


Figura 2: Variantes topológicas que conforman la familia de manipuladores novedosos de tipo 2T2R.

Asimismo, cabe remarcar el interés práctico de realizar un análisis cinemático del mecanismo 2RRU-2RSS presentado en este trabajo, ya que los resultados del mismo son extrapolables a otros mecanismos cinemáticos equivalentes, como los mostrados en la Figura 2. Estos mecanismos son variantes del 2RRU-2RSS y la utilidad de emplear uno u otro depende del uso que se les quiera dar. Así, por ejemplo, para aquellas aplicaciones que requieran dotar al manipulador de una mayor rigidez, a expensas de aumentar la dificultad de montaje, resulta de interés trabajar con alguno de los tres mecanismos con restricciones redundantes de la primera fila.

Desde un punto de vista de fabricación, resulta más económico trabajar con elementos de mismas dimensiones. Es por ello, que se va a realizar el estudio asumiendo que todas las barras inferiores son de longitud R , todas las superiores de longitud L y que el tamaño de la plataforma móvil y fija van a ser idénticas con una dimensión central $2F$ y una lateral de valor $2N$. Luego, además de una topología simétrica, el manipulador presentará una simetría dimensional.

3. Metodología de cálculo

A continuación, se describe la metodología propuesta para el cálculo del espacio de trabajo de la familia de manipuladores presentados en el apartado anterior. La metodología se basa en el hecho de que las fronteras del espacio de trabajo teórico de un manipulador representan el lugar geométrico de sus singularidades del problema de posición inverso y que, a su vez, estas están condicionadas por las singularidades de cada una de las cadenas cinemáticas por separado.

Para calcular las singularidades de cada cadena, en primer lugar, se plantean las coordenadas de los pares cinemáticos que componen el mecanismo, posteriormente se describe la naturaleza geométrica del problema de posición inverso que, si bien no es necesario resolver, su significado físico resulta fundamental para identificar la expresión del lugar geométrico de las singularidades. Seguido, y en base a las expresiones anteriores, se calcula el espacio de trabajo de cada cadena. Finalmente, se obtiene el espacio de trabajo del manipulador completo a través de la intersección de los espacios de trabajo de todas sus cadenas.

3.1. Coordenadas de los pares cinemáticos

Atendiendo a la nomenclatura de los parámetros geométricos y las variables de entrada-salida mostrados en el apartado anterior, se pueden expresar las coordenadas de los pares cinemáticos. La obtención de las coordenadas de los pares actuados C_i es directa ya que su ubicación es fija y de valor:

$$C_1 = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -N \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Por su parte, las coordenadas de los pares intermedios B_i se pueden expresar en función de los ángulos de entrada (β_i). Evidentemente aquí intervienen también las dimensiones de la plataforma fija (N, F) y las longitudes de las barras inferiores (R):

$$B_1 = \begin{bmatrix} -F - R \cos \beta_1 \\ 0 \\ R \sin \beta_1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -R \cdot \cos \beta_2 \\ -N \\ R \cdot \sin \beta_2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} F - R \cdot \cos \beta_3 \\ 0 \\ R \cdot \sin \beta_3 \end{bmatrix} \quad B_4 = \begin{bmatrix} -R \cdot \cos \beta_4 \\ N \\ R \cdot \sin \beta_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Finalmente, se pueden obtener las coordenadas de los pares terminales A_i , en función de las variables de salida (x, z, φ, θ) y de las dimensiones de la plataforma móvil (N, F) empleando la ecuación siguiente:

$$A_i = \mathbf{p} + \mathbf{Rot} \cdot \mathbf{a}_i^T \quad (3)$$

Donde el vector \mathbf{a}_i define la posición de los pares terminales en el sistema de referencia móvil y \mathbf{Rot} es una matriz de rotación que relaciona el sistema de referencia móvil con el sistema de referencia fijo, cuya expresión, mostrada en la Ecuación (4), se consigue aplicando una rotación φ entorno al eje Y y una rotación θ entorno al eje u .

$$\mathbf{Rot} = \mathbf{Rot}_\varphi \cdot \mathbf{Rot}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \cdot \sin \theta & \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \cdot \sin \theta & \cos \varphi \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sustituyendo los valores de cada término en la Ecuación (3), se obtienen las coordenadas de A_i en el sistema referencia fijo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} x - F \cos \varphi \\ 0 \\ z + F \sin \varphi \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} x - N \sin \varphi \sin \theta \\ -N \cos \theta \\ z - N \cos \varphi \sin \theta \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} x + F \cos \varphi \\ 0 \\ z - F \sin \varphi \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} x + N \sin \varphi \sin \theta \\ N \cos \theta \\ z + N \cos \varphi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.2. Naturaleza geométrica del problema de posición inverso

Una vez se tienen las coordenadas de los pares terminales, se pueden plantear las cuatro ecuaciones de posición $e_i(x, z, \varphi, \theta, \beta_i) = 0$ simplemente imponiendo la restricción geométrica de que la distancia entre los pares B_i y A_i es igual a la longitud de la barra superior i , que para el manipulador presentado es L . En aras de reducir la extensión de las expresiones matemáticas, a partir de este punto, se empleará la simbología s y c para abreviar las funciones seno y coseno, respectivamente.

$$\begin{aligned} e_1 &\equiv (x - F \cdot c\varphi + F + R \cdot c\beta_1)^2 + (z + F \cdot s\varphi - R \cdot s\beta_1)^2 = L^2 \\ e_2 &\equiv (x - N \cdot s\varphi \cdot s\theta + R \cdot c\beta_2)^2 + (N - N \cdot c\theta)^2 + (z - N \cdot c\varphi \cdot s\theta - R \cdot s\beta_2)^2 = L^2 \\ e_3 &\equiv (x + F \cdot c\varphi - F + R \cdot c\beta_3)^2 + (z - F \cdot s\varphi - R \cdot s\beta_3)^2 = L^2 \\ e_4 &\equiv (x + N \cdot s\varphi \cdot s\theta + R \cdot c\beta_4)^2 + (N - N \cdot c\theta)^2 + (z + N \cdot c\varphi \cdot s\theta - R \cdot s\beta_4)^2 = L^2 \end{aligned} \quad (6)$$

El problema de posición inverso consiste en obtener las variables de entrada (β_i) en función de las variables de salida (x, z, φ, θ), es decir, en determinar los valores de los actuadores o la configuración de cada cadena para poder alcanzar una posición/orientación determinada de la plataforma móvil. Tal y como se puede ver en la Ecuación (6), se trata de un problema matemáticamente desacoplado y, en consecuencia, la ecuación asociada a cada cadena se puede resolver de manera independiente. A pesar de que la resolución del mismo no presenta mayor dificultad, computacionalmente resulta costoso resolver el problema varias veces con el fin de determinar el espacio de trabajo, lo cual suele ser habitual en los métodos discretos de cálculo. No obstante, a diferencia de este tipo de métodos, el carácter geométrico que presenta la metodología propuesta hace que no sea necesario resolver el problema inverso de posición para definir las fronteras del espacio de trabajo.

