



Acerca del vínculo entre la síntesis topológica y la síntesis dimensional de mecanismos

A. Noriega González¹, I. Fernández de Bustos², V. García-Marina², G. Urkullu³

¹ Departamento de Construcción e Ingeniería de Fabricación, Universidad de Oviedo, noriegaalvaro@uniovi.es

² Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad del País Vasco, igor.fernandezdebustos@ehu.eus,
vanessa.garcia@ehu.eus

³ Departamento de Matemática Aplicada, Universidad del País Vasco, gorka.urkullu@ehu.eus

El problema de la síntesis de mecanismos es un viejo conocido de la teoría de máquinas y mecanismos, siendo prácticamente simultáneo al nacimiento de esta ciencia. A pesar de ello, ha sufrido un desarrollo mucho menos intenso que el análisis, estando algunos de sus campos como son la síntesis topológica y la dimensional aparentemente desconectados.

En este trabajo se plantea, a través de un ejemplo, el problema de la síntesis dimensional con condiciones de posición y se analiza hasta obtener una “inecuación de síntesis” la cual tiene dos usos principales:

- 1. Conocido el mecanismo, permite determinar el número de constantes dimensionales, posiciones y condiciones de síntesis que podría llegar a admitir, es decir, permite acotar la síntesis dimensional.*
- 2. Conocidas las posiciones y condiciones de síntesis deseadas, permite decidir si un mecanismo determinado podría llegar a cumplirlas, es decir, actúa como un filtro para la síntesis topológica.*

Teniendo en cuenta lo anterior, se concluye que la inecuación de síntesis representa el vínculo entre la síntesis dimensional y la síntesis topológica. Dicha inecuación es general y válida para mecanismos planos y tridimensionales, soporta el caso de que exista un número distinto de condiciones de síntesis para posiciones sucesivas y permite explicar la naturaleza de soluciones a problemas de síntesis conocidos (como, por ejemplo, el mecanismo de Peaucellier-Lipkin para trazar trayectorias con curvatura constante).

1. Introducción

El problema de la síntesis de mecanismos ha estado tradicionalmente dividido en dos grandes campos: las síntesis topológicas o cualitativas y las síntesis analíticas o cuantitativas [1]. La síntesis topológica se aplica al inicio del proceso de diseño de un mecanismo, cuando se parte de una hoja en blanco y solo se conocen las especificaciones del mecanismo, y se encarga de proporcionar mecanismos con potencial para resolver el problema de síntesis planteado. Este es un proceso para el que no hay un procedimiento de uso general bien establecido. Una forma muy habitual de encontrar una solución es utilizar un atlas de mecanismos [2] o una base de datos de mecanismos [3] sobre la que se aplica un filtrado. Este filtrado puede tener diferentes naturalezas, en función de las condiciones adicionales que se le desean imponer al mecanismo, pudiendo dar lugar a subtipos de síntesis topológica como la síntesis de número o síntesis de tipo [1]. La inclusión de este filtrado es una forma de buscar los mecanismos más adecuados de entre un número muy elevado de posibilidades, buscando una solución en cierto modo subóptima.

La síntesis analítica se aplica sobre el mecanismo proporcionado por la síntesis topológica y trata de valorar, de manera cuantitativa, la calidad de una solución de manera que ayude al diseñador a tomar una decisión sobre si es adecuada o no. Este tipo de síntesis suele llevar aparejado un procedimiento iterativo de análisis y replanteo de la solución que puede estar regido o no por un algoritmo. Un subtipo muy habitual es la síntesis dimensional de mecanismos cuyo objetivo es la determinación de las proporciones de los eslabones de un mecanismo para lograr los movimientos deseados [1]. Este subtipo aglutina una amplia variedad de métodos [4,5] que van desde las síntesis gráficas hasta las síntesis que utilizan métodos numéricos para resolver el problema de optimización numérica asociado a la síntesis dimensional.

La aplicación secuencial de los dos grandes tipos de síntesis indicados, la topológica y la analítica, durante el proceso de diseño ha dado lugar a una aparente desconexión en la bibliografía entre los desarrollos que se llevan a cabo en los dos campos. En este trabajo se pretende establecer una conexión entre estos dos tipos de síntesis partiendo de un planteamiento bien conocido de síntesis dimensional del que se extraerá un criterio cuantitativo que permitiría realizar un filtrado tanto en la propia síntesis dimensional como en la síntesis topológica.

2. Modelado mediante coordenadas dependientes y planteamiento del problema de síntesis dimensional con condiciones de posición

Sin pérdida de generalidad, y para una mejor comprensión, se planteará un ejemplo clásico y bien conocido de síntesis dimensional cinemática con condiciones de posición [1]. En concreto, se planteará una síntesis de generación de trayectoria sobre el mecanismo de cuatro barras biarticuladas mostrado en la Figura 1. Se desea que el punto E pase por una serie de n_p posiciones de síntesis. En cada posición de síntesis, se conocerá el valor de las coordenadas del punto E (x_E e y_E).