Esto se debe a que, dada la naturaleza de las cadenas, el problema inverso se puede plantear a través de un enfoque geométrico que sustituye cada una de las ecuaciones anteriores por dos circunferencias, cuya intersección, representa las coordenadas de los pares intermedios B_i . Y es que, definidos los valores de las variables de salida, se tienen las coordenadas de los pares terminales A_i empleando la Ecuación (5). Como las coordenadas de los pares C_i son fijas, al quedar definidas por las dimensiones del mecanismo, el problema de posición inverso consistiría simplemente en obtener las coordenadas de los pares intermedios B_i , a partir de los cuales se pueden obtener las variables de entrada (véase Ecuación (2)).

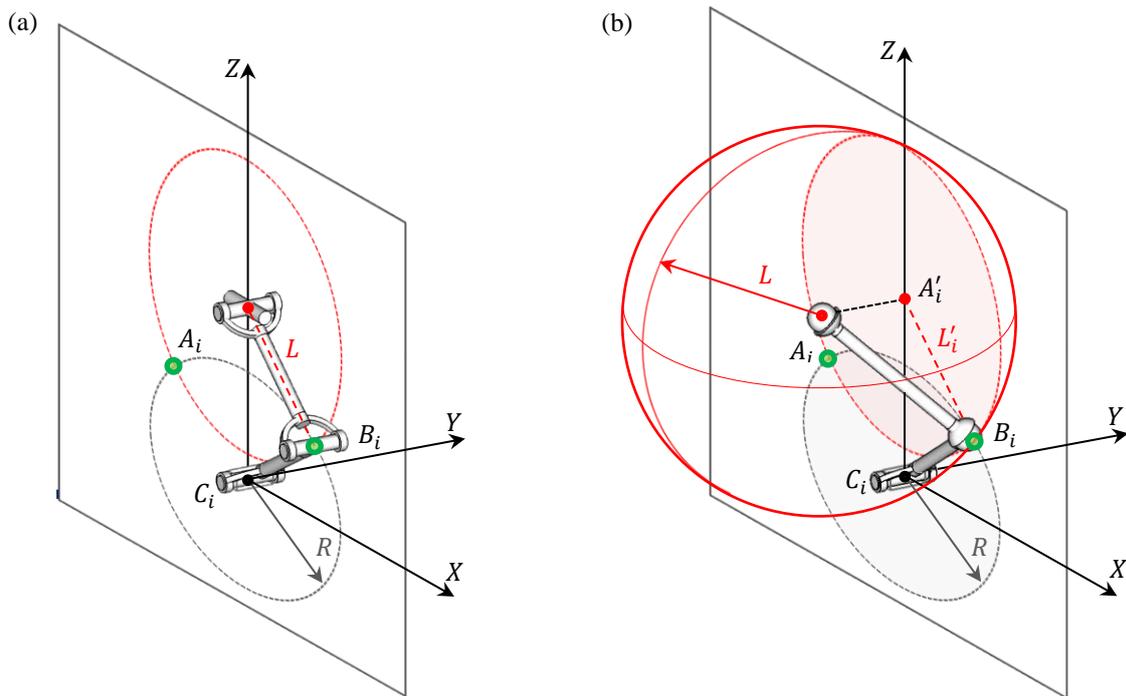


Figura 3: Enfoque geométrico del problema de posición inverso para las (a) cadenas RRU y (b) cadenas RSS.

Por una parte, para las cadenas RRU las posibles posiciones de B_i vendrán dadas por los dos puntos de intersección de la circunferencia de centro C_i y radio R , y la circunferencia de centro A_i y radio L . Tal y como se puede observar en la Figura 3a, ambas están contenidas en el plano XZ . Por otra parte, para las cadenas RSS, las posibles posiciones de B_i vendrán dadas por los dos puntos de intersección entre una circunferencia y una esfera de centros y radios iguales que las circunferencias de las cadenas RRU. Sin embargo, como se ilustra en la Figura 3b, es posible transformar la esfera, a través de proyecciones, en una circunferencia de radio L'_i y centro A'_i , permitiendo realizar un enfoque idéntico (i.e., intersección circunferencia-circunferencia) para las cuatro cadenas cinemáticas.

A'_i es la proyección del punto A_i sobre el plano paralelo a XZ que contiene la barra inferior de la cadena i , mientras que la longitud L'_i se puede obtener a través de la construcción gráfica de la Figura 3b, cuya expresión viene dada por la siguiente ecuación:

$$A'_i = [A_{ix}, C_{iy}, A_{iz}]^T \quad L'_i = \sqrt{L^2 - \|A_i A'_i\|^2} \quad (7)$$

3.3. Lugar geométrico de las singularidades del problema inverso

El lugar geométrico de las singularidades del problema inverso representa el conjunto de posiciones y orientaciones en las que al menos una de las cadenas está completamente plegada o extendida y, en consecuencia, en ellas el manipulador pierde un grado de libertad.

Desde un punto de vista matemático, la singularidad representa la convergencia de dos soluciones reales del problema de posición inverso en una única solución de doble multiplicidad. Para la familia de manipuladores propuestos la singularidad ocurre siempre que una pareja de circunferencias, asociadas a la misma cadena cinemática, se vuelven mutuamente tangentes. Bajo esta condición geométrica, la distancia entre los centros de las circunferencias es igual a la suma o resta de sus radios, es decir, $\|\vec{C}_i A'_i\| = |R \pm L'_i|$. Donde el signo positivo indica que las dos circunferencias quedan a ambos lados del punto de tangencia (cadenas extendidas), mientras que el signo negativo indica una tangencia interna (cadenas plegadas), como se ve en la Figura 4.

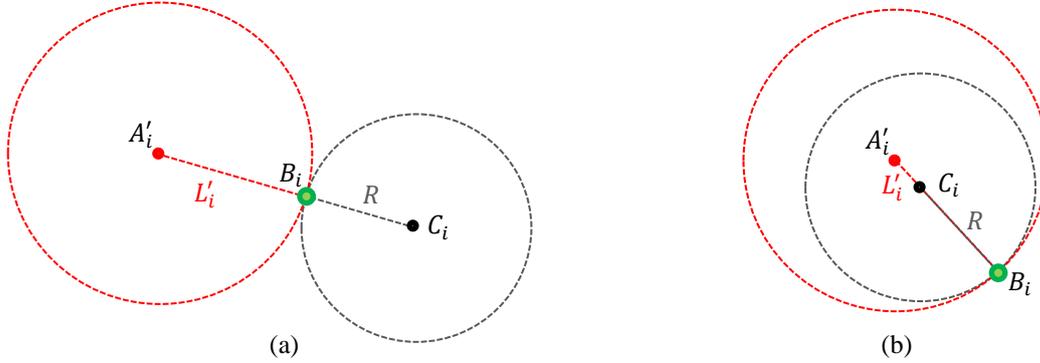


Figura 4: Condición geométrica de una singularidad debido a una (a) extensión o (b) plegado de la cadena i .

En consecuencia, si se impone la condición de distancia a las cuatro cadenas que componen el mecanismo, se puede obtener la expresión analítica del lugar geométrico de las singularidades correspondiente a cada una de ellas o, en otras palabras, la expresión de las fronteras de sus espacios de trabajo. Utilizando el símbolo η_i para denotar la ecuación de distancia para la cadena i , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \eta_{1\pm} &\equiv \sqrt{(x + F \cdot (1 - c\varphi))^2 + (z + F \cdot s\varphi)^2} = |R \pm L| \\
 \eta_{3\pm} &\equiv \sqrt{(x - F \cdot (1 - c\varphi))^2 + (z - F \cdot s\varphi)^2} = |R \pm L| \\
 \eta_{2\pm} &\equiv \sqrt{(x - N \cdot s\varphi \cdot s\theta)^2 + (z - N \cdot c\varphi \cdot s\theta)^2} = |R \pm \sqrt{L^2 - N^2 \cdot (1 - c\theta)^2}| \\
 \eta_{4\pm} &\equiv \sqrt{(x + N \cdot s\varphi \cdot s\theta)^2 + (z + N \cdot c\varphi \cdot s\theta)^2} = |R \pm \sqrt{L^2 - N^2 \cdot (1 - c\theta)^2}|
 \end{aligned} \tag{8}$$

De las expresiones anteriores se puede apreciar cómo $\eta_{1\pm}$ y $\eta_{3\pm}$ no dependen del giro θ , lo cual concuerda con el hecho de que todas las barras de las cadenas centrales (RRU) están restringidas a permanecer dentro del plano XZ. Por esta misma razón, las longitudes L'_1 y L'_3 coinciden directamente con la longitud de las barras superiores (L).

La intersección de las cuatro regiones del espacio que encierran las superficies/curvas dadas por cada $\eta_{i\pm}$, permite obtener el espacio de trabajo del manipulador completo. Al tener el mecanismo 4 gdl, su espacio de trabajo es una entidad tetradimensional, no siendo posible su representación completa. Para el presente estudio se ha decidido trabajar, en primera instancia, con orientaciones constantes de la plataforma móvil y, por tanto, con el objetivo de obtener el espacio de trabajo bidimensional conocido como espacio de trabajo traslacional.

3.4. Cálculo del espacio de trabajo traslacional

Si se fija la orientación de la plataforma móvil, las variables de salida φ y θ son constantes. En consecuencia, reordenando las expresiones $\eta_{i\pm}$ del apartado anterior considerando x y z como las únicas variables incógnita, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \eta_{1\pm}(x, z) &\equiv (x + \sigma_{cx})^2 + (z + \sigma_{cz})^2 = r_c^2 & \eta_{3\pm}(x, z) &\equiv (x - \sigma_{cx})^2 + (z - \sigma_{cz})^2 = r_c^2 \\
 \eta_{2\pm}(x, z) &\equiv (x + \sigma_{lx})^2 + (z + \sigma_{lz})^2 = r_l^2 & \eta_{4\pm}(x, z) &\equiv (x - \sigma_{lx})^2 + (z - \sigma_{lz})^2 = r_l^2
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \sigma_{cx} &= F \cdot (1 - c\varphi) & \sigma_{cz} &= F \cdot s\varphi & r_c &= (R \pm L) \\
 \sigma_{lx} &= -N \cdot s\varphi \cdot s\theta & \sigma_{lz} &= -N \cdot c\varphi \cdot s\theta & r_l &= (R \pm \sqrt{L^2 - N^2 \cdot (1 - c\theta)^2})
 \end{aligned} \tag{10}$$

Las expresiones $\eta_{i\pm}(x, z)$ corresponden con 4 parejas de circunferencias, una por cadena cinemática, de radio r_c y centro $(\sigma_{cx}, \sigma_{cz})$ para las cadenas centrales, y de radio r_l y centro $(\sigma_{lx}, \sigma_{lz})$ para las cadenas laterales. Las dos circunferencias asociadas a una misma cadena, que no deben confundirse con las de la Figura 4, son concéntricas y sus radios vienen determinados por el signo \pm . Por tanto, el espacio de trabajo de cada cadena estará definido por la región anular limitada por las posiciones singulares derivadas de su ecuación $\eta_{i\pm}(x, z)$.

Con el fin de obtener el espacio de trabajo del manipulador, se emplea un programa de desarrollo propio en MATLAB que calcula la suma, resta e intersección de distintas regiones circulares y que, por tanto, permite obtener la intersección de las regiones anulares de cada cadena.

Para el manipulador en cuestión, primero se calculan los cuatro círculos que encierran las circunferencias de singularidad asociadas a posiciones en las que las cadenas están estiradas ($\eta_{i+}(x, z)$). A continuación, se realiza la intersección de todos ellos. Finalmente, al resultado de la intersección, se le resta el área circular que encierran las circunferencias de singularidad asociadas a las posiciones en las que las cadenas están plegadas ($\eta_{i-}(x, z)$).

En la Figura 5 se muestra un ejemplo del espacio de trabajo resultante (coloreado en gris) junto con las circunferencias de singularidad de cada cadena (identificada por distintos colores), tanto por estar las mismas estiradas (línea continua) o plegadas (línea discontinua), para unas dimensiones (R, L, N, F) y una orientación genérica del mecanismo.