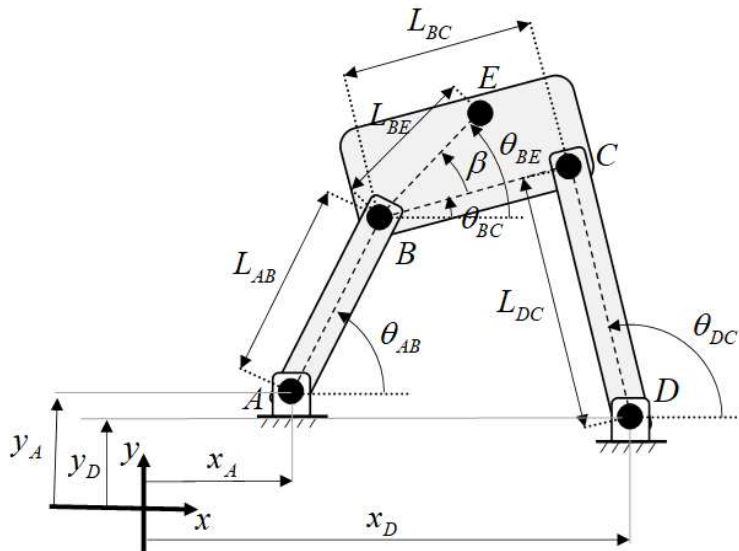


Figura 1: Mecanismo utilizado para desarrollar el ejemplo de síntesis

Se ha escogido realizar el modelado de la cinemática del problema mediante coordenadas dependientes [6] ya que es muy metódico y facilita los recuentos de ecuaciones de restricción, coordenadas y constantes que serán necesarias para el análisis posterior. En este ejemplo, y para mecanismos planos, el uso de coordenadas mixtas aporta simplicidad mientras que para mecanismos espaciales existen otras alternativas mejores como puede ser el

uso de cuaterniones [7]. También se pueden realizar modelados alternativos con elementos finitos [8]. La elección del tipo de modelado simplemente afecta a la simplicidad del planteamiento, no a la validez de la metodología que se está desarrollando.

En el ejemplo planteado, se han escogido las coordenadas dependientes indicadas en el vector $\mathbf{q}^i$ de la expresión (1) y las constantes dimensionales indicadas en el vector $\mathbf{b}$ de la expresión (2).

$$\mathbf{q}^i = [x_B^i \ y_B^i \ x_C^i \ y_C^i \ x_E^i \ y_E^i \ \theta_{AB}^i \ \theta_{BC}^i \ \theta_{BE}^i \ \theta_{DC}^i]^T \quad (1)$$

$$\mathbf{b} = [x_A \ y_A \ x_D \ y_D \ L_{AB} \ L_{BC} \ L_{BE} \ L_{DC} \ \beta] \quad (2)$$

De (1) se extrae que el número de coordenadas dependientes del problema es $n_q=10$ y de (2) se extrae que el máximo número de constantes dimensionales que tiene el mecanismo es $n_{bmax}=9$.

A continuación, pueden plantearse las n_r ecuaciones de restricción geométrica para cada posición de síntesis, como se muestra en (3). El superíndice i corresponde a la posición de síntesis y se aplica a las coordenadas del vector de posición $\mathbf{q}^i$ mientras que el vector $\mathbf{b}$ se mantiene constante para todas las posiciones. En el caso del ejemplo, $n_r=9$.

$$\forall i \in 1, 2, \dots, n_p \quad \mathbf{G}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} x_B^i - x_A - L_{AB} \cdot \cos \theta_{AB}^i \\ y_B^i - y_A - L_{AB} \cdot \sin \theta_{AB}^i \\ x_C^i - x_B - L_{BC} \cdot \cos \theta_{BC}^i \\ y_C^i - y_B - L_{BC} \cdot \sin \theta_{BC}^i \\ x_E^i - y_B - L_{BE} \cdot \cos \theta_{BE}^i \\ y_E^i - y_B - L_{BE} \cdot \sin \theta_{BE}^i \\ x_C^i - x_D - L_{DC} \cdot \cos \theta_{DC}^i \\ y_C^i - y_D - L_{DC} \cdot \sin \theta_{DC}^i \\ \theta_{BE}^i - \theta_{BC}^i - \beta \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Además, en cada posición de síntesis se pueden plantear las n_d ecuaciones de restricción funcional que modelan las condiciones de síntesis exigidas. En el caso del ejemplo tratado, serían las $n_d=2$ ecuaciones que se muestran en la expresión (4) y que representan la definición de la posición del punto E. Las constantes numéricas asociadas a las condiciones de síntesis vendrán definidas por el vector $\mathbf{c}^i$ para cada posición.

$$\forall i \in 1, 2, \dots, n_p \quad \mathbf{F}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}, \mathbf{c}^i) = \begin{bmatrix} x_E^i - x_{E-deseada}^i \\ y_E^i - y_{E-deseada}^i \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Agrupando las ecuaciones de restricción geométrica y funcional, cada posición de síntesis quedará definida por el conjunto de ecuaciones indicado en la expresión (5).

$$\forall i \in 1, 2, \dots, n_p \quad \Phi^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}, \mathbf{c}^i) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) \\ \mathbf{F}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}, \mathbf{c}^i) \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

Considerando las ecuaciones de restricción en todas las posiciones, se puede plantear la expresión (6):

$$\begin{bmatrix} \Phi^1(\mathbf{q}^1, \mathbf{b}, \mathbf{c}^1) \\ \Phi^2(\mathbf{q}^2, \mathbf{b}, \mathbf{c}^2) \\ \vdots \\ \Phi^{n_p}(\mathbf{q}^{n_p}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^{n_p}) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \quad \text{con } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^{n_p} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^1 \\ \mathbf{c}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}^{n_p} \end{bmatrix} \quad (6)$$

En relación al sistema de ecuaciones (6) que modela el problema de síntesis hay que considerar que, dado que las ecuaciones involucradas pueden ser no lineales en su gran mayoría, el problema podría no tener una solución real en función de las ecuaciones de restricción o de las posiciones y condiciones de síntesis exigidas. Por eso, en [6] se plantea la función objetivo (7):

$$\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \cdot \Phi^T(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (7)$$

Y se busca obtener una solución de mínimos cuadrados del problema de síntesis minimizando esta función respecto a los vectores $\mathbf{q}$ y $\mathbf{b}$. Esto se logra calculando el gradiente de la función (7) e igualándolo a cero, obteniendo la expresión (8). En dicha expresión, $\mathbf{J}$ es la matriz jacobiano respecto a los vectores $\mathbf{q}$ y $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 \quad \text{con} \quad \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) & \Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor de (8) y sustituyendo, se llega a la expresión iterativa (9) que es la que permitiría obtener la solución óptima al problema de síntesis dimensional.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_k - (\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{J}^T(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))^{-1}_k \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c})_k \cdot \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{b}, \mathbf{c})_k \quad (9)$$

3. Inecuación de síntesis y usos de la misma

El método iterativo planteado se puede considerar un método de Newton ya que está guiado por la matriz Jacobiano $\mathbf{J}$. Este método tiene convergencia local y el óptimo al que converge viene determinado por la aproximación inicial de la solución que se le proporciona. Si bien no se puede asegurar que el problema de síntesis planteado tenga una solución real exacta (donde el valor de la función (7) sería cero), el método planteado debería proporcionar una solución real en cada iteración dado que, en cada paso, estaría resolviendo un problema lineal. Por lo tanto, se deben estudiar las condiciones bajo las cuales el problema lineal asociado a la iteración del método de Newton tiene solución real y exacta, es decir, donde todas las ecuaciones del problema lineal son iguales a cero. En concreto, se deben estudiar las condiciones en las que se asegura la existencia de $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T)^{-1}$.

La matriz es $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T$ es cuadrada, tiene dimensiones $(n_r + n_d) \cdot n_p \times (n_r + n_d) \cdot n_p$ y debe tener rango completo para poder invertirse, es decir, que todas sus filas deben ser linealmente independientes. Como consecuencia, la matriz $\mathbf{J}$ también debe de tener todas sus filas linealmente independientes.

La matriz $\mathbf{J}$ es rectangular con dimensiones $(n_r + n_d) \cdot n_p \times n_q \cdot n_p + n_b$, siendo $n_b \leq n_{bmax}$ dado que puede fijarse el valor de algunas constantes dimensionales y, como consecuencia, el número de constantes dimensionales desconocidas que tiene el problema de síntesis disminuirá. Entonces, para que exista una solución real y exacta del problema lineal, la matriz $\mathbf{J}$ debe ser cuadrada, o rectangular con más columnas que filas, y con todas sus filas linealmente independientes. Considerando las dimensiones de la matriz $\mathbf{J}$, indicadas al inicio de este párrafo, esto se puede expresar de manera simplificada con la expresión (10).

$$(n_r + n_d) \cdot n_p \leq n_q \cdot n_p + n_b \quad (10)$$

La expresión (10) se puede dividir en ambos lados por n_p (que siempre será un número natural y mayor que cero, porque representa el número de posiciones de síntesis) y reordenar el resultado como se muestra en (11) dando lugar a la inecuación de síntesis. En el miembro de la izquierda están los índices que dependen del modelado del mecanismo (número de ecuaciones de restricción geométrica n_r y número de coordenadas dependientes n_q) mientras que el miembro de la derecha están los índices que definen las condiciones de síntesis (número de posiciones de síntesis n_p y condiciones de síntesis en cada posición n_d) y el número de constantes dimensionales que se consideran desconocidas en el modelado (n_b). Este último parámetro está acotado superiormente por el modelado (n_{bmax}) pero puede ser ajustado en ese rango por el diseñador para facilitar la resolución del problema de síntesis, permitiendo más holgura entre los miembros izquierdo y derecho de la expresión 10, por lo que, en cierto modo, es dependiente de las especificaciones de síntesis.