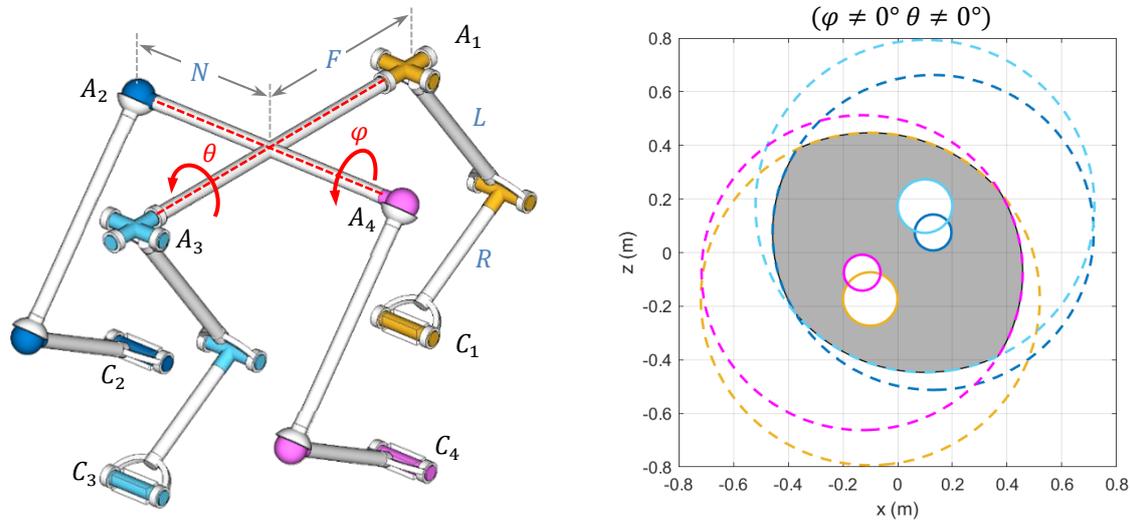


Figura 5: Espacio de trabajo del manipulador (en gris) delimitado por las curvas de singularidad de cada cadena para una orientación arbitraria de la plataforma móvil. Líneas continuas/discontinuas = cadena plegada/extendida.

4. Caracterización geométrica del espacio de trabajo traslacional

El hecho de calcular el espacio de trabajo usando la metodología del apartado anterior (intersección del espacio de trabajo de cada cadena cinemática por separado) permite ver la influencia que tiene cada una de ellas en su tamaño y forma. Teniendo en cuenta las expresiones de los centros y radios de las circunferencias de singularidad asociadas a cada cadena (véase Ecuación (10)), se puede deducir que el efecto de cada una dependerá tanto de las dimensiones como de la orientación del manipulador.

En la práctica, lo habitual es que la orientación de la plataforma móvil del manipulador varíe durante el movimiento, mientras que las dimensiones de las barras y plataformas se mantienen fijas. Es por ello que para el manipulador 2RRU-2RSS propuesto, se ha creído conveniente separar la caracterización de su espacio de trabajo en función de las cuatro formas en las que se puede orientar su plataforma móvil.

4.1. Rotación nula

En el caso de que la plataforma móvil no presente ningún giro o rotación ($\varphi = \theta = 0^\circ$) esta será paralela a la plataforma fija. Para este caso particular, las cuatro parejas de circunferencias, asociadas a cada cadena, están solapadas y centradas en el origen del espacio de trabajo traslacional. La Figura 6 muestra esta particularidad, donde se recuerda que las líneas continuas (i) y discontinuas (ii) permiten discernir, respectivamente, entre las singularidades causadas por el pliegue o extensión de, al menos, una cadena cinemática.

Este solapamiento entre circunferencias significa que todas las cadenas alcanzan una singularidad del problema inverso simultáneamente e, indirectamente, implica que, para unas dimensiones dadas, el espacio de trabajo teórico del manipulador encierra la mayor área posible.

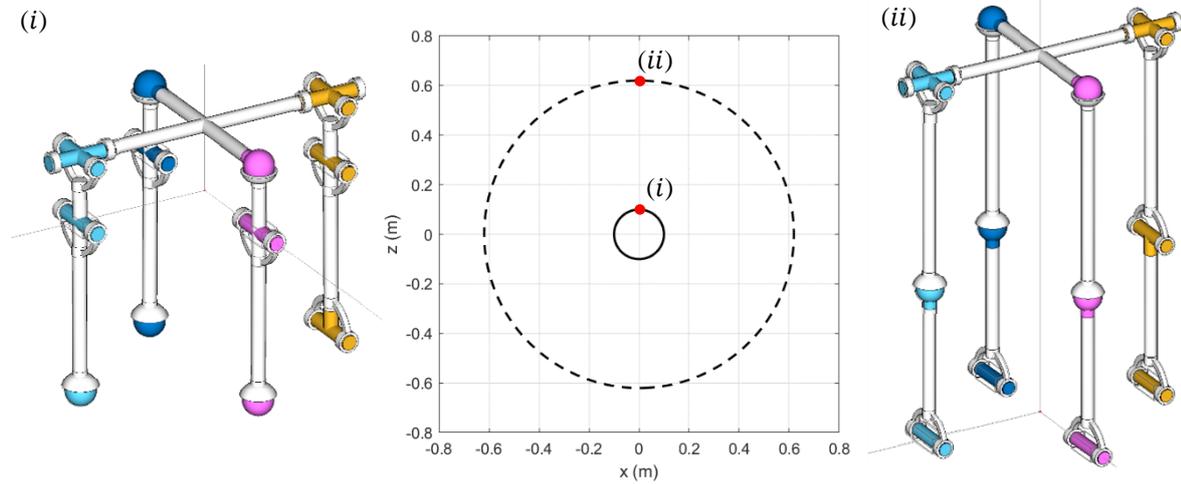


Figura 6: Solape de las cuatro parejas de circunferencias de singularidad para un caso de rotación nula. El lugar geométrico de las singularidades de cada cadena presenta su color, pero por el solape se han dibujado en negro.

Para una rotación nula, el radio de las circunferencias externas es $R + L$ y el de las internas es $|R - L|$. Teniendo esto en cuenta, es obvio deducir que para que se dé el solapamiento entre las curvas de singularidad, las longitudes de las barras superiores e inferiores de las cuatro cadenas deben ser las mismas. No obstante, además de estas longitudes, el solapamiento también depende de que las dimensiones de la plataforma móvil y fija sean iguales. Esto último no es tan obvio, y su demostración requiere trabajar con la proyección de la geometría del manipulador 2RRU-2RSS en el plano XZ (plano de representación del espacio de trabajo traslacional).