$$n_r - n_q \leq \frac{n_b}{n_p} - n_d \quad (11)$$

Si no se cumple la inecuación de síntesis, el problema lineal asociado a la iteración del método de Newton no tendrá solución real y exacta y, como consecuencia, no se puede asegurar que se pueda alcanzar una solución local al problema de síntesis utilizando la expresión (9). Teniendo en cuenta lo anterior, se puede afirmar que el cumplimiento de la inecuación de síntesis es una condición necesaria para poder encontrar una solución óptima al problema de síntesis (que no tiene porqué ser obligatoriamente exacta) utilizando la expresión (9) pero no es una condición suficiente porque, como se verá posteriormente, lo que realmente define el número de filas independientes de la matriz $\mathbf{J}$ es su rango, el cual será igual o menor que el número de filas de dicha matriz. Ambos números serán diferentes en una configuración singular del mecanismo, y en dicho caso, la expresión (9) no podrá utilizarse.

La inecuación (11) tiene dos usos principales:

- Conocido el mecanismo, se puede determinar fácilmente tanto el número de ecuaciones de restricción geométrica n_r como el número de coordenadas dependientes n_q que hacen falta para realizar su modelado, quedando completamente definido el miembro izquierdo de la inecuación de síntesis. Y, a continuación,

se puede determinar si una combinación de posiciones n_p y condiciones de síntesis n_d , junto con un subconjunto de las constantes dimensionales del vector $\mathbf{b}$, cumplirían dicha inecuación de síntesis. En caso afirmativo, se podrá obtener una solución real y exacta del problema linealizado, lo que aseguraría que se pueda alcanzar un óptimo local del problema de síntesis. Esto no significa que el problema de síntesis tenga una solución exacta si no que la solución encontrada tendrá un error mínimo. La principal ventaja de este uso es que permitiría eliminar, mediante un sencillo filtrado que puede realizarse de manera automatizada, los conjuntos de posiciones y/o condiciones de síntesis que incumplan la inecuación de síntesis, ahorrando el trabajo de resolver el problema de síntesis dimensional para comprobarlo. En el ejemplo planteado, si se consideran como modificables las 9 constantes dimensionales del vector $\mathbf{b}$, el problema admitiría hasta un máximo de 9 posiciones de síntesis. También se puede comprobar la validez de este uso analizando problemas clásicos de síntesis gráfica como el del guiado de biela en un mecanismo de cuatro barras biarticuladas, el cual admite hasta 3 posiciones de síntesis [1] coincidiendo con lo predicho por la inecuación (11).

- Conocidas las posiciones y condiciones de síntesis, las cuales definen en gran medida el miembro derecho de la inecuación de síntesis, se puede determinar si un determinado mecanismo, del cual se conocen el número de ecuaciones de restricción geométrica y el número de coordenadas dependientes, cumple la inecuación de síntesis. Al igual que en el uso anterior, esto permitiría filtrar y eliminar los mecanismos que no cumplen la inecuación de síntesis, permitiendo centrar la atención en los que si la cumplen. En el ejemplo planteado, si se establecen 10 posiciones de síntesis, se concluye que el mecanismo propuesto no es válido para dar respuesta exacta al problema planteado.

Conviene aclarar que el cumplimiento de la inecuación de síntesis es una condición necesaria para la aplicación del método

4. Tratamiento de casos especiales

Tal y como sugiere García de Jalón [6] se pueden incorporar distintas condiciones de síntesis (cantidad y tipo) en cada posición. Esto llevaría a una expresión más general de la inecuación de síntesis, la cual se muestra en la expresión (12).

$$\sum_{i=1}^{i=n_p} (n_r + n_d^i) \leq n_q \cdot n_p + n_b \quad (12)$$

Otra cuestión interesante es el tratamiento de las configuraciones singulares que puede aparecer en una posición de síntesis. Para tener esto en cuenta, debe sustituirse el recuento manual de ecuaciones de restricción por el cálculo del rango de la matriz jacobiano de las ecuaciones de restricción correspondientes a cada posición de síntesis. Teniendo esto en cuenta, la inecuación de síntesis (12) pasaría a escribirse como se indica en la expresión (13):

$$\sum_{i=1}^{i=n_p} (rang(\mathbf{J}^i) + n_d^i) \leq n_q \cdot n_p + n_b \quad (13)$$

Esta situación es posible aunque no deseable por lo que para realizar el filtrado se puede utilizar la expresión (11) o (12) y, una vez obtenida la solución al problema de síntesis, hacer una comprobación del rango de la matriz jacobiano de las ecuaciones de restricción en cada posición de síntesis. La expresión (13), si bien es más general que la expresión (12), no tiene la misma utilidad práctica de cara al diseño porque el recuento de ecuaciones de restricción geométrica n_r es sencillo y puede hacerse antes de la resolución del problema mientras que la expresión (13) solo puede aplicarse después de resolver el problema de síntesis, como criterio de validación.

Si se desea obtener una trayectoria continua de manera exacta, se puede interpretar que el número de posiciones de síntesis n_p tiende a infinito. Entonces, el primer término del miembro derecho de la expresión (11) pasa a ser 0 y la inecuación de síntesis degenera en la expresión (14).

$$n_r + n_d \leq n_q \quad (14)$$

La expresión (14) cobra sentido si se obliga a que el número de condiciones de síntesis en una posición sea igual que la movilidad del mecanismo en esa posición, dando lugar a (15), ecuación bien conocida [9] que describe la relación necesaria para poder realizar el análisis cinemático en posiciones sucesivas de un mecanismo, siendo n_z el número de coordenadas independientes.

$$n_r + n_z = n_q \quad (15)$$

Esto sugiere que se puede interpretar el problema del análisis cinemático en posiciones sucesivas como un caso particular del problema de síntesis dimensional con condiciones de posición. Y que, en este caso, el cumplimiento de ciertas condiciones de síntesis es la consecuencia de la elección de unas proporciones muy determinadas entre

las constantes dimensionales del mecanismo, que dan lugar a un caso particular. Un ejemplo de esto es el mecanismo de Peaucellier-Lipkin, donde el mismo mecanismo de un grado de libertad es capaz de trazar arcos de curva con radios constantes y diferentes en función de las proporciones entre las longitudes de sus barras [10].

Finalmente, la expresión (11) también soporta la introducción de restricciones funcionales adicionales que limiten el rango en el que puede variar una coordenada o una constante dimensional como las mostradas en [11] dado que, por cada nueva ecuación de restricción, aparece una nueva variable auxiliar independiente. Si la restricción adicional acota el valor que puede tomar una constante dimensional, la inecuación (10) se convierte en la inecuación (16) siendo n_a el número de ecuaciones de restricción adicionales y de variables auxiliares asociadas a las mismas. Si la ecuación de restricción adicional acota el valor de una coordenada asociada a una posición, la inecuación (10) se convierte en la inecuación (17).

$$(n_r + n_d) \cdot n_p + n_a \leq n_q \cdot n_p + n_b + n_a \quad (16)$$

$$(n_r + n_d + n_a) \cdot n_p \leq (n_q + n_a) \cdot n_p + n_b \quad (17)$$

Dado que la derivada de la ecuación de restricción adicional solo depende de la nueva variable auxiliar, no podrá generar una fila en la matriz $\mathbf{J}$ que sea linealmente dependiente de las demás y, como consecuencia, la matriz $\mathbf{J}$ seguirá teniendo rango completo y las inecuaciones (16) y (17) tendrá la misma validez que la inecuación (10).

5. Ejemplos de uso

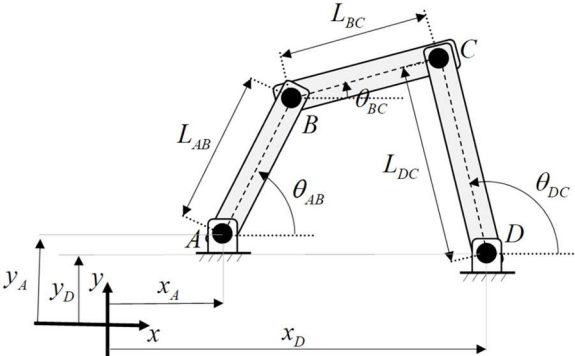
Con el fin de mostrar el uso de la inecuación de síntesis en la práctica se van a plantear tres problemas de síntesis sobre dos mecanismos diferentes, cuya solución es conocida y servirá para comprobar la validez del planteamiento.

5.1. Síntesis de generación de función sobre un mecanismo RRRR

Se desea realizar una coordinación entre el movimiento del eslabón de entrada AB de un mecanismo de cuatro barras biarticuladas y el movimiento del eslabón de salida DC, ambos articulados al bastidor. En la Figura 2 se puede observar el modelado de la cinemática de dicho mecanismo en coordenadas mixtas.

$$\mathbf{G}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} x_B^i - x_A - L_{AB} \cdot \cos \theta_{AB}^i \\ y_B^i - y_A - L_{AB} \cdot \sin \theta_{AB}^i \\ x_C^i - x_B - L_{BC} \cdot \cos \theta_{BC}^i \\ y_C^i - y_B - L_{BC} \cdot \sin \theta_{BC}^i \\ x_C^i - x_D - L_{DC} \cdot \cos \theta_{DC}^i \\ y_C^i - y_D - L_{DC} \cdot \sin \theta_{DC}^i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{q}^i = [x_B^i \ y_B^i \ x_C^i \ y_C^i \ \theta_{AB}^i \ \theta_{BC}^i \ \theta_{DC}^i]^T$$

$$\mathbf{b} = [x_A \ y_A \ x_D \ y_D \ L_{AB} \ L_{BC} \ L_{DC}]$$


$$\mathbf{F}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}, \mathbf{c}^i) = \begin{bmatrix} \theta_{AB}^i - \theta_{AB_des}^i \\ \theta_{DC}^i - \theta_{DC_des}^i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Figura 2: Modelado para la síntesis de generación de función sobre un mecanismo RRRR