Dentro de este plano, todas las cadenas se comportan como si fueran brazos robóticos RRR. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con las cadenas del conocido manipulador paralelo 5R [26], donde cada una presenta un espacio de trabajo anular centrado en su par fijo, la presencia de una plataforma móvil, en lugar de un punto acoplador, hace que la posición del centro de la región anular dependa de la geometría y orientación de la plataforma móvil. En concreto, el desplazamiento del centro con respecto al par fijo (C_i) viene dado por el vector $(\overline{A_i P})_{XZ}$ que representa la proyección en el plano XZ de la dimensión lateral/central de la plataforma móvil.

La Figura 7a muestra la influencia de las dimensiones de la plataforma móvil para la cadena 1 en un caso de rotación nula. De la Figura 7b, se puede observar que para la otra cadena central (cadena 3) el efecto sería el mismo pero de sentido contrario, es decir $(\overline{A_1 P})_{XZ} = -(\overline{A_3 P})_{XZ}$, y que las cadenas laterales (se ven superpuestas) se comportan como las cadenas de un manipulador plano 5R, ya que $(\overline{A_2 P})_{XZ} = (\overline{A_4 P})_{XZ} = 0$ y, por ende, el efecto de la plataforma es nulo en ellas si no hay rotación.

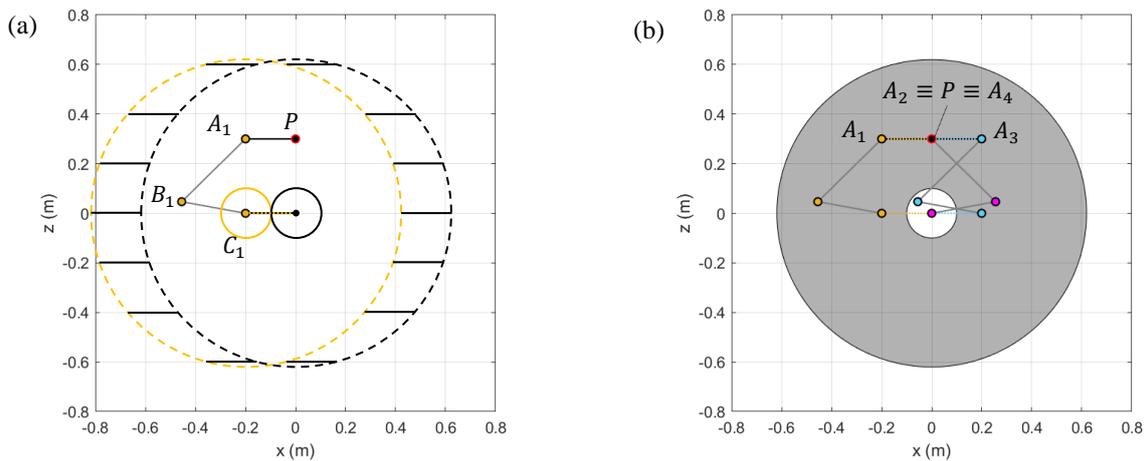


Figura 7: Influencia de las dimensiones de la plataforma móvil en la ubicación del centro del espacio de trabajo traslacional para (a) la primera cadena cinemática y (b) para el manipulador entero.

Luego, de esto se puede concluir que, si se rompe la simetría dimensional de las cadenas y plataformas, el solapamiento desaparecería y aparecerían más huecos o cavidades en el espacio de trabajo. En este sentido, cabe destacar que, si la longitud de la barra inferior y superior de una misma cadena fueran iguales, la cavidad circular asociada a dicha cadena degeneraría en un punto. Es decir, si $R = L$ las cuatro cavidades circulares darían lugar a cuatro puntos.

4.2. Rotación pura entorno al eje Y

Cuando la plataforma móvil sólo presenta una inclinación φ entorno al eje Y ($\theta = 0^\circ$), el único cambio con respecto al caso de rotación nula es la ubicación de los centros de las circunferencias asociadas a las cadenas centrales ($i = 2,4$), lo cual tiene sentido ya que son las únicas que se mueven para este tipo de movimiento. Tal y como se puede ver en la Figura 8a, los centros de estas cadenas sufren un desplazamiento simétrico que les aparta del origen una distancia d_i a lo largo de una recta de inclinación δ_i respecto del eje vertical Z. Tanto la distancia que se han desplazado del centro como el valor de la inclinación de la recta que los contiene vienen recogidos en la primera columna de la Tabla 1. Destacar también que, en este caso, todas las circunferencias internas/externas presentan unos radios idénticos.

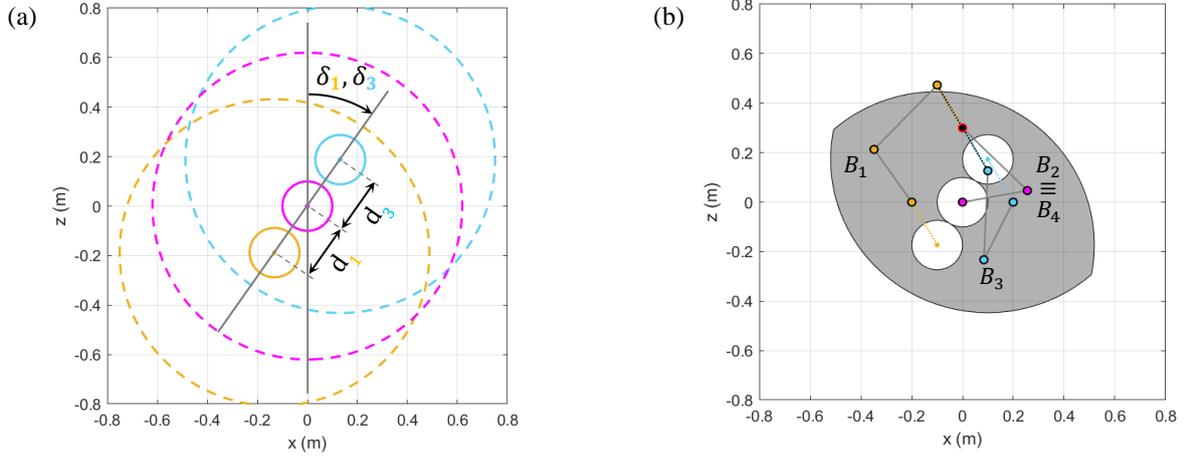


Figura 8: (a) Circunferencias de singularidad y (b) espacio de trabajo para un caso genérico de rotación pura φ .