Se puede observar que $n_r=6$, $n_q=7$, $n_{bmax}=7$ y $n_d=2$. Introduciendo estos valores en la expresión (11) y dejando libres las 7 componentes del vector $\mathbf{b}$, se obtiene que se podrían admitir hasta 7 posiciones de síntesis ($n_p=7$).

Para comprobar la validez de la inecuación, se puede comparar con el método de Freudenstein [12], el cual modela la posición con la expresión (18):

$$K_1 \cdot \cos \theta_{DC}^i - K_2 \cdot \cos \theta_{AB}^i - K_3 = \cos(\theta_{DC}^i - \theta_{AB}^i) \quad (18)$$

siendo

$$K_1 = \frac{L_{AD}}{L_{AB}} \quad K_2 = \frac{L_{AD}}{L_{DC}} \quad K_3 = \frac{L_{AD}^2 + L_{DC}^2 + L_{AB}^2 - L_{BC}^2}{2 \cdot L_{AB} \cdot L_{DC}}$$

La expresión (18) tiene 3 incógnitas (los valores de K_1 , K_2 y K_3). Si se desea calcular su valor, se necesitan 3 ecuaciones (una por cada posición de síntesis) y, como consecuencia, el máximo número de posiciones de síntesis admitidas es de 3.

Para que el planteamiento con la inecuación de síntesis refleje con precisión el problema que resuelve el método de Freudenstein, hay que añadirle las restricciones funcionales indicadas en (19), las cuales relacionan los valores de las constantes dimensionales.

$$\begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \\ x_D &= x_A + L_{AD} \\ y_D &= y_A \end{aligned} \quad (19)$$

Entonces, el planteamiento de la inecuación de síntesis queda como se muestra en la expresión (20).

$$\begin{aligned} (n_r + n_d) \cdot n_p + n_a &\leq n_q \cdot n_p + n_b \\ (6 + 2) \cdot n_p + 4 &\leq 7 \cdot n_p + 7 \rightarrow n_p = 3 \end{aligned} \quad (20)$$

Ambos métodos son coherentes a la hora de analizar cuantas posiciones de síntesis puede admitir el problema planteado. La diferencia radica en la forma de encontrarlas. El modelado de la cinemática en coordenadas mixtas utilizado para plantear la inecuación de síntesis permite determinar directamente todas las posibilidades de diseño de mecanismo (las 7 posiciones de síntesis como máximo) y luego, reducirlas planteando restricciones adicionales. Usando el método de Freudenstein se llegaría a las mismas posibilidades totales al añadir posteriormente un escalado, un desplazamiento y una rotación de la solución.

5.2. Síntesis de guiado de biela sobre un mecanismo RRRR

Sobre el mecanismo de la Figura 2, se desea realizar ahora un guiado de la biela BC. Los vectores de ecuaciones de restricción geométrica $\mathbf{G}$, de coordenadas dependientes $\mathbf{q}$ y de constantes dimensionales $\mathbf{b}$ son los mismos que en el ejemplo anterior. Las ecuaciones de restricción funcional serán ahora las mostradas en la expresión (21).

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}, \mathbf{c}^i) = \begin{bmatrix} x_B^i - x_{B_des}^i \\ y_B^i - y_{B_des}^i \\ \theta_{BC}^i - \theta_{BC_des}^i \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Se puede observar que $n_r=6$, $n_q=7$, $n_{bmax}=7$ y $n_d=3$. Introduciendo estos valores en la expresión (11) y dejando libres las 7 componentes del vector $\mathbf{b}$, se obtiene que se podrían admitir hasta 3 posiciones de síntesis ya que $n_p=3,5$.

Para validar este resultado, en [1] se muestran dos métodos gráficos para resolver el problema de síntesis planteado con dos y tres posiciones de síntesis. En ambos casos, se necesita fijar la posición y rotación en el plano del eslabón BC y, además, se necesita fijar su longitud. La resolución gráfica para la síntesis con tres posiciones de síntesis se puede ver en la Figura 3.

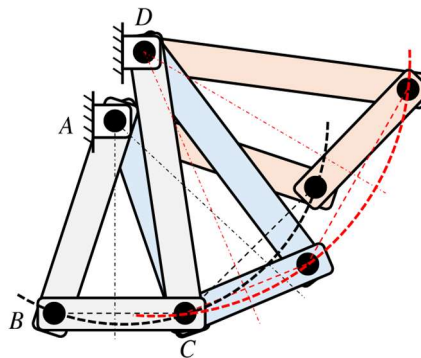


Figura 3: Resolución gráfica de la síntesis de guiado de biela con tres posiciones de síntesis

Si se añade la condición de que la longitud de la biela BC es conocida al planteamiento con coordenadas mixtas, aparece la restricción funcional adicional mostrada en la expresión (22).

$$L_{BC} = \text{Constante} \quad (22)$$

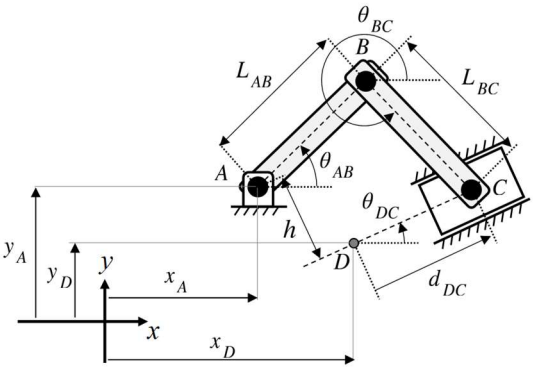
Entonces, el planteamiento de la inecuación de síntesis queda como se muestra en la expresión (23), mostrando la coherencia de soluciones de ambos métodos.

$$\begin{aligned} (n_r + n_d) \cdot n_p + n_a &\leq n_q \cdot n_p + n_b \\ (6 + 3) \cdot n_p + 1 &\leq 7 \cdot n_p + 7 \rightarrow n_p = 3 \end{aligned} \quad (23)$$

Este ejemplo muestra como la metodología de tipo general propuesta en este artículo puede explicar los resultados obtenidos por métodos de síntesis de tipo gráfico que son específicos para un mecanismo y un problema de síntesis determinado.

5.3. Síntesis de generación de función sobre un mecanismo RRRP

Se desea realizar una coordinación entre el movimiento de la barra AB de un mecanismo del tipo manivela-biela-corredera como el de la Figura 4 y el movimiento de la corredera. En dicha figura se puede observar el modelado de la cinemática en coordenadas mixtas.



$$\mathbf{G}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} x_B^i - x_A - L_{AB} \cdot \cos \theta_{AB}^i \\ y_B^i - y_A - L_{AB} \cdot \sin \theta_{AB}^i \\ x_C^i - x_B - L_{BC} \cdot \cos \theta_{BC}^i \\ y_C^i - y_B - L_{BC} \cdot \sin \theta_{BC}^i \\ x_C^i - x_D - d_{DC} \cdot \cos \theta_{DC}^i \\ y_C^i - y_D - d_{DC} \cdot \sin \theta_{DC}^i \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{q}^i = [x_B^i \ y_B^i \ x_C^i \ y_C^i \ \theta_{AB}^i \ \theta_{BC}^i \ d_{DC}^i]^T$$

$$\mathbf{b} = [x_A \ y_A \ x_D \ y_D \ L_{AB} \ L_{BC} \ \theta_{DC}]^T$$

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{q}^i, \mathbf{b}, \mathbf{c}^i) = \begin{bmatrix} \theta_{AB}^i - \theta_{AB_des}^i \\ d_{DC}^i - d_{DC_des}^i \end{bmatrix} = 0$$

Figura 4: Modelado para la síntesis de generación de función sobre un mecanismo RRRP

Se puede observar que $n_r=6$, $n_q=7$, $n_{bmax}=7$ y $n_d=2$. Introduciendo estos valores en la expresión (11) y dejando libres las 7 componentes del vector $\mathbf{b}$, se obtiene que se podrían admitir hasta 7 posiciones de síntesis ($n_p=2$).

Nuevamente, para comprobar la validez de la inecuación, se puede comparar con el método de Freudenstein específico para este mecanismo, el cual modela la posición con la expresión (24):

$$K_1 \cdot d_{DC}^i \cdot \cos \theta_{AB}^i + K_2 \cdot \cos \theta_{AB}^i - K_3 = d_{DC}^i \quad (24)$$

siendo

$$K_1 = 2 \cdot L_{AB} \quad K_2 = 2 \cdot L_{AB} \cdot h \quad K_3 = L_{AB}^2 + h^2 - L_{BC}^2$$

La expresión (24) tiene 3 incógnitas (los valores de K_1 , K_2 y K_3). Si se desea calcular su valor, se necesitan 3 ecuaciones (una por cada posición de síntesis) y, como consecuencia, el máximo número de posiciones de síntesis admitidas es de 3.