Tabla 1: Desplazamiento (d_i) de los centros de las circunferencias y su inclinación (δ_i) respecto de eje vertical.

	$\varphi \neq 0^\circ, \theta = 0^\circ$	$\varphi = 0^\circ, \theta \neq 0^\circ$	$\varphi \neq 0^\circ, \theta \neq 0^\circ$
d_1, d_3	$2F \sin(\varphi/2)$	0	$2F \sin(\varphi/2)$
d_2, d_4	0	$N \sin \theta$	$N \sin \theta$
δ_1, δ_3	$\varphi/2$	0	$\varphi/2$
δ_2, δ_4	0	0	φ

Tal y como se puede apreciar en la Figura 8b, la ubicación de los centros de las circunferencias se podría haber obtenido directamente considerando la geometría del manipulador en el plano XZ como se hizo para el caso de rotación nula. De hecho, para el presente caso, el comportamiento, en términos de singularidades del problema inverso, es equivalente al de un manipulador paralelo plano 3-RRR con los pares cinemáticos terminales y fijos colineales como el propuesto en [28].

Como ahora sólo se solapan las circunferencias de las cadenas laterales, puede haber un máximo de tres cavidades dentro del espacio de trabajo (que en ausencia de simetría podrían convertirse en cuatro). Si bien, estas pueden quedar fuera del espacio de trabajo resultante para ciertos giros como se puede ver en la Figura 9.

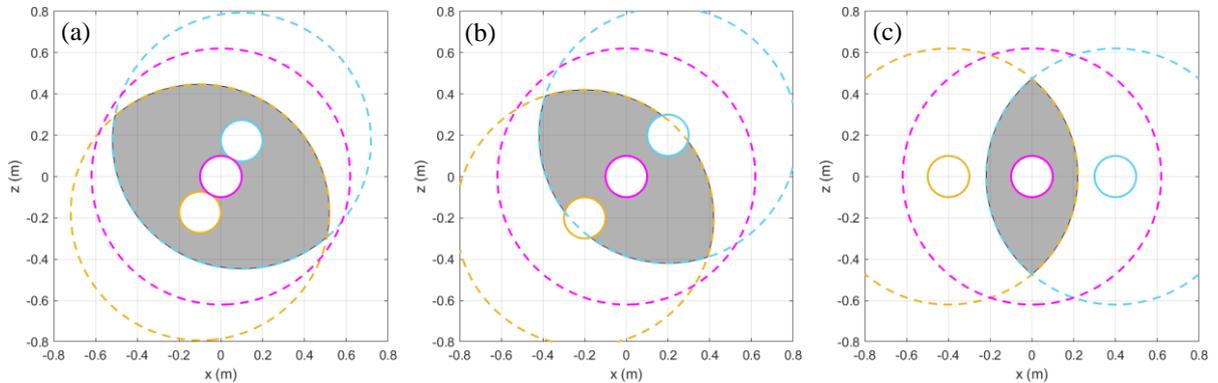


Figura 9: Espacio de trabajo traslacional para (a) $\varphi = 60^\circ$, (b) 90° y (c) 180° ($R = 0.26m, L = 0.36m$).

4.3. Rotación pura entorno al eje u

Por el contrario, cuando la plataforma móvil sólo presenta un giro θ entorno al eje u ($\varphi = 0^\circ$), las cadenas laterales ($i = 2,4$) son las únicas involucradas en el movimiento, siendo sus centros los que se desplazan. En concreto, se alejan simétricamente una distancia d_i a lo largo del eje vertical Z (véase segunda columna de la Tabla 1). Para

este caso las circunferencias internas/externas de las cadenas laterales y centrales presentan radios diferentes que dependen del valor del giro θ como se vio en la Ecuación (10). De dicha ecuación se pueden extraer otras dos conclusiones. La primera es que para un ratio $L/N < 2$ existen valores del ángulo θ para las que el término dentro de la raíz de la expresión de r_l se hace negativo y, por tanto, no es posible superar dicho valor. La segunda es que, a diferencia del caso de rotación nula y el caso de un giro φ puro, las cavidades circulares correspondientes a las cadenas laterales no degeneran en puntos cuando estas están compuestas de barras inferiores y superiores del mismo tamaño.

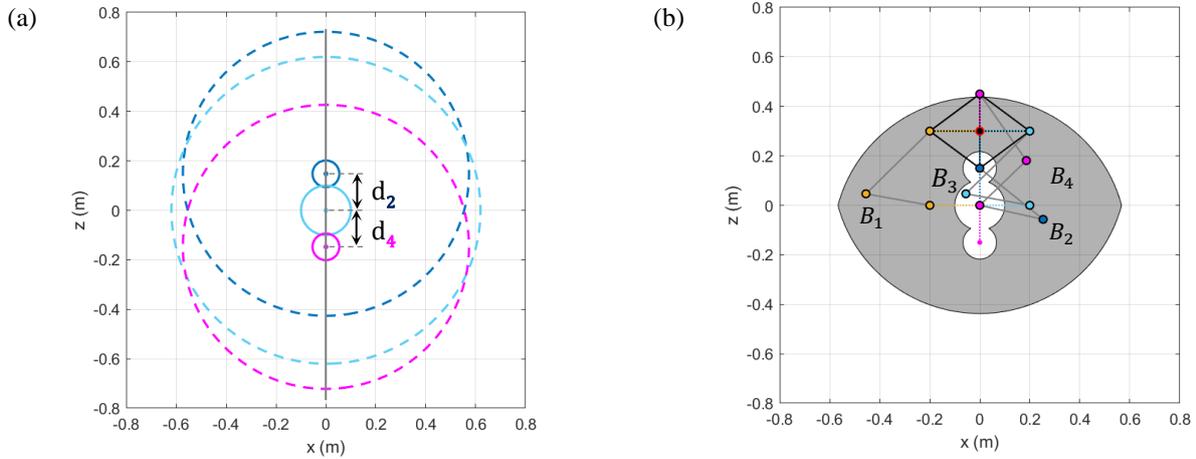


Figura 10: (a) Circunferencias de singularidad y (b) espacio de trabajo para un caso genérico de rotación pura θ .

Como se puede apreciar en la Figura 10b, también se podría haber obtenido la ubicación de los centros de las circunferencias considerando la geometría del manipulador en el plano XZ . Para este caso, al solaparse las circunferencias de las cadenas centrales, puede haber un máximo de tres cavidades circulares (véase Figura 11).