Para que el planteamiento con la inecuación de síntesis refleje con precisión el problema planteado por el método de Freudenstein, hay que añadirle las restricciones funcionales indicadas en (25), las cuales relacionan los valores de las constantes dimensionales.

$$\begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= 0 \\ x_D &= x_A \\ \theta_{DC} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Entonces, el planteamiento de la inecuación de síntesis queda como se muestra en la expresión (26).

$$\begin{aligned}
 (n_r + n_d) \cdot n_p + n_a &\leq n_q \cdot n_p + n_b \\
 (6 + 2) \cdot n_p + 4 &\leq 7 \cdot n_p + 7 \rightarrow n_p = 3
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

Nuevamente, ambos métodos son coherentes a la hora de analizar cuantas posiciones de síntesis puede admitir el problema planteado.

Al igual que sucedió en el primer ejemplo, la principal ventaja de la inecuación de síntesis se deriva de que no necesita conocer una ecuación específica para el problema de síntesis como sucede con el método de Freudenstein y otros similares si no que aprovecha la robustez, simplicidad y generalidad que proporciona el modelado de la cinemática en coordenadas mixtas para obtener las mismas conclusiones. A esto se le suman todas las ventajas que aporta dicho modelado, como el hecho de que puede aplicarse para modelar la cinemática de cualquier mecanismo plano. Como consecuencia de lo anterior, la inecuación de síntesis que puede ser aplicable a cualquier mecanismo plano y a cualquier problema de síntesis.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que existe un vínculo entre la síntesis topológica y la dimensional, el cual se plasma en una inecuación de síntesis. Esta inecuación aporta un criterio para realizar un filtrado de soluciones factibles para la síntesis topológica, permitiendo descartar muy fácilmente los mecanismos que no puedan cumplir la cardinalidad del conjunto de posiciones y condiciones de síntesis deseadas. Utilizando el mismo razonamiento de manera inversa, la inecuación de síntesis aporta un criterio para determinar la máxima cardinalidad del conjunto de posiciones y condiciones de síntesis que puede llegar a cumplir un mecanismo determinado. Este uso dual sugiere el desarrollo futuro de una base de datos orientada a la síntesis de mecanismos que permita realizar el filtrado rápido en las dos direcciones (topológica y dimensional), utilizando la inecuación de síntesis.

La inecuación de síntesis es válida tanto para mecanismos planos como espaciales ya que únicamente es dependiente de que pueda realizarse el modelado cinemático de los mismos. Además, es independiente del tipo de coordenadas que se utilicen para realizar dicho modelado aunque, por simplicidad, únicamente se han mostrado ejemplos de mecanismos planos. Al igual que ocurre en el análisis cinemático, cada familia de coordenadas aporta ventajas e inconvenientes a la hora de realizar el modelado, pero todas proporcionan resultados equivalentes, quedando a decisión del diseñador que familia usar.

También se ha mostrado que la inecuación es aplicable a cualquier problema de síntesis con condiciones relativas a la posición.

Finalmente, es destacable la demostración, partiendo de la inecuación de síntesis, de que el problema del análisis cinemático de posiciones sucesivas se puede interpretar como un caso particular del problema de síntesis dimensional con condiciones de posición.

7. Agradecimientos

Se agradece enormemente el apoyo a este trabajo por parte del Ministerio de Ciencia e Innovación del Gobierno de España, en el marco del proyecto PID2021-124677NB-I00.

8. Referencias

- [1] Norton R.L., *Diseño de maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos. Cuarta edición*, McGrawhill, México D.F. (2009)
- [2] Artobolevski I.I., *Mecanismos de la técnica moderna*, Mir Editorial, Moscú (1976)
- [3] Digital Mechanism and Gear Library, <https://www.dmg-lib.org/dmglib/main/portal.jsp>
- [4] Fernández de Bustos I., “Síntesis cinemática dimensional de mecanismos mediante algoritmos genéticos”, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco, Bilbao (2004)
- [5] Noriega González A., “Síntesis dimensional óptima de mecanismos mediante estrategias evolutivas”, Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo, Gijón (2008)
- [6] García de Jalón J., Bayo E., *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: the real-time challenge*, Springer-Verlag, New York (1994)
- [7] Sandor G.N., “Principles of a general quaternion-operator method of spatial kinematic synthesis”, *Journal of Applied Mechanics* **35**(1), 40-46 (1968)

- [8] Avilés, R., Ajuria, M.B.G., Vallejo, J., Hernández, A., “A Procedure for the Optimal Synthesis of Planar Mechanisms Based on Nonlinear Position Problems” *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **40(8)**, 1505-1524 (1998)
- [9] Avello A., *Teoría de máquinas*, Tecnun - Universidad de Navarra, (2012)
- [10] Buckley J., Huang M.Z., “A study on dimension synthesis for the Peaucellier mechanism”, *ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* **64278**, 233-239, Denver, Colorado, USA (2011)
- [11] Noriega A., Fernández de Bustos V., García-Marina V., “A simple and efficient way to introduce bounded ranges in parameters and functional constraints in a dimensional synthesis problem”, *Mechanism and Machine Theory Symposium*, Guimaraes (2024)
- [12] Freudenstein, F., “Approximate synthesis of four-bar linkages” *Mechanism and Machine Theory* **3(2)**, 127-134 (1955)