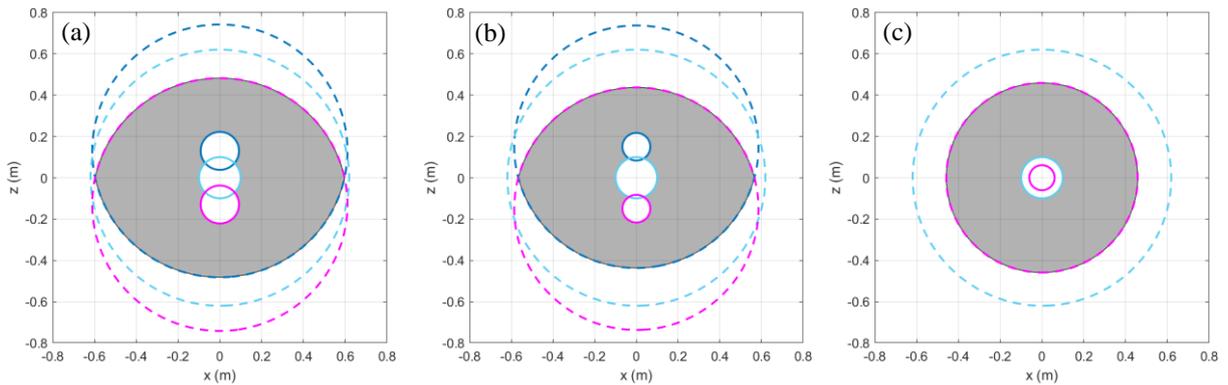


Figura 11: Espacio de trabajo traslacional para (a) $\theta = 60^\circ$, (b) 90° y (c) 180° ($R = 0.26m$, $L = 0.36m$).

4.4. Rotación combinada

Cuando la plataforma presenta una rotación combinada ($\varphi \neq 0^\circ, \theta \neq 0^\circ$), las circunferencias de singularidad y el espacio de trabajo presentan un aspecto similar al que se obtendría de combinar los correspondientes a las rotaciones puras, con la salvedad de que ahora los centros de las circunferencias laterales se encuentran en una recta que forma un ángulo $\delta_{2,4}$ con la vertical como se muestra en la Figura 12a. Los valores de inclinación y distancia se recogen en la tercera columna de la Tabla 1.

De la Figura 12a se puede apreciar cómo, independientemente de que haya simetría dimensional o no, para una rotación combinada de la plataforma móvil no hay ningún tipo de solape entre circunferencias y que, por lo general, habrá un total de cuatro cavidades circulares.

Tras este análisis quedan patentes las tres ventajas principales de emplear la metodología propuesta:

- Calcular el espacio de trabajo teórico con un coste computacional inferior al de los tradicionales métodos discretos, pudiendo definir las fronteras del mismo de manera precisa.
- Proporcionar información sobre el efecto de cada cadena cinemática en el espacio de trabajo.
- Caracterizar el aspecto y tamaño de dicho espacio en función de las variables que definen la geometría y la orientación del mecanismo.

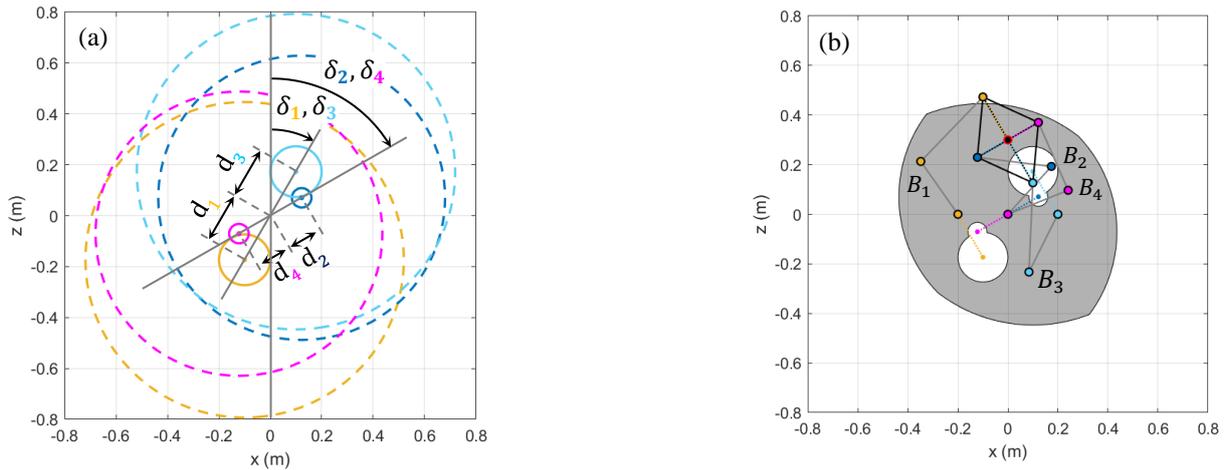


Figura 12: (a) Circunferencias de singularidad y (b) espacio de trabajo para un caso de rotación combinada.

5. Conclusiones

Se ha presentado un novedoso manipulador paralelo simétrico con un patrón de movimiento 2T2R que es ampliamente solicitado en el ámbito industrial, aeroespacial y de rehabilitación. Se ha propuesto una metodología de carácter analítico-geométrico que permite obtener el espacio de trabajo de este manipulador, así como el de sus variantes topológicas. La metodología está basada en la obtención de las expresiones analíticas de las singularidades del problema inverso y permite observar la influencia que tiene cada cadena cinemática en el espacio de trabajo teórico, así como caracterizar su tamaño y forma en función de las variables dimensionales y la orientación del mecanismo. Estas características permiten concluir que el método planteado es una herramienta útil para la fase de diseño del manipulador y, en concreto, para la optimización de su síntesis dimensional. Si bien es cierto que para el proceso de optimización es necesario trabajar con el espacio de trabajo útil (i.e., aquel que tiene en cuenta las singularidades del problema directo, colisiones entre elementos, etc.), la metodología aquí propuesta se puede emplear como primer paso de dicho proceso. Esto permitiría aprovechar sus ventajas y, posteriormente, realizar los cálculos correspondientes a los otros factores limitantes, pero ya en una zona acotada del espacio en variables de salida.

Según los resultados de este trabajo se observa que, desde el punto de vista de las singularidades del problema inverso, interesa disponer de cadenas y plataformas de dimensiones idénticas. No obstante, los autores pretenden extender este estudio, analizando el impacto de la simetría dimensional en las singularidades del problema directo, ya que estas últimas serán las que realmente limiten el espacio de trabajo útil del manipulador. Por tanto, en aras de completar este trabajo, una extensión del mismo será la implementación de las expresiones analíticas de otras restricciones mecánicas, así como el de las singularidades del problema directo que son críticas para las tareas de control y necesarias de identificar para una correcta planificación de trayectorias. Finalmente, también será objeto de estudio la aplicación de esta metodología al espacio de trabajo rotacional, lo que permitirá alcanzar una caracterización completa del manipulador.

6. Agradecimientos

Los autores desean agradecer la financiación recibida para el proyecto PDC2022-133787-100 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y por la Unión Europea Next Generation EU/PRTR, para el proyecto PID2023-150982OB-100 financiado por MCIU/AEI/10.13039/501100011033/FEDER, UE, y para el proyecto 2018222013 financiado por el Gobierno Vasco.

7. Referencias

- [1] Merlet J.- P., *Parallel Robots*, vol. 128, Springer, Netherlands (2006)
- [2] Pierrot F., Nabat V., Company O., Krut S., Poignet P., “Optimal Design of a 4-DOF Parallel Manipulator: From Academia to Industry”, *IEEE Transactions on Robotics* **25**(2), 213–224 (2009)
- [3] Chen Z., Song J., Li N., Yan W., Zhao C., “Design and dynamics modeling of a novel 2R1T 3-DOF parallel motion simulator”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering* **45**, 234 (2023)
- [4] Sun J., Shao L., Fu L., Han X., Li S., “Kinematic analysis and optimal design of a novel parallel pointing mechanism”, *Aerospace Science and Technology* **104**, 105931 (2020)

- [5] Li J. *et al.*, “Mechanical Design and Performance Analysis of a Novel Parallel Robot for Ankle Rehabilitation”, *Journal of Mechanisms and Robotics* **12(5)**, 1–17 (2020)
- [6] Stewart D., “A Platform with Six Degrees of Freedom”, *Proc. Inst. Mech. Eng.* **180(1)**, 371–386, (1965)
- [7] Ye W., Li Q., “Type Synthesis of Lower Mobility Parallel Mechanisms: A Review”, *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **32(1)**, 38 (2019)
- [8] Clavel R., “DELTA, a fast robot with parallel geometry”, *Proceedings of the 18th International Symposium on Industrial Robots*, 91–100 (1988)
- [9] Huang Z., Li Q. C., “General Methodology for Type Synthesis of Symmetrical Lower-Mobility Parallel Manipulators and Several Novel Manipulators”, *Int. J. Rob. Res.* **21(2)**, 131–145 (2002)
- [10] Diego P. *et al.*, “Devices for Gait and Balance Rehabilitation: General Classification and a Narrative Review of End Effector-Based Manipulators”, *Applied Sciences* **14(10)**, 4147 (2024)
- [11] Ghaffari H., Payeganeh G., Arbabtafti M., “Kinematic design of a novel 4-DOF parallel mechanism for turbine blade machining”, *International Journal of Advance Manufacturing Technology* **74**, 729–739 (2014)
- [12] Qi Y., Zhang L., “Configuration design and kinematics analysis of foldable composite space capture mechanism”, *Advances in Mechanical Engineering* **15(8)**, 1–14, (2023)
- [13] Fang H.-R., Liu P.-F., Yang H., Jiang B.-S., “Design and Analysis of a Novel 2T2R Parallel Mechanism with the Closed-loop Limbs”, *International Journal of Automation and Computing* **18(4)**, 654–666 (2021)
- [14] Ye W., Li Q., Chai X., “Type Synthesis of 4-DOF Non-Overconstrained Parallel Mechanisms with Symmetrical Structures”, *Machines* **10(12)**, 1123, (2022)
- [15] Li Q., Huang Z., “Type synthesis of 4-DOF parallel manipulators”, *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation* **1**, 755–760 (2003)
- [16] Altuzarra O., Pinto C., Sandru B., Hernandez A., “Optimal Dimensioning for Parallel Manipulators: Workspace, Dexterity, and Energy”, *Journal of Mechanical Design* **133(4)**, 041007 (2011)
- [17] Merlet J.-P., Gosselin C. M., Mouly N., “Workspaces of planar parallel manipulators”, *Mechanism and Machine Theory* **33(1-2)**, 7–20 (1998)
- [18] Herrero S., Pinto C., Altuzarra O., Diez M., “Workspace Study of the 2PRU- 1PRS Parallel Manipulator”, in *14th World Congress in Mechanism and Machine Science IFToMM*, 344–351 (2015)
- [19] Bonev I. A., Ryu J., “A new approach to orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators”, *Mechanism and Machine Theory* **36(1)**, 15–28 (2001)
- [20] Bonev I. A., Gosselin C. M., “Analytical determination of the workspace of symmetrical spherical parallel mechanisms”, *IEEE Transactions on Robotics*, **22(5)**, 1011–1017 (2006)
- [21] Di Gregorio R., Zanforlin R., “Workspace analytic determination of two similar translational parallel manipulators”, *Robotica* **21(5)**, 555-565 (2003)
- [22] Aboulissane B., El Haiek D., El Bakkali L., El Bahaoui J., “On The Workspace Optimization of Parallel Robots Based on CAD Approach”, *Procedia Manufacturing* **32**, 1085–1092 (2019)
- [23] Gosselin C. M., “Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators”, *Journal of Mechanical Design* **112(3)**, 331–336 (1990)
- [24] Kim D. J., Chung W. K., Youm Y., “Geometrical approach for the workspace of 6-DOF parallel manipulators”, *Proceedings of International Conference on Robotics and Automation* **4**, 2986–2991 (1997)
- [25] Russo M., Ceccarelli M., “A geometrical formulation for the workspace of parallel manipulators”, *Robotica* **40(8)**, 2581–2591 (2022)
- [26] Bihari B., Kumar D., Jha C., Rathore V. S., Dash A. K., “A geometric approach for the workspace analysis of two symmetric planar parallel manipulators”, *Robotica* **34(4)**, 738–763 (2016)
- [27] Diego P. *et al.*, “Kinematic and Workspace Analysis of RRU-3RSS: A Novel 2T2R Parallel Manipulator”, *Applied Sciences* **14(20)**, 9491 (2024)
- [28] Gosselin C.M., Wang J., “Singularity loci of planar parallel manipulators with revolute actuators”, *Robotics and Autonomous Systems* **21(4)**, 377-398 (1997